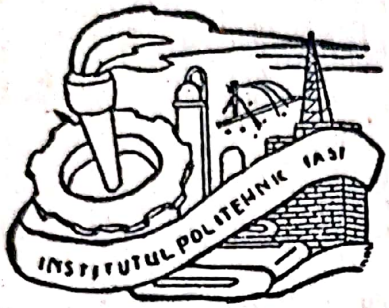
INSTITUTUL POLITEHNIC „GH. ASACHI" IAŞI
FACULTATEA DE CONSTRUCŢII
CATEDRA DE MECANICA CONSTRUCŢIILOR



CONSTANTIN I. AMARIEI

STATICA CONSTRUCŢIILOR

I. SISTEME STATIC DETERMINATE

— 1973 —

Scanned with OKEN Scanner

INSTITUTUL POLITEHNIC "GH.ASACHI" I A S I
FACULTATEA DE CONSTRUCTII
CATEDRA DE MECANICA CONSTRUCTIILOR

CONSTANTIN I.AMARIEI

S T A T I C A C O N S T R U C T I I L O R

I. SISTEME STATIC DETERMINATE

-1973-

Scanned with OKEN Scanner

I N T R O D U C E R E

In acest manual sînt prezentate elementele principale referitoare la calculul sistemelor static determinate care alcătuiesc structurile de rezistenţă ale construcţiilor. El are la bază cursul predat de către autor la Secţia de Căi ferate, drumuri şi poduri a Facultăţii de construcţii de la Institutul politehnic Iaşi, dar anumite capitole sînt mai dezvoltate, în ideea de a-l face util şi pentru studenţii de la alte secţii.

Avînd în vedere faptul că expunerea principiilor de calcul este făcută în general pe tipurile cele mai caracteristice de sisteme static determinate şi că Statica sistemelor determinate reprezintă de fapt un şir de aplicaţii referitoare la utilizarea condiţiilor de echilibru pentru determinarea eforturilor în elementele ce alcătuiesc diferitele categorii de structuri de rezistenţă, nu s-au prezentat exemple practice propriu zise (cu date numerice) decît acolo unde ele au fost necesare pentru completarea cunoştinţelor rezultate din expunerea părţii teoretice.

Lucrarea se referă la calculul sistemelor static determinate alcătuite din bare - utilizate încă pe scară largă în construcţii - care constituie fie elemente sau structuri folosite ca atare, fie sisteme de bază pentru rezolvarea structurilor static nedeterminate.

In prezentarea materialului s-a urmărit expunerea clară a principiilor generale de rezolvare a sistemelor static determinate şi a particularităţilor de aplicare a acestor principii

la calculul diferitelor categorii de elemente şi structuri. S-au scos de asemenea în evidenţă unele criterii de alcătuire a structurilor de rezistenţă, în scopul obţinerii unor soluţii cît mai raţionale din punct de vedere al comportării lor sub sarcini şi sub aspect economic.

Ţinînd cont de necesitatea scurtării duratei de proiectare a construcţiilor - în cadrul căreia calculul static deţine o pondere foarte mare - în cap.VIII se prezintă o serie de elemente legate de aplicarea calculului matriceal la rezolvarea sistemelor static determinate, necesare în vederea utilizării calculatoarelor electrice.

Inainte de a trece la conţinutul propriu zis al cursului, se va face o scurtă descriere a evoluţiei în timp a calculului construcţiilor, evoluţie care a fost condiţionată atît de nivelul de dezvoltare a tehnologiei materialelor de construcţii, cît şi de cunoştinţele furnizate de Matematica aplicată, în diferite etape istorice.

O etapă importantă în dezvoltarea construcţiilor în general o constituie, fără îndoială, epoca marilor imperii, în care s-au realizat edificii grandioase ce au constituit adevărate "minuni ale lumii" şi ale căror vestigii au supravieţuit secole de-a rîndul, pînă în zilele noastre. Este vorba în general de construcţii masive, ale căror dimensiuni impresionante şi forme au fost stabilite după toate probabilităţile pe baza unei experienţe îndelungate transmisă din generaţie în generaţie, dar şi cu un deosebit simţ ingineresc, care lasă să se bănuiască şi existenţa unor cunoştinţe teoretice, chiar dacă nu a existat o ştiinţă propriu zisă despre calculul construcţiilor.

Primele reguli corecte cunoscute, referitoare la unele

elemente privind rezistenţa grinzilor, la modul de acţiune a sarcinilor şi la unele probleme de cercetare experimentală, datează din timpul Renaşterii şi se datoresc lui Leonardo da Vinci (1452-1519).

Lucrarea lui Galileo Galilei (1564-1642), intitulată "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nouve scienze" şi publicată în anul 1638 la Leida, este considerată ca începutul Mecanicii construcţiilor. Autorul ei s-a ocupat de problema rezistenţei şi ruperii solidelor, dînd o importanţă deosebită verificărilor pe cale experimentală.

Fizicianul Robert Hooke (1635-1703) a formulat cunoscuta lege a proporţionalităţii dintre eforturile unitare şi deformaţii (" ut tensio sic vis"), iar Jacob Bernoulli (1654-1705) s-a ocupat de studiul deformării grinzilor, formulînd nu mai puţin cunoscuta ipoteză a secţiunilor plane.

Contribuţii remarcabile au adus de asemenea M.V.Lomonosov (1711-1765) în ceea ce priveşte proprietăţile mecanice ale materialelor, Leonard Euler (1707-1783) în privinţa problemei stabilităţii barelor comprimate, C.A.Coulomb (1736-1806) în legătură cu unele probleme privind încovoierea şi torsiunea, precum şi calculul arcelor fără articulaţii.

Se consideră de obicei că studiile acestora din urmă reprezintă primii paşi de constituire a Rezistenţei materialelor ca disciplină independentă.

In continuare, numeroşi oameni de ştiinţă au dezvoltat diferite probleme de calcul al elementelor de rezistenţă. Astfel, J.L.Lagrange (1736-1813) a dat formularea definitivă şi a utilizat principiul deplasărilor virtuale, iar L.Navier (1785-1836) s-a ocupat de calculul la încovoiere, stabilind relaţia care-i poartă numele şi punînd bazele calculului în domeniul

elastic; el a rezolvat de asemenea unele cazuri de sisteme static nedeterminate.

Introducerea în secolul XIX a oţelului în construcţii, a condus la dezvoltarea rapidă a metodelor de determinare a eforturilor în structurile de rezistenţă, începîndu-se cu procedeele grafice. La dezvoltarea Staticii grafice şi-au adus contribuţii importante mulţi oameni de ştiinţă, printre care K.Culmann (1821-1881), L.Cremona (1830-1890), E.Winkler (1835-1888), C.O.Mohr (1835-1918), J.C.Maxwell (1831-1879), N. E.Jukovski etc.

Au fost elaborate metode grafice şi analitice pentru calculul eforturilor în grinzile cu zăbrele, pentru rezolvarea sistemelor static nedeterminate şi a sistemelor spaţiale, la care au contribuit - pe lîngă cei menţionaţi anterior - P.E.Clapeyron, A.Castigliano, E.Betti, A.F.Möbius, H.S.Golovin, F.S.Jasinski, V.G.Suhov, L.D.Proskureakov ş.a.

Un puternic impuls pentru dezvoltarea calculului construcţiilor a fost dat de introducerea betonului armat ca material de construcţii, la sfîrşitul secolului XIX şi începutul secolului XX. Datorită utilizării unor structuri multiplu static nedeterminate, s-au dezvoltat metode de rezolvare a acestor sisteme, prin contribuţiile aduse de către H. Müller-Breslau, S.Timoshenko, E.Freyssinet, A.Vierendeel, K. Beyer, O.Mohr, H.Cross, I.M.Rabinovici, I.P.Prokofiev, A.A. Gvozdev, N.I.Bezuhov, P.L.Pasternak etc.

Iniţial a luat naştere o aşa numită "Teorie a cadrelor", care împreună cu Statica grafică au constituit primele capitole ale Staticii construcţiilor ca disciplină de sine stătătoare. Ulterior, au fost dezvoltate metode generale de rezolvare a diferitelor tipuri de structuri de rezistenţă şi s-a

publicat o literatură vastă în legătură cu diferitele probleme noi ridicate de proiectarea construcţiilor supuse la acţiuni dinamice, calculul la stabilitate etc.

In ultimele decenii a căpătat o largă dezvoltare proiectarea structurilor ţinînd cont de proprietăţile plastice ale materialelor, care conduc la obţinerea unor soluţii cu consum redus de material. Calculul structurilor în domeniul elastico-plastic, care pune în evidenţă - în cazul construcţiilor metalice - rezerve de capacitate portante de ordinul a (5-30)% din valoarea limitei de comportare elastică, s-a dezvoltat graţie unor şcoli de mare prestigiu în acest domeniu şi anume:

- Scoala englezească de la Universitatea din Cambridge, în cadrul căreia au fost stabilite teoremele fundamentale ale calculului în domeniul plastic şi au fost elaborate o serie de metode generale de proiectare plastică, datorate lui J.F.Baker, P.S.Symonds, B.G.Neal, M.R.Horne, J.Heyman, J.D. Foulkes ş.a.

- Scoala sovietică, reprezentată prin lucrările fundamentale ale lui A.A.Gvozdev şi contribuţiile remarcabile ale lui A.R.Rjanîţîn, A.A.Ciras, A.V.Gemerling, V.V.Kuprianov, I.M. Rabinovici, A.N.Raevskii, A.V.Vinogradov etc.

- Scoala americană, dezvoltată în special după 1948 la Universitatea Lehigh din Bethlehem şi axată în special pe probleme de proiectare a scheletului metalic al construcţiilor înalte. Lucrările datorate unui număr foarte mare de cercetători printre care L.S.Beedle, T.V.Galambos, G.C.Dryscoll, M. Ojalvo, M.G.Lay, G.C.Lee, W.Prager, P.G.Hodge-jr., H.G.Greenberg, H.A.Sawyer ş.a., au un caracter direct aplicativ, astfel că în momentul de faţă proiectarea plastică a structurilor metalice a devenit în S.U.A. o problemă curentă şi conduce la economii

de oţel care depăşesc în general 10%.

Preocupări deosebite privind calculul în domeniul plasticii există de asemenea în Belgia (Prof.Ch.Massonnet şi colaboratorii), Italia, Franţa, Polonia, R.F.Germania, Japonia, Cehoslovacia, Portugalia, Canada etc. şi de asemenea în ţara noastră.

In ceea ce priveşte dezvoltarea Mecanicii construcţiilor în România, trebuie amintite în primul rînd preocupările unor ingineri de seamă, în acelaşi timp profesori şi educatori ai multor generaţii de constructori români, printre care: Andrei G.Ioachimescu (1868-1943), profesor de Mecanică teoretică, Ion Ionescu (1870-1946), profesor de Statică grafică şi de poduri Gh.Em.Filipescu (1882-1937), profesor de Statică şi rezistenţă la Scoala politehnică din Bucureşti. Ultimul este şi autorul lucrării "Statica construcţiilor şi rezistenţa materialelor", publicată în 1935, conţinînd un material bogat, expus la un nivel ştiinţific foarte ridicat. Gh.Em.Filipescu este autorul unei metode generale de studiu al sistemelor static nedeterminate, cunoscută sub denumirea de "Metoda coeficienţilor nedeterminaţi" şi tot el a dat o mare importanţă utilizării principiului deplasărilor virtuale ca o cale generală şi unitară de exprimare a condiţiilor de echilibru.

Consacrarea maturităţii tehnicii româneşti în construcţii a constituit-o fără îndoială, construirea între anii 1890-1895 a podului peste Dunăre Feteşti-Cernavodă, operă a inginerului Anghel Saligny (1854-1925). Această lucrare, proiectată şi executată sub îndrumarea lui A.Saligny, reprezenta la data dării în exploatare, cel mai mare pod din Europa continentală şi al treilea din lume. Podul principal are o lungime de 750 m, iar lucrarea în ansamblu cuprinde poduri în lungime de peste

4 km. Este o soluţie foarte raţională de grinzi metalice cu zăbrele, cu console şi articulaţii, avînd deschiderea centrală de 190 m, la care a fost utilizat oţelul moale în locul fierului pudlat folosit de obicei în epoca respectivă la construcţii similare.

Anghel Saligny a fost şi profesor de poduri la Scoala Naţională de Poduri şi Sosele din Bucureşti şi împreună cu alt inginer de valoare, Elie Radu (1853-1931), - şi el profesor la aceeaşi şcoală - a introdus betonul armat pentu realizarea celor mai variate tipuri de construcţii din România (silozuri, poduri, de şosea etc.). Elie Radu a făcut şi încercări de structuri la scară mare, printre care şi încercarea unor grinzi de pod cu deschiderea de 8 m.

In anii de după eliberare, avîntul mereu crescînd al întregii economii naţionale a condus la un ritm nemaiîntîlnit în dezvoltarea construcţiilor industriale şi social-culturale. Creşterea continuă a volumului de investiţii şi necesitatea proiectării şi execuţiei unor construcţii din ce în ce mai complexe, au pus în faţa constructorilor români probleme deosebite la rezolvarea cărora îşi aduc aportul toţi factorii chemaţi să realizeze noile edificii ale producţiei materiale şi ale creşterii nivelului de trai al oamenilor muncii: institutele de proiectare, cercetarea şi întreprinderile de execuţie.

In acest context, rolul învăţămîntului pentru construcţii este deosebit de important, el avînd menirea să dea economiei cadre de specialitate de înaltă calificare, cu un deosebit spirit de răspundere şi cu o mare dragoste pentru profesiune. El trebuie în acelaşi timp să contribuie la rezolvarea problemelor de primă importanţă practică a producţiei, în scopul măririi eficienţei investiţiilor şi a realizării unor con-

structii la nivelul tehnicii celei mai moderne.

Institutiile de învătămînt superior pentru constructii din Bucuresti, Iasi, Cluj si Timisoara reprezintă astăzi centre puternice de cercetare si în cadrul activitătii desfăsurate de acestea, un loc de frunte îl ocupă dezvoltarea si perfectionarea metodelor de calcul al constructiilor. Contributiile aduse de catedrele de specialitate din domeniul Mecanicii constructiilor sînt remarcabile si ele se referă la domenii de mare actualitate ale proiectării si executiei constructiilor: calculul la actiunea actiunilor seismice, calculul în domeniul elastico-plastic, utilizarea calculului matriceal si a calculatoarelor electronice pentru proiectarea structurilor, optimizarea proiectării structurilor, încercarea structurilor pe modele si la scară naturală etc.

Au fost create colective valoroase de specialisti, care, sub îndrumarea unor cadre de prestigiu ale scolii românesti pentru constructii lucrează cu deosebit succes alături de cadrele din institutele specializate pentru cercetare (INCERC, etc.) si proiectare la rezolvarea unor probleme de cercetare fundamentală si aplicativă din domeniul Mecanicii constructiilor obtinînd rezultate apreciate atît în tară cît si peste hotare. Astfel sînt colectivele initiate si conduse de către Acad.prof.St.Bălan, Prof.Al.Gheorghiu, Prof.P.Mazilu, Prof.S. Răutu de la Institutul de constructii din Bucuresti, regretatul Prof.A.Sesan si Prof.A.Negoiță de la Facultatea de constructii a Institutului politehnic Iasi, Prof.C.Avram de la Facultatea de constructii a Institutului politehnic Timisoara etc.

Prin multiplicarea manualului de fată, credem că răspundem unei cerinte actuale privind îmbunătătirea procesului de învătămînt din facultate si cresterea nivelului de pregătire

a viitorilor specialişti din domeniul construcţiilor.

Autorul mulţumeşte pentru sprijinul acordat de către conducerea catedrei de Mecanică construcţiilor şi de către colegii din catedră şi în mod special tovarăşului conf.dr.ing. N.Orlovschi pentru sugestiile şi sfaturile deosebit de preţioase.

Precizăm că o parte din desene au fost executate de către studenţi ai facultăţii cărora le aducem de asemenea mulţumiri,menţionînd în special aportul studenţilor Dana Croitoru şi Pavel Armeanu.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

G E N E R A L I T A T I

I.1. Obiectul Staticii construcţiilor

Mecanica construcţiilor este ştiinţa care cuprinde totalitatea principiilor şi metodelor de calcul ce servesc la stabilirea unor dimensiuni raţionale ale structurilor de rezistenţă, în vederea obţinerii unei cît mai mari siguranţe de exploatare şi a unei realizări în condiţii cît mai economice.

Statica construcţiilor este una din disciplinele Mecanicii construcţiilor, din care mai fac parte Dinamica construcţiilor, Stabilitatea construcţiilor, Rezistenţa materialelor, Teoria elasticităţii şi plasticităţii, Mecanica solurilor, Analiza dimensională şi încercarea construcţiilor.

Obiectul Staticii construcţiilor îl constituie studiul condiţiilor de echilibru al structurilor de rezistenţă, în vederea determinării următoarelor două categorii de elemente necesare unei alcătuiri care să răspundă cerinţelor de siguranţă şi economicitate:

1. Distribuţiile de eforturi secţionale produse de acţiunile statice în elementele care alcătuiesc structurile de rezistenţă ale construcţiilor. Această etapă a calculului static (cunoscută sub denumirea de "determinare a diagramelor de eforturi"), permite stabilirea valorilor maxime posibile ale eforturilor - în ipotezele cele mai defavorabile de încărcare - valori pe baza cărora se efectuează apoi dimensionarea secţiunilor (sau verificarea secţiunilor impuse la predimensionarea

structurii), cu ajutorul relaţiilor de calcul care aparţin Rezistenţei materialelor. Această etapă a proiectării, constînd din evaluarea eforturilor maxime şi dimensionarea secţiunilor pe baza acestor eforturi, este numită în general "calculul de rezistenţă al structurii".

2. Deplasările care apar în elementele structurii, pentru asigurarea rămînerii acestora în limita unor valori admisibile, la care să nu se producă ieşirea din lucru sau deteriorarea unor elemente de construcţii sau a construcţiei în ansamblu, la mărimi ale eforturilor mai mici decît cele care asigură îndeplinirea condiţiilor de rezistenţă. Această etapă constituie aşa numitul "calcul de rigiditate al structurii", care este la fel de important ca şi calculul de rezistenţă, dimensiunile secţiunilor unor anumite elemente de construcţii putînd fi uneori impuse de condiţiile de limitare a deplasărilor.

Evident că proiectarea unei structuri mai cuprinde o serie de etape la fel de importante care preced calculul eforturilor şi cel de dimensionare a secţiunilor, ca:

- Alegerea soluţiei constructive, adică a schemei de alcătuire a structurii de rezistenţă, în funcţie de destinaţia construcţiei, de condiţiile naturale şi de exploatare, de materialele disponibile etc. Această etapă, care face obiectul disciplinelor de construcţii de specialitate (Clădiri civile, industriale, agrozootehnice, Construcţii din beton armat, Construcţii metalice, Construcţii din materiale plastice, Construcţii din lemn etc.) este-sau trebuie să devină-o cale de îmbunătăţire a eficienţei realizării construcţiilor. Activitatea de proiectare trebuie de altfel în general să constituie tot mai mult un proces de creaţie, lăsînd pe seama maşinilor efectuarea operaţiunilor propriu zise de calcul.

- Studiul acţiunii sarcinilor şi evaluarea mărimii acestor sarcini. In lucrarea de faţă se va discuta succint acest aspect al proiectării structurilor, avînd în vedere dezvoltarea care i se dă în cadrul altor discipline.

Mai trebuie menţionat că referindu-se la structuri static determinate, în elementele cărora eforturile secţionale nu depind de natura materialului, este firesc să se abordeze numai problemele calculului în domeniul de comportare elastică. Se poate pune, evident, problema determinării capacităţii portante a structurilor statice determinate, dar acest aspect se poate rezolva pe baza cunoştinţelor de la disciplina Rezistenţa materialelor.

I.2. Ipoteze de bază în calculul static al structurilor în domeniul elastic.

Ipotezele principale care se admit în statica sistemelor elastice, sînt următoarele:

1. Materialul din care sînt alcătuite structurile este continuu, omogen şi izotrop şi proprietăţile sale nu variază în timp.

2. Materialul se comportă elastic, deci relaţia dintre eforturile unitare şi deformaţiile specifice este liniară. In cazul metalelor de exemplu, se consideră că eforturile unitare nu depăşesc limita de proporţionalitate (fig.I.1.a), iar în cazul betonului armat se admite că relaţia (σ, ε) se poate aproxima cu o variaţie liniară (fig.I.1.b)

3. Structura în ansamblu se comportă elastic, adică relaţia dintre parametrii de încărcare şi deplasările structurii este de asemenea o relaţie de gradul întîi (fig.I.2).

4. Este valabilă ipoteza secţiunilor plane (ipoteza lui Bernoulli).

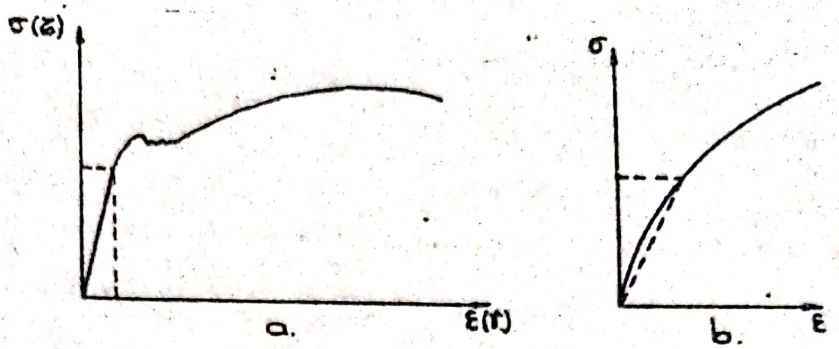


Fig. 1-1

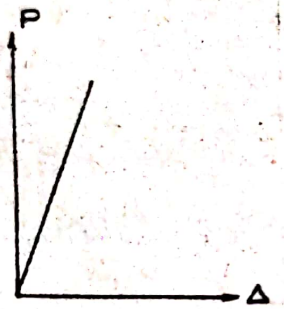


Fig. I-2

5. Deformaţiile structurii sînt mici în raport cu dimensiunile geometrice ale elementelor (lungimi, dimensiuni ale secţiunilor), ceea ce permite scrierea relaţiilor de echilibru pe schema nedeformată a structurii. De remarcat că această ipoteză nu este valabilă pentru toate tipurile de structuri, cazuri în care este necesară efectuarea unui calcul pe schema deformată şi care vor fi precizate la momentul potrivit.

6. Deformarea structurilor se produce instantaneu şi nu variază în timp.

Admiterea acestor ipoteze are cîteva consecinţe, dintre care cea mai importantă sub aspect practic este valabilitatea principiului suprapunerii efectelor, care poate conduce la unele simplificări în rezolvarea problemelor staticii construcţiilor, aşa cum se va menţiona pe parcursul lucrării. O altă consecinţă a ipotezei comportării elastice a materialului şi structurii este lipsa eforturilor remanente, care se pot produce în cazul descărcării de la mărimi ale unor sarcini care ar conduce la depăşirea limitei de comportare elastică şi care pot modifica esenţial comportarea ulterioară a structurilor.

I.3. Reazeme şi reacţiuni.

Pentru fixarea construcţiilor de teren sau de alte elemente fixe, se utilizează dispozitive care împiedică total sau parţial tendinţele de deplasare provocate de acţiunea încărcărilor. Aceste dispozitive se numesc reazeme şi ele sînt de mai multe tipuri, aşa cum se va vedea mai departe.

După cum este cunoscut din Mecanică, pentru fixarea unui corp în plan sînt necesare trei legături simple, iar pentru fixarea unui corp în spaţiu sînt necesare şase legături simple. Se ştie de asemenea că pentru un corp se pot scrie trei ecuaţii distincte de echilibru static în plan şi şase ecuaţii distincte de echilibru static în spaţiu.

Se consideră un sistem alcătuit dintr-un număr de c corpuri şi se fac următoarele notaţii:

n = numărul total de legături simple (exterioare şi interioare) ale sistemului;

e = numărul total de ecuaţii distincte de echilibru static care se pot scrie pentru sistemul respectiv (e = 3 c pentru un sistem plan şi e = 6 c pentru un sistem spaţial).

Pot exista următoarele trei situaţii:

a) n = e - sistemul este în acest caz static determinat ; rezolvarea acestor sisteme se poate face folosindu-ne numai de ecuaţiile de echilibru static;

b) n > e - sistemul este în acest caz static nedeterminat, iar diferenţa n-e reprezintă gradul de nedeterminare statică; pentru rezolvarea acestor sisteme este necesară folosirea ecuaţiilor de echilibru static şi a unui număr de (n-e) ecuaţii de echilibru elastic;

c) n < e - sistemul este în acest caz un sistem cinema-

tic (labil), iar diferența e-n reprezintă numărul gradelor de libertate al sistemului; aceste sisteme nu pot fi, evident, utilizate ca structuri de rezistență, dar ele reprezintă scheme de calcul în aplicarea principiului deplasărilor virtuale, care va fi analizat într-un capitol separat al lucrării.

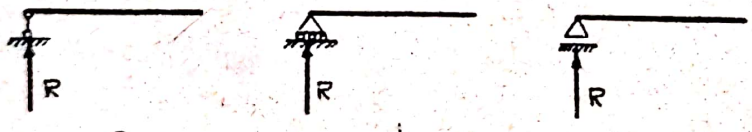
Revenind la reazeme, mai trebuie arătat că datorită împiedecării tendinței de deplasare, în aceste dispozitive iau naștere niște forțe reactive numite reacțiuni sau forțe de legătură.

In continuare se analizează tipurile de reazeme utilizate curent pentru fixarea construcțiilor.

1. Reazeme pentru structuri plane.

a) Reazemul simplu sau reazemul mobil.

Este o legătură care împiedică numai deplasarea pe direcție perpendiculară pe suprafața de rezemare și permite deci deplasarea pe direcție paralelă cu această suprafață și rotirea elementului rezemat. Modurile de reprezentare ale acestui tip de reazem sînt cele din fig.I.3. Reacțiunea R care ia naștere în reazemul simplu are punctul de aplicație cunoscut (punctul de rezemare), direcția de asemenea cunoscută (perpendiculară pe suprafața de rezemare), singurul element care trebuie determinat fiind mărimea acestei reacțiuni. Deci, reazemul simplu introduce în calcule o singură necunoscută.



a. b. c.

Fig. I-3

b) Reazemul articulat (reazemul fix), numit în mod curent articulație. Este o legătură care împiedică deplasarea pe

orice direcţie şi permite numai rotirea elementului în jurul punctului de articulare. Modurile de reprezentare sînt cele din fig.I.4.

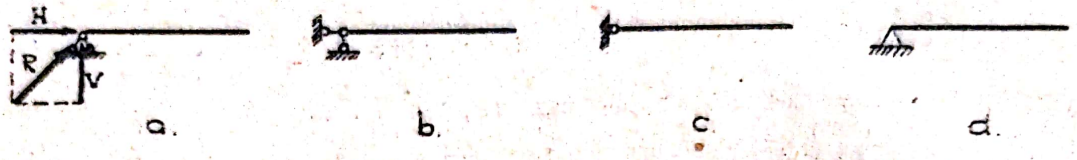


Fig. I-4

Fig. I-5

Reacţiunea R din articulaţie are doar punctul de aplicaţie cunoscut (punctul de legătură între element şi suport), direcţia şi mărimea ei fiind cele două necunoscute introduse în calcul de acest tip de rezemare. Practic, se iau de obicei ca necunoscute componentele reacţiunii pe verticală şi orizontală (V şi H - fig.I.4.a).

c) <u>Încastrarea</u>, legătură completă care împiedică atît deplasările cît şi rotirea elementului şi se reprezintă ca în fig.I.5.a,b). Reacţiunea R nu are în acest caz nici un element cunoscut, încastrarea comportînd deci determinarea a trei necunoscute (punctul de aplicaţie, direcţia şi mărimea reacţiunii R). Prin reducerea reacţiunii la centrul de greutate al secţiunii de încastrare - prin cele două forţe R egale şi de sens contrar figurate punctat în fig.I.5.b. - se pot alege ca necunoscute componentele V şi H ale reacţiunii şi momentul

M = Re (fig.I.5.c), forțe de legătură cu care se lucrează practic.

Fixarea unui corp în plan se va putea face deci prin combinarea acestor trei tipuri de reazeme, astfel ca numărul total de legături simple să fie de minimum trei (cu trei legături simple corpul reprezintă un sistem static determinat). Rezultă astfel ca posibile combinări cu cele din fig.I.6.a

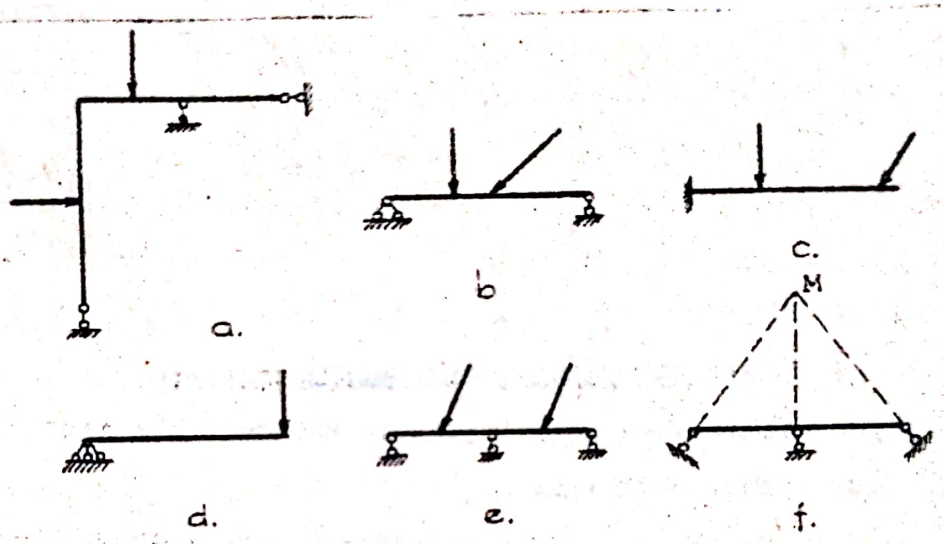


Fig. I-6

(sistem cu trei reazeme simple), I.6.b (sistem simplu rezemat), sau I.6.c (sistem încastrat).

Nu sînt corecte grupările de legături din fig.I.6.d,e,f, cînd, deși există trei legături simple, se poate produce fie rotirea sistemului (cazurile d,f), fie deplasarea lui (cazul e). In cazul din fig.I.6.f este posibilă o rotire limitată în jurul punctului M de intersecție a direcțiilor celor trei reazeme simple, aceasta fiind un exemplu de sistem cu formă critică. Asupra acestor sisteme se va mai reveni în cadrul capitolului care tratează sistemele plane de bare articulate.

In fig.I.7 sînt date două exemple de sisteme alcătuite din cîte două corpuri, la care numărul de legături simple exterioare și interioare este egal cu șase, deci sistemele sînt de asemenea static determinate. Orice legătură suplimentară adăugată la sistemele prezentate, face ca acestea să devină static nedeterminate.

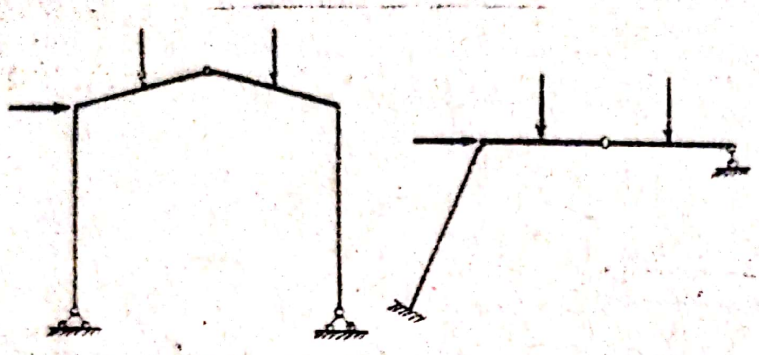


Fig. I-7

2. Reazeme pentru structuri spațiale.

Tipurile obișnuite de legături pentru structurile spațiale sînt următoarele:

a) Reazemul simplu - legătură care împiedică deplasarea după o singură direcție în spațiu. Modelul fizic este o sferă interpusă între corp și suport, iar reprezentarea schematică se face printr-un pendul pe direcția deplasării împiedicate (fig.I.8). Acest tip de reazem introduce deci în calcule o singură necunoscută

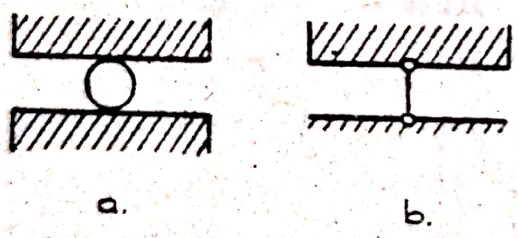


Fig. I-8

b) Articulația plană (cilindrică) - legătură care împiedică deplasarea într-un anumit plan. Modelul fizic este o sferă care pătrunde în locașurile semisferice din corp și dintr-o

placă ce se poate deplasa pe o direcție, pe niște rulouri interpuse între placă și suport (fig.I.9.a). Se reprezintă schematic prin doi penduli concurenți, care definesc planul în care deplasarea este împiedicată (fig.I.9.b) și introduce în calcule două necunoscute.

c) <u>Articulația spațială (sferică)</u> - legătură care împiedică deplasarea pe orice direcție. Modelul fizic este o sferă care pătrunde în locașurile sferice din corp și suport (fig.I.10.a). Schematic, se reprezintă prin trei penduli concurenți care nu sînt situați în același plan (fig.I.10.b) și această legătură introduce deci în calcule trei necunoscute.

Fig. I-9

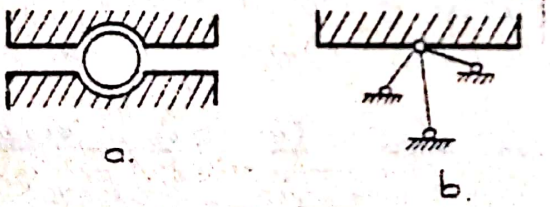


Fig. I-10

d) <u>Încastrarea spațială-legătură</u> completă care împiedică deplasările și rotirile în spațiu și care introduce deci în calcule șase necunoscute.

Diversele grupări ale acestor legături realizează fixarea sistemelor în spațiu, dîndu-le caracterul de static determinate (șase legături simple pentru un corp), sau static nedeterminate (sisteme cu legături suplimentare).

In fig.I.11.a,b sînt prezentate două exemple de astfel de grupări de legături pentru sisteme static determinate, iar în fig.I.11.c,d două exemple de sisteme cu legături grupate greșit,

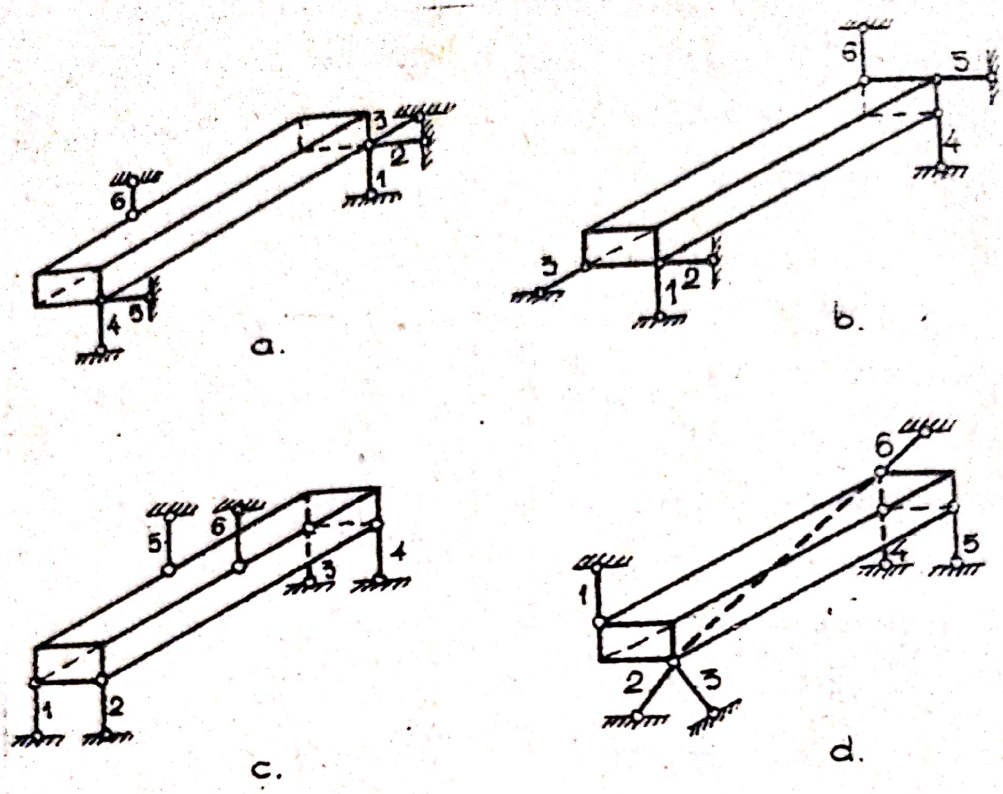


Fig. I-11

care vor trebui, evident, evitate.

I.4. Schematizarea construcţiilor (elemente şi structuri).

Părţile componente ale unei structuri de rezistenţă se numesc elemente de construcţii şi se grupează în următoarele trei categorii:

1. Bare.

Sînt elemente de construcţii care au una din dimensiunile geometrice (lungimea) mult mai mare decît celelalte două (dimensiunile secţiunii transversale). Din această categorie fac parte grinzile şi stîlpii, barele sistemelor cu zăbrele etc.

O bară este caracterizată de două elemente (fig.I.12):

a) Axa barei, care reprezintă locul geometric al centrelor de greutate ale secţiunilor transversale. Axa barei poate

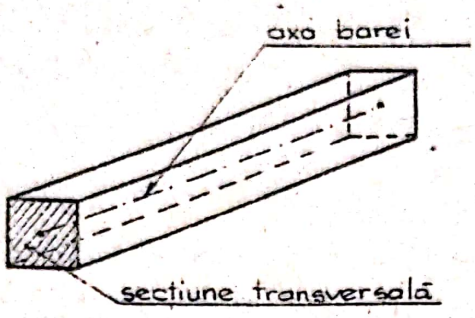


Fig. I-12

fi plană sau spaţială, dreaptă, curbă sau frîntă (poligonală).

b) Secţiunea transversală, care este normală pe axa barei şi este la rîndul său caracterizată de formă şi anumite caracteristici geometrice (arie, moment de inerţie etc.).

Formele secţiunilor transversale ale barelor ce alcătuiesc structurile de rezistenţă ale construcţiilor pot fi: dreptunghiulare, circulare, tubulare, T, I, C, L (ultimele trei forme sînt specifice barelor de oţel laminate).

Secţiunea transversală a unei bare poate fi constantă sau variabilă ca formă şi mărime în lungul axei.

Cînd dimensiunile secţiunii transversale sînt foarte mici în raport cu lungimea, barele poartă denumirea de fire sau cabluri şi în acest caz elementele caracteristice sînt axa şi mărimea secţiunii transversale (nu mai contează deci forma secţiunii transversale, care este de fapt aproape totdeauna circulară).

2. Plăci.

Din această categorie fac parte elementele de construcţii care au două dintre dimensiuni (lungimea şi lăţimea) mari în raport cu cea de a treia dimensiune (grosimea).

Elementele care caracterizează o placă sînt următoarele:

a) Suprafaţa mediană, care reprezintă locul geometric al mijloacelor grosimilor în toate punctele plăcii. După forma suprafeţei mediane, plăcile pot fi plane sau curbe, cu simplă sau

dublă curbură.

b) grosimea, care se măsoară normal pe suprafaţa mediană.

Plăcile sînt acţionate de obicei de sarcini care se aplică normal pe planul lor. Tot în categoria plăcilor - după definiţia dată, anterior - se încadrează şi elementele plane verticale care alcătuiesc unele structuri de rezistenţă, cum sînt panourile mari, diafragmele din beton armat etc., utilizate pe scară largă la clădirile de locuinţe şi social-culturale. Deosebirea faţă de plăcile obişnuite este că aceste plăci verticale se calculează ca elemente încărcate cu sarcini cuprinse în planul lor.

3. Blocuri (masive).

Sînt elemente de construcţii care au toate cele trei dimensiuni apropiate ca ordin de mărime şi exemplul cel mai caracteristic îl constituie fundaţiile izolate de sub stîlpii structurilor în cadre.

Lucrarea de faţă se ocupă de calculul static al sistemelor alcătuite din bare, utilizate încă pe scară destul de largă ca structuri de rezistenţă ale construcţiilor. Pe lîngă acestea, se utilizează însă din ce în ce mai mult şi alte tipuri de structuri, cum sînt cele alcătuite din elemente plane verticale(panouri mari, diafragme), structuri fagure, dar acestea sînt de obicei sisteme static nedeterminate şi se rezolvă ca atare.

Deşi structurile de rezistenţă au în general o alcătuire spaţială, pentru simplificarea calculului ele se descompun în sisteme plane şi acestea la rîndul lor se reprezintă schematizat din aceeaşi necesitate de a nu complica prea mult rezolvarea lor. Trebuie totuşi reţinut că în anumite cazuri este necesar să se ţină seama de conlucrarea spaţială a elementelor structurii de rezistenţă care poate avea o influenţă importantă în

privința modului de prelucrare a sarcinilor ce acționează construcția. Structurile spațiale vor fi tratate într-un capitol separat.

Referindu-ne la sistemele plane alcătuite din bare, acestea se schematizează prin reducerea la axele barelor și se pot grupa în următoarele categorii principale:

1. Grinzi drepte - caracterizate prin faptul că au axa rectilinie și sînt acționate de obicei de sarcini normale pe axă, solicitarea lor principală fiind deci încovoierea. Din această categorie fac parte:

a) Grinzile drepte simple: grinda simplu rezemată, grinda încastrată (sau în consolă) și grinda cu console (fig.I.13. a, b, c).

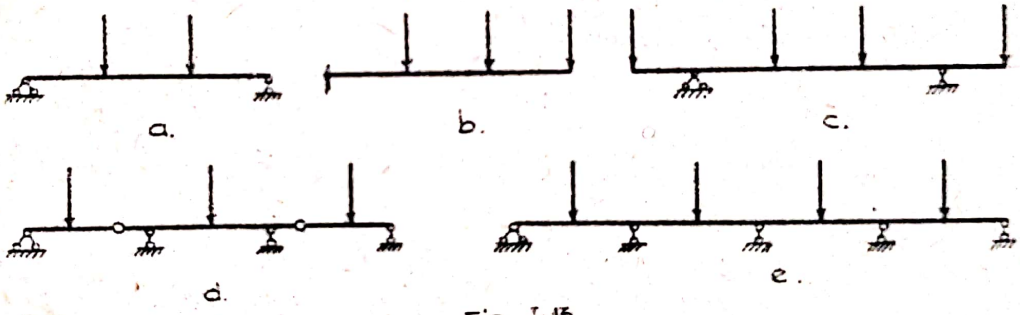


Fig. I-13

b) Grinzile cu console și articulații (sau Gerber), rezultate din combinarea mai multor grinzi drepte simple și alcătuite astfel încît să aibă atît pe ansamblu cît și pe porțiuni - numărul de legături necesar pentru a reprezenta sisteme static determinate (fig.I.13.d).

c) Grinzile continue (fig.I.13.c), care sînt sisteme static nedeterminate.

Grinzile Gerber sînt de fapt de asemenea grinzi continue la care s-a introdus un număr de articulații interioare, în

aşa fel încît sistemul să devină static determinat.

2. Arce - bare cu axă curbă, încărcate cu sarcini cuprinse în planul lor şi caracterizate prin apariţia în reazeme a unor reacţiuni orizontale, indiferent de ipoteza de încărcare. Deoarece aceste reacţiuni se numesc de obicei "împingeri", arcele fac parte din categoria mai generală a "sistemelor cu împingeri". Arcele sînt structuri avantajoase, datorită faptului că efectul de încovoiere este la aceste sisteme mai mic decît la grinzile drepte de aceeaşi deschidere.

Arcele folosite ca structuri de rezistenţă în construcţii sînt următoarele:

a) Arce static determinate (utilizate ca atare, sau ca scheme de calcul pentru arcele static nedeterminate): arcul cu trei articulaţii, arcul cu o articulaţie şi un reazem simplu, arce cu tirant (fig.I.14.a,b,c).

b) Arce static nedeterminate: arcul dublu încastrat,

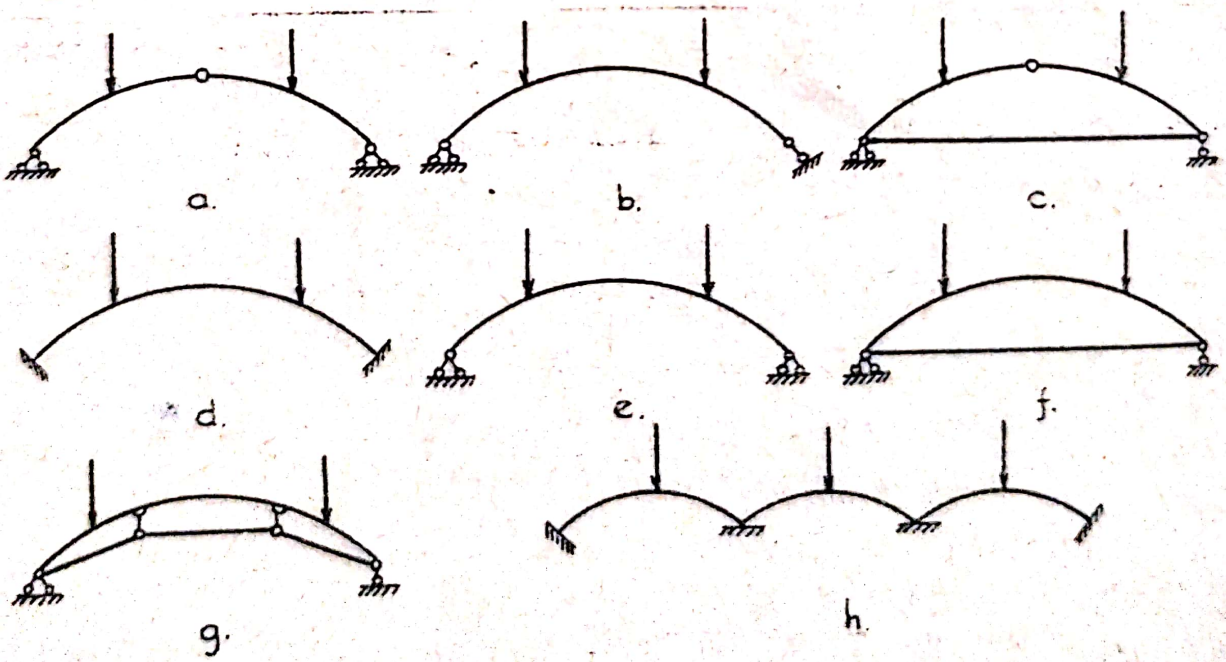


Fig. I-14.

arcul dublu articulat, arcul cu tirant orizontal sau supraînălțat (fig.I.14.d,e,f,g), arce continue (fig.I.14.h).

3. Cadre - structuri alcătuite din bare orizontale și verticale sau înclinate (grinzi și stîlpi) legate rigid în noduri.Și aceste structuri pot fi static determinate sau static nedeterminate și sînt de mai multe tipuri: cadre tip hală industrială (fig.I.15.a,b,c - ultimul fiind denumit cadru-shed), cadre etajate (fig.I.15.d), cadre cu tiranți (fig.I.15.e).

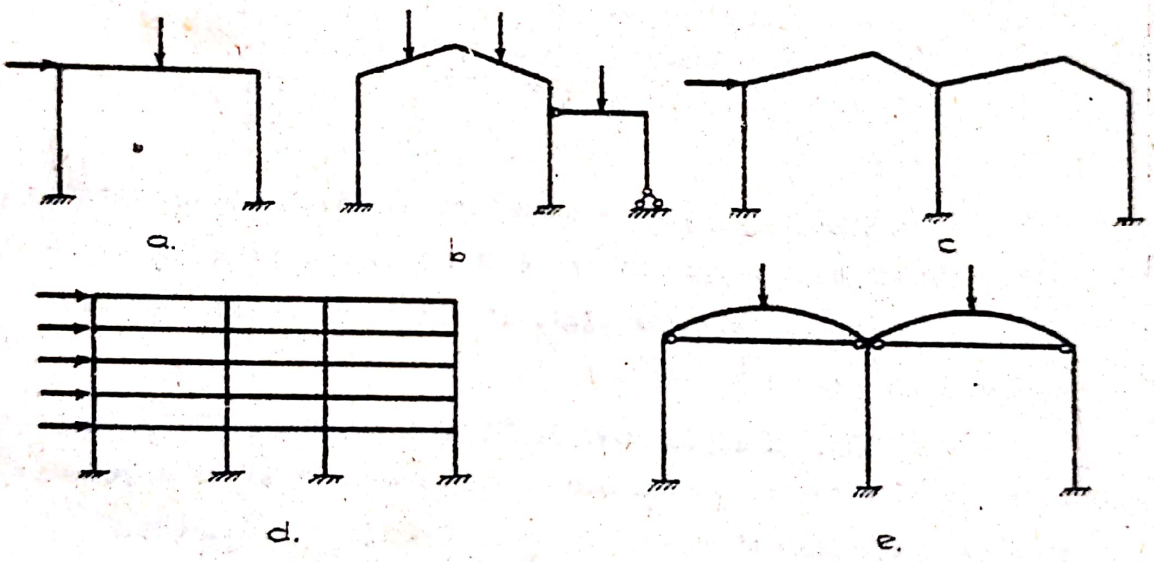


Fig. I-15

4. Sisteme mixte (combinate) - specific structurilor de rezistență ale podurilor și alcătuite în general dintr-o grindă dreaptă, un arc care lucrează la compresiune sau la întindere și montanți care asigură conlucrarea dintre tablier (pe care se realizează calea de deplasare a convoaielor de sarcini mobile) și arc.

Aceste sisteme pot fi la rîndul lor static determinate sau static nedeterminate și se împart în: structuri mixte cu calea sus (fig.I.16.a), cu calea jos (fig.I.16.b) și cu calea

la mijloc (fig.I.16.c)

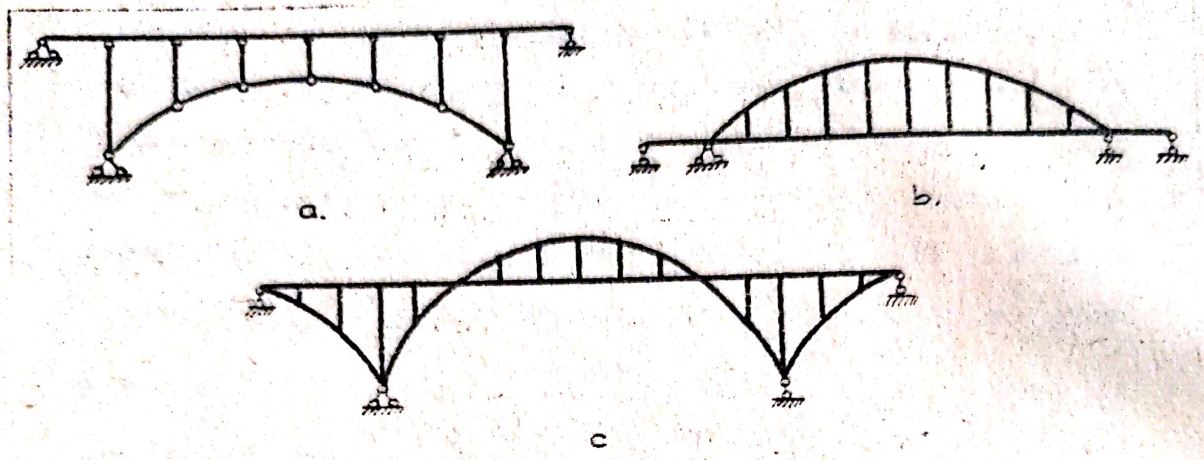
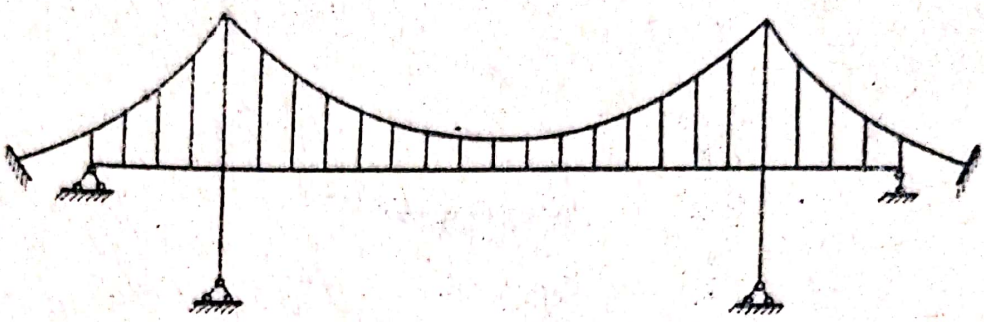


Fig. I-16

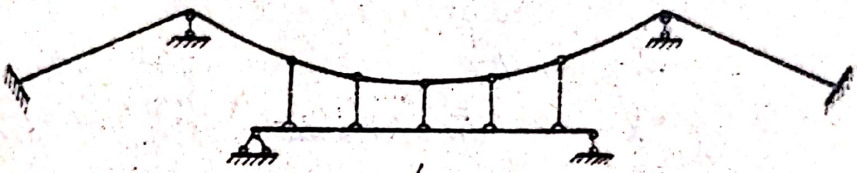
5. Sisteme suspendate - structuri utilizate de asemenea pentru construcţii de poduri de mari deschideri şi avînd scheme de alcătuire ca cele din fig.I.17.a,b,c sau pentru acoperişuri de mari deschideri (fig.17.I.d,e).

6. Sisteme plane de bare articulate (sisteme cu zăbrele) - structuri care, prin schematizare se reduc la sisteme geometric nedeformabile atunci cînd toate nodurile se consideră articulaţii perfecte. Dacă se admite această ipoteză a nodurilor articulate (nereală, evident, dar acceptabilă în multe situaţii, cel puţin ca o primă aproximaţie pentru calcul) şi se respectă condiţia de aplicare a sarcinilor numai în noduri, în barele acestor structuri se dezvoltă numai forţe axiale.

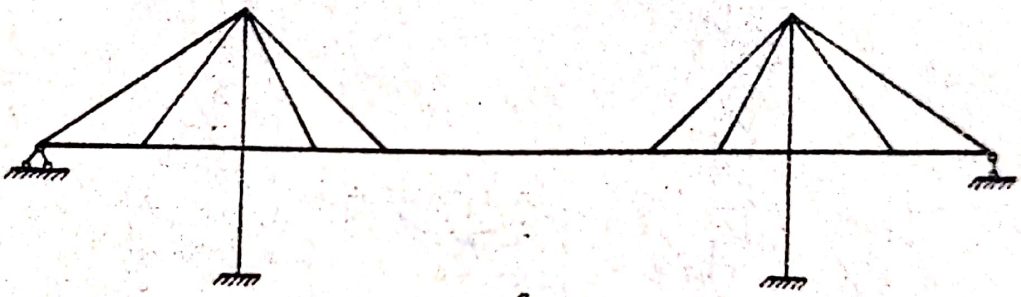
Sistemele cu zăbrele pot fi alcătuite pe schema oricăreia dintre categoriile de structuri analizate anterior şi în fig.I.18 sînt prezentate cîteva exemple: grindă simplă cu zăbrele (a), grindă Gerber cu zăbrele (b), arc cu zăbrele (c), cadru cu zăbrele (d), sistem mixt cu grinda de rigidizare cu



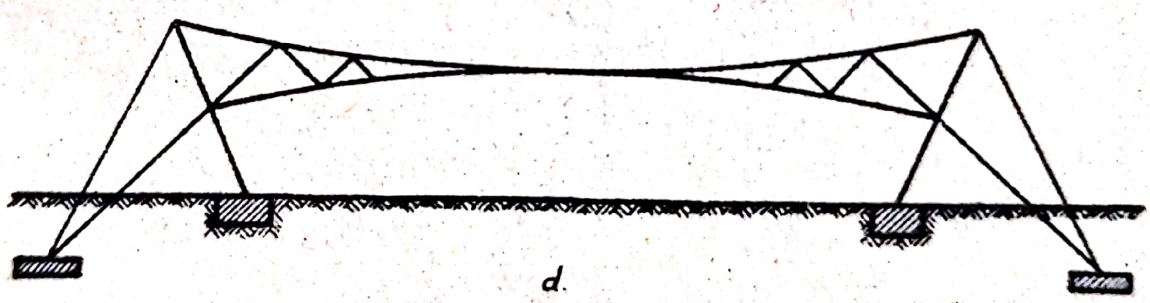
a.



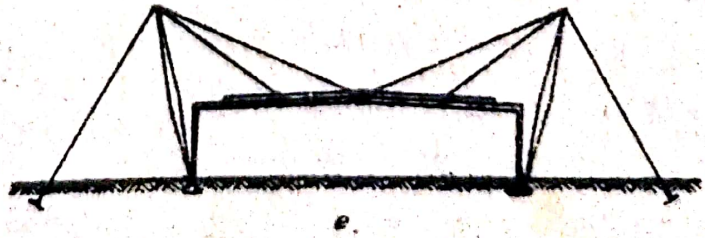
b.



c.



d.



e.

Fig. I. 17.

Scanned with OKEN Scanner

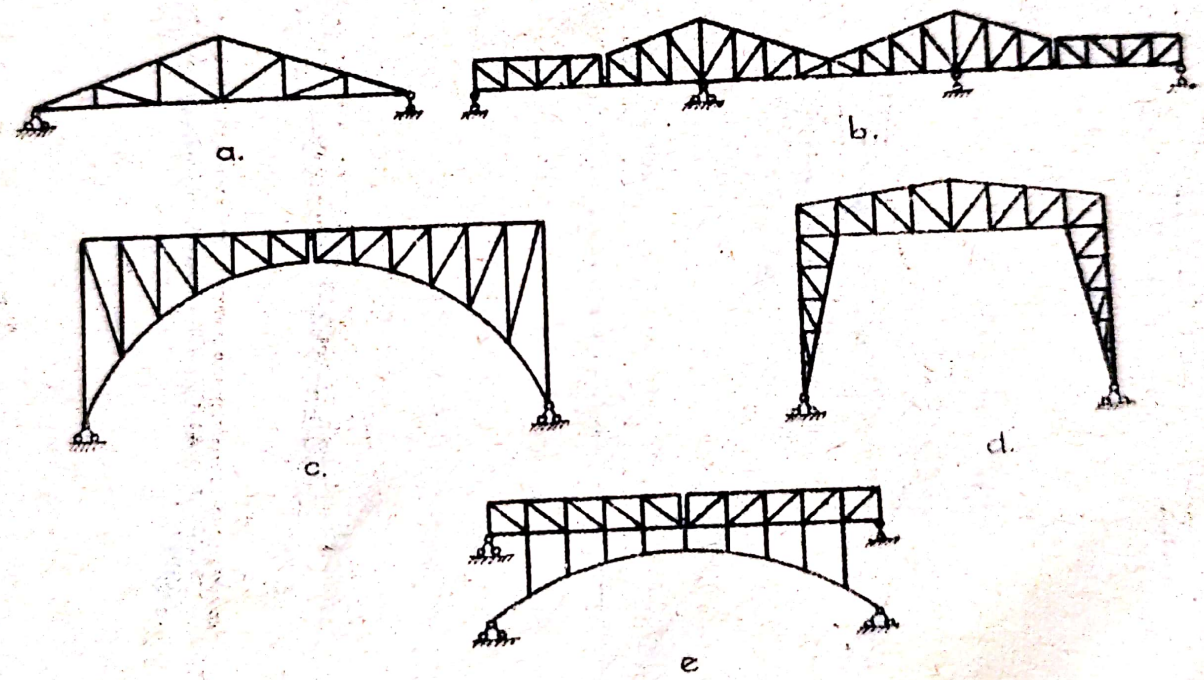


Fig. 1-18

zăbrele (e).

I.5. Acţiuni în construcţii.

Cauzele care produc eforturi şi deformaţii ale elementelor de construcţii sau ale construcţiilor în ansamblu, poartă denumirea de acţiuni. Intr-o accepţiune mai restrînsă, aceste cauze sînt denumite în mod curent sarcini sau încărcări. In standardele mai vechi (STAS 503-49) se foloseşte noţiunea de "sarcină", definită ca fiind "orice forţă, sistem de forţe sau efecte care se pot reduce la un sistem de forţe, a căror acţiune trebuie luată în considerare la dimensionarea unui element de rezistenţă sau a unei părţi de construcţie". Totodată, se face o clasificare a sarcinilor în următoarele categorii:

a) Sarcini fundamentale, în care se includ:

- sarcinile permanente (greutatea proprie şi sarcinile moarte);
- sarcinile utile (greutatea oamenilor, utilajelor, materialelor, a convoaielor de vehicule etc.);
- sarcinile accesorii (forţa centrifugă, forţa de frînare, forţa de şerpuire, variaţiile de temperatură la construcţii cu procese tehnologice calde etc.).

b) Sarcini accidentale, în care se includ sarcinile climatice (presiunea vîntului, încărcarea cu zăpadă, variaţiile de temperatură) etc.

c) Sarcini extraordinare - care acţionează întîmplător şi pot avea efecte catastrofale asupra construcţiilor (acţiuni seismice, inundaţii, explozii, incendii etc.).

Proiectul de standard 8.433/1-71 propune utilizarea noţiunii de "acţiune", care este mai cuprinzătoare şi clasifică acţiunile din construcţii după durata lor de aplicare,

după cum urmează:

a) Acţiuni permanente - care au valori practic constante pe durata existenţei construcţiilor.

b) Acţiuni temporare - care se aplică în anumite perioade de timp ale execuţiei sau explcatării construcţiei. Acţiunile temporare se împart la rîndul lor în:

- acţiuni temporare de lungă durată care pot fi cu aplicare continuă sau cu aplicare intermitentă;
- acţiuni temporare de scurtă durată;
- acţiuni temporare accidentale.

In anexele proiectului de standard amintit, sînt indicate acţiunile care fac parte din categoriile prezentate, pentru diferite tipuri de construcţii şi anume:

- construcţii civile, industriale şi agrozootehnice.
- poduri şi construcţii legate de căile de comunicaţii,
- construcţii hidrotehnice.

Totodată, sînt analizate grupările posibile de acţiuni care trebuiesc luate în considerare la calculul construcţiilor şi anume:

1. Gruparea fundamentală, care cuprinde: acţiunile permanente, acţiunile temporare de lungă durată şi una din acţiunile temporare de scurtă durată a cărei aplicare este practic posibilă odată cu acţiunile temporare de lungă durată.

2. Gruparea suplimentară, care cuprinde: acţiunile permanente, acţiunile temporare de lungă durată şi două sau mai multe acţiuni temporare de scurtă durată, a căror aplicare este practic posibilă simultan cu acţiunile temporare de lungă durată.

3. Gruparea extraordinară, care cuprinde: acţiunile permanente, acţiunile temporare de lungă durată, una sau mai multe

acţiuni temporare de scurtă durată, a căror acţiune este posibilă simultan cu acţiunile temporare de lungă durată şi cu acţiunile accidentale şi una sau mai multe acţiuni temporare accidentale.

In continuare, se va folosi denumirea de "sarcină" sau "încărcare" pentru acele acţiuni care se pot reprezenta schematic prin forţe sau cupluri, noţiunea de "acţiune" incluzînd deci şi alte cauze care produc eforturi şi deformaţii în construcţii (variaţiile de temperatură, cedările de reazeme, contracţia şi curgerea lentă a betonului etc.).

Dacă ne referim la sarcini propriu zise, acestea pot fi clasificate şi după alte criterii şi anume:

- După modul de aplicare pe elementul de construcţie:

a) Sarcini concentrate - la care se poate presupune că întreaga intensitate se transmite asupra elementului de construcţie într-un singur punct (fig.I.19.a). Se măsoară în kgf, tf, N, daN.

b) Sarcini distribuite (repartizate) care pot fi uniforme (fig.I.19.b), cu variaţie liniară (fig.I.19.c), sau variaţie parabolică (fig.I.19.d). Intensitatea acestor sarcini se măsoară în kgf/ml, tf/ml etc.

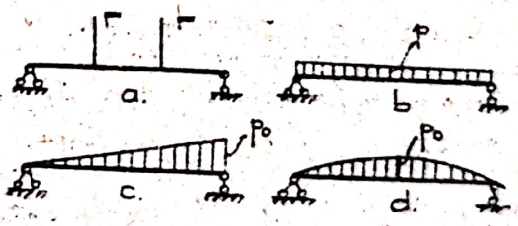


Fig. I-19

- După poziţia sarcinilor pe construcţie:

a) Sarcini fixe - care nu-şi schimbă poziţia pe construcţie.

b) Sarcini mobile - care îşi schimbă continuu poziţia pe construcţie. Din această categorie fac parte sarcinile care

provin din acțiunea podurilor rulante, sarcinile produse de convoaiele de vehicule asupra structurii de rezistență a podurilor etc.

Tipurile de convoaie de sarcini mobile sînt date în standardele pentru calculul construcțiilor, după cum urmează:

- STAS 800-68 pentru poduri rulante;
- STAS 1545-72 și STAS 3221-72 pentru poduri de străzi și șosele și pasarele;
- STAS 1911-65 și STAS 3220-65 pentru poduri de cale ferată.

In aceste standarde se găsesc atît caracteristicile convoaielor tip, cît și indicații asupra claselor de încărcări și a modului de efectuare a grupărilor de sarcini, determinarea sarcinilor accesorii etc.

- După modul de variație a intensității în timp:

a) Sarcini statice - a căror intensitate variază lent în timpul aplicării lor pe construcție, încît nu este necesar să se introducă în calcule forțele de inerție.

b) Sarcini dinamice - a căror intensitate variază repede în timp și ale căror efecte se determină pe baza calculului dinamic al construcțiilor.

- După elementul de construcție pe care se aplică, în raport cu elementul de construcție care se calculează:

a) Sarcini aplicate direct

b) Sarcini aplicate indirect.

La o structură de pod de exemplu (fig.I.20.a), alcătuită în secțiune transversală din grinzile principale (a), antretoaze (b), longeroni (c) și cale (d), sarcinile se aplică direct pentru cale, dar indirect pentru antretoaze, longeroni și grinzile principale.

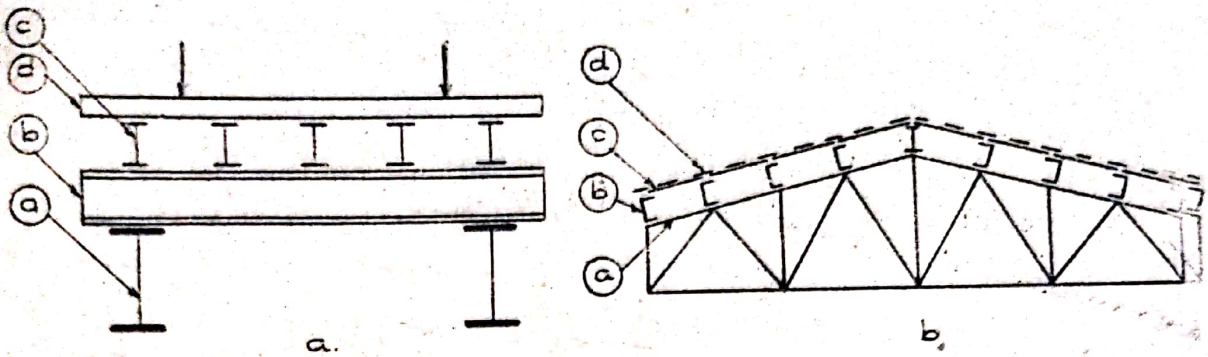


Fig. I-20

La fel, în cazul unei structuri clasice de acoperiş (fig.I.20.b), sarcina din zăpadă se aplică direct pentru învelitoare (d), dar indirect pentru căpriori (c), pane (b) şi fermă (a).

I.6. Condiţii de echilibru, eforturi în secţiuni.

I.6.1. Condiţii de echilibru static. Determinarea reacţiunilor.

După cum s-a mai arătat, datorită acţiunilor, în reazemele structurilor iau naştere forţe de legătură (forţe propriu zise şi momente). Dacă structura este static determinată, calculul acestor forţe de legătură (reacţiuni) se poate face prin utilizarea exclusivă a condiţiilor de echilibru static ale sistemului de forţe, alcătuit din acţiuni şi reacţiuni.

Aşa cum este cunoscut din Mecanică, cele două condiţii de echilibru ale unui sistem de forţe (rezultanta egală cu zero şi momentul rezultant egal cu zero) se pot exprima pe cale analitică în două moduri aparent diferite şi anume (referindu-ne la sistemele de forţe situate în acelaşi plan):

Prin relaţiile obişnuite de echilibru static care se pot scrie în trei moduri:

a) $\Sigma X = 0$

$\Sigma Y = 0$ (I.1.a)

$$\Sigma M_{(A)} = 0$$

(două ecuaţii de proiecţie şi o ecuaţie de momente în raport cu un punct A din planul forţelor);

b) $\Sigma X = 0$ (sau $\Sigma Y = 0$)

$$\Sigma M_{(A)} = 0 \qquad \text{(I.1.b)}$$

$$\Sigma M_{(B)} = 0$$

(o ecuaţie de proiecţie şi două ecuaţii de momente în raport cu două puncte A şi B din planul forţelor);

c) $\Sigma M_{(A)} = 0$

$$\Sigma M_{(B)} = 0 \qquad \text{(I.1.c)}$$

$$\Sigma M_{(C)} = 0$$

(trei ecuaţii de momente în raport cu trei puncte A, B, C, necoliniare, din planul forţelor)

2. <u>Utilizînd principiul deplasărilor virtuale</u>, asupra căruia se va reveni într-un capitol separat al lucrării. Aici se va arăta numai că, scriind condiţia ca lucrul mecanic virtual al rezultantei cu deplasarea virtuală δ_R şi al momentului rezultant cu rotirea virtuală θ_R să fie nul, aceasta are forma

$$\bar{R} \cdot \bar{\delta}_R + \bar{M} \cdot \bar{\theta}_R = 0 \qquad \text{(I.2)}$$

sau, referindu-ne de asemenea la sistemele de forţe situate în acelaşi plan şi notînd cu X_R şi Y_R componentele rezultantei după direcţiile a două axe rectangulare şi cu δ_X şi δ_Y deplasările virtuale corespunzătoare, relaţia de echilibru devine:

$$\bar{X}_R \cdot \bar{\delta}_X + \bar{Y}_R \cdot \bar{\delta}_Y + \bar{M}_R \bar{\theta}_R = 0$$

Această relaţie este satisfăcută atunci cînd vor fi îndeplinite condiţiile:

$$X_R = 0$$

$$Y_R = 0 \qquad \text{(I.3)}$$

$$\overline{M}_R = 0$$

care sînt deci similare cu forma a) a relaţiilor obişnuite de echilibru.

Cu ajutorul acestor relaţii de echilibru, se pot determina forţele de legătură ale sistemelor static determinate. La sistemele alcătuite din mai multe corpuri, se vor putea scrie cîte trei ecuaţii de echilibru statie pentru fiecare corp, dar de obicei nu ne interesează decît forţele de legătură din reazemele exterioare, aşa încît vom utiliza numai o parte din aceste ecuaţii. De exemplu, pentru cadrul din fig. I.21 din cele şase ecuaţii distincte de echilibru static care se pot scrie pentru cele două corpuri, vom folosi doar patru, necesare calculului reacţiunilor V_A, V_B, H_A, H_B (celelalte două forţe de legătură iau naştere în articulaţia C, dar rezolvarea structurii nu necesită de obicei cunoaşterea lor).

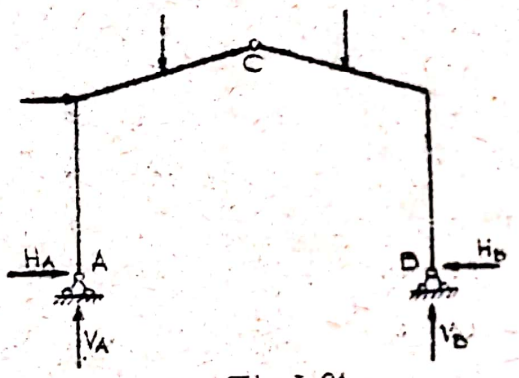


Fig. I-21

Mai trebuie reţinut că alegerea ecuaţiilor de echilibru static nu se face la întîmplare, ci după anumite criterii care să ne conducă la relaţii cît mai simple, fiind de dorit ca fiecare ecuaţie să conţină cîte o singură reacţiune necunoscută. Utilizarea principiului deplasărilor virtuale realizează cel mai simplu acest deziderat, dar şi ecuaţiile obişnuite de echilibru static pot fi alese convenabil, aşa cum se va vedea la diverse tipuri de structuri static determinate analizate în capitolele lucrării.

Posibilitățile de folosire pe cale grafică a condițiilor de echilibru a sistemelor de forțe, atît pentru determinarea reacțiunilor cît și pentru determinarea eforturilor, se vor analiza de asemenea pe tipuri de structuri. Se consideră că problemele generale în legătură cu poligoanele de forțe, poligoanele funiculare și curbele funiculare, cu proprietățile acestora și cu anumite avantaje care rezultă din utilizarea acestui mod de operare, sînt cunoscute de la disciplina de Mecanică teoretică.

I.6.2. Eforturi în secțiuni.

Sub influența acțiunilor, în elementele de construcții iau naștere eforturi, determinarea cărora reprezintă așa cum s-a subliniat - unul din obiectivele metodelor de calcul ale Staticii construcțiilor. Determinarea acestor eforturi se face utilizînd metoda secțiunilor, potrivit căreia, separînd printr-o secțiune completă o porțiune dintr-un element supus acțiunilor și reacțiunilor și scriind condițiile de echilibru ale porțiunii izolate, se pot calcula eforturile din secțiunea respectivă. Astfel, dacă se consideră cazul general al unei bare încărcate cu forțe oarecare (acțiuni și reacțiuni) și se separă o porțiune din această bară, efectul părții îndepărtate asupra porțiunii izolate se poate înlocui printr-o rezultantă R și un moment rezultant M, (fig.I.22). Acestea se descompun după cum urmează:

Rezultanta R se descompune în:

- componenta N după axa barei, numită forță axială;
- o componentă T în planul secțiunii, care la rîndul ei care componentele T_z și T_y numite forțe tăietoare.

Momentul rezultant M se descompune în:

- componenta M_x după axa barei care reprezintă momentul

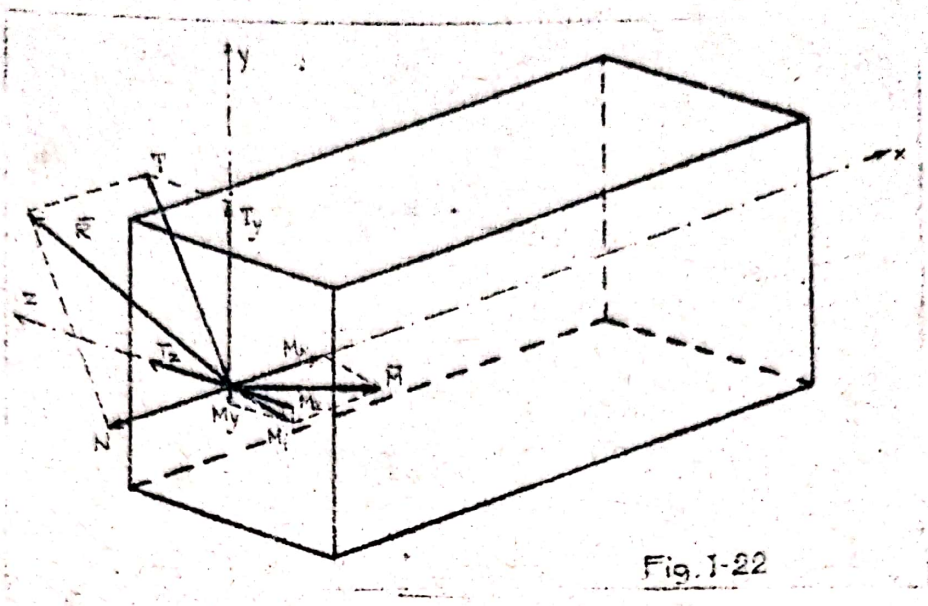


Fig.I-22

de răsucire;

- componenta M care la rîndul ei are componentele M_z și M_y, reprezentînd momentele încovoietoare.

Cele șase componente sînt eforturile secționale care pot apare într-un caz general de solicitare. În cazurile practice însă, apar numai anumite eforturi secționale, cazul cel mai frecvent de solicitare al elementelor de construcții fiind cel în care forțele (acțiuni și reacțiuni) sînt cuprinse în același plan cu axa barei. În acest caz, eforturile secționale se reduc la forța axială N, forța tăietoare T situată în planul forțelor (acestea fiind componentele rezultantei R) și momentul încovoietor M situat în planul secțiunii și avînd direcția perpendiculară pe planul forțelor. Cînd de exemplu planul forțelor este vertical, eforturile secționale sînt N_x, T_y M_z și se notează mai simplu cu N, T, M (fig.I.23), acesta fiind un caz curent de solicitare a elementelor structurilor alcătuite din bare.

Cînd forțele sînt și toate normale pe axa barei, rezultanta R este cuprinsă în planul secțiunii și produce deci numai forță tăietoare T, care este însoțită de momentul încovoietor

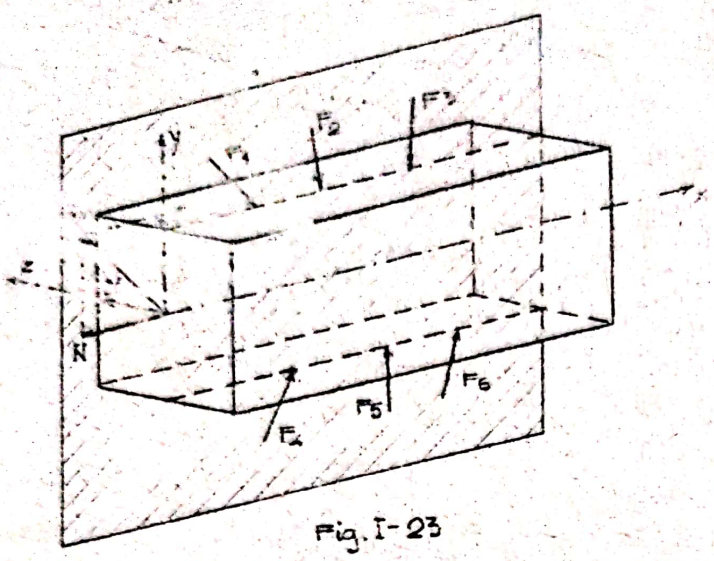


Fig. I-23

M (cazul încovoierii plane fără forţă axială).

Determinarea mărimii eforturilor secţionale se face - aşa cum s-a arătat - din condiţiile de echilibru ale porţiunii din stînga sau din dreapta secţiunii în care se calculează aceste eforturi.

Astfel, considerînd o grindă simplu rezemată încărcată cu forţele F_1, F_2,...F_n, situate toate în acelaşi plan şi presupunînd calculate reacţiunile (fig.I.24.a) pentru a determina

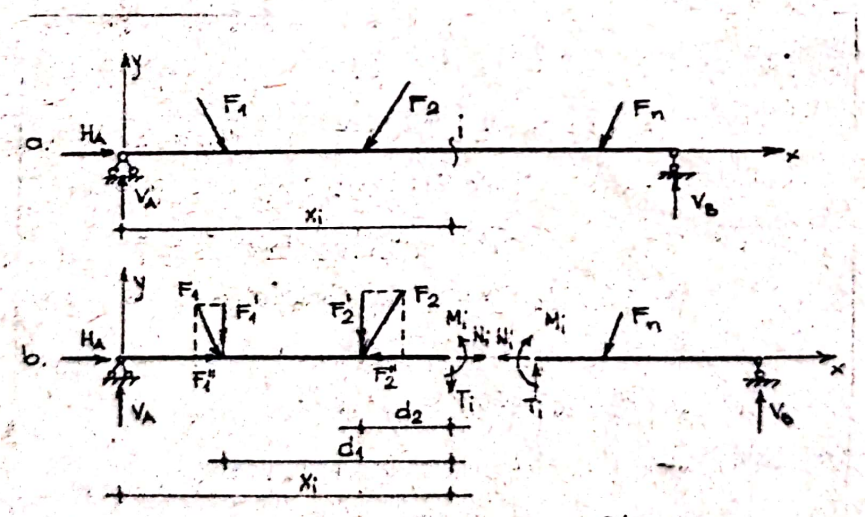


Fig. I-24

eforturile secţionale din secţiunea i (N_i, T_i, M_i), se vor scrie cele trei relaţii de echilibru ale porţiunii din stînga secţiunii, adică (fig.I.24.b):

a) $\Sigma X = 0$: $H_A + F_1'' - F_2'' + N_i = 0$ (I.4.a)

deci: $N_i = - H_A - F_1'' + F_2''$ (I.4.b)

sau, în general:

$$N_i = \sum \pm F_{(x)}^{\text{stînga(dreapta)}} \qquad (I.5)$$

relaţie care arată că forţa axială într-o secţiune se calculează ca sumă algebrică a proiecţiilor pe axa barei a tuturor forţelor (acţiuni şi reacţiuni) din stînga sau din dreapta secţiunii (s-a considerat şi a doua posibilitate, de scriere a echilibrului părţii din dreapta secţiunii, cînd se obţine de asemenea forţa axială din secţiunea i).

b) $\sum Y = 0$: $\quad V_A - F_1' - F_2' - T_i = 0 \qquad (I.6.a)$

deci:

$$T_i = V_A - F_1' - F_2' \qquad (I.6.b)$$

sau, în general:

$$T_i = \sum \pm F_{(y)}^{\text{stînga(dreapta)}} \qquad (I.7)$$

relaţie care arată că forţa tăietoare într-o secţiune se calculează ca sumă algebrică a proiecţiilor pe normala la axa barei a tuturor forţelor (acţiuni şi reacţiuni) din stînga sau din dreapta secţiunii respective.

c) $\sum M_{(i)} = 0$: $\quad V_A \cdot x_i - \sum F_k \cdot d_k - M_i = 0 \qquad (I.8.a)$

deci:

$$M_i = V_A \cdot x_i - \sum F_k \cdot d_k \qquad (I.8.b)$$

sau, în general:

$$M_i = \sum (\pm F_j \cdot d_j)^{\text{stînga(dreapta)}} \qquad (I.9)$$

relaţie care arată că momentul încovoietor într-o secţiune se calculează ca sumă algebrică a momentelor tuturor forţelor (acţiuni şi reacţiuni) din stînga sau dreapta secţiunii respective, în raport cu centrul de greutate al secţiunii.

Mai trebuie subliniat că atunci cînd se consideră forţe-

le din stînga, se obţin eforturile pe faţa din dreapta a secţiunii, iar cînd se consideră forţele din dreapta, se obţin eforturile pe faţa din stînga a secţiunii.

Pentru eforturile secţionale, se stabilesc şi o serie de reguli de semne şi anume:

a) <u>Forţele axiale</u> se consideră pozitive cînd produc întindere ("ies din secţiune") şi negative cînd produc compresiune ("intră în secţiune") (fig.I.25.a).

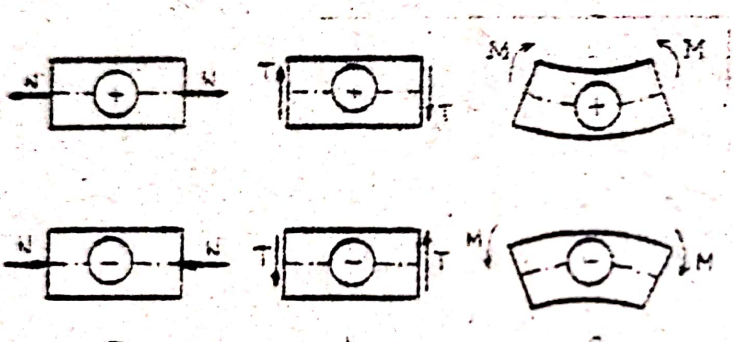


Fig.I-25

b) <u>Forţele tăietoare</u> se consideră pozitive cînd produc rotirea secţiunii în sens direct acelor de ceasornic şi negative cînd produc rotirea secţiunii în sens invers (fig.I.25.b).

c) <u>Momentele încovoietoare</u> se consideră pozitive cînd deformează elementul cu convexitatea axei în jos (fibra întinsă este în partea de jos a elementului) şi negative cînd deformează elementul cu convexitatea axei în sus (fibra întinsă a elementului este în partea de sus) (fig.I.25.c).

Pentru determinarea eforturilor secţionale maxime, necesare dimensionării elementelor structurii, se trasează grafice de variaţii a acestor eforturi în lungul barelor, grafice care se numesc "<u>diagrame de eforturi</u>". Asupra caracteristicilor acestora se va reveni mai departe.

I.7. Relaţii diferenţiale între eforturi şi încărcări la bara dreaptă.

Intre eforturile secţionale N, T, M şi încărcări există anumite relaţii diferenţiale, care servesc la stabilirea unor caracteristici ale diagramelor de eforturi şi a unor criterii de verificare a corectitudinii acestora.

Se consideră cazul unei bare drepte încărcată cu o sarcină uniform distribuită de intensitate p şi avînd direcţia înclinată, faţă de axa barei (fig.I-26.a). Izolînd din bară un element de lungime dx, acesta va fi acţionat de rezultanta pdx care se descompune într-o componentă după axa barei $p_t dx$ şi axa barei $p_n dx$. In capetele elementului acţionează eforturile N,T,M şi respectiv N + dN, T + dT, M + dM (eforturile din capătul din stînga, plus variaţiile infinit mici produse de încărcarea de pe porţiunea dx).

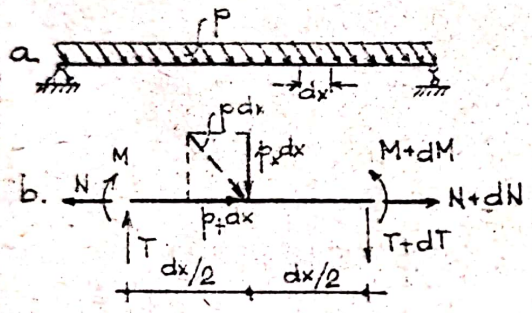


Fig. I-26

Dacă se scriu condiţiile de echilibru ale elementului izolat, se obţine:

a) $\Sigma X = 0$: $-N + N + dN + p_t dx = 0$ (I.10)

sau: $$\frac{dN}{dx} = -p_t \qquad (I.11)$$

relaţie care exprimă faptul că derivata forţei axiale dintr-o secţiune este numeric egală cu intensitatea încărcării după direcţia axei barei din secţiunea respectivă, cu semn schimbat.

b) $\Sigma Y = 0$: $T - (T + dT) - p_n dx = 0$ (I.12)

sau: $$\frac{dT}{dx} = -p_n \qquad (I.13)$$

relaţie care arată că derivata forţei tăietoare dintr-o secţiune este numeric egală cu intensitatea încărcării după direcţia normală pe axa barei, cu semn schimbat.

c) $\Sigma M_{(b)} = 0$: $M - (M + dM) + Tdx - p_n \frac{(dx)^2}{2} = 0$ (I.14)

sau; neglijînd ultimul termen:

$$\frac{dM}{dx} = T \qquad (I.15)$$

relaţie care indică faptul că derivata momentului încovoietor dintr-o secţiune este numeric egală cu valoarea forţei tăietoare din secţiunea respectivă.

In cazul particular şi foarte frecvent al încărcării distribuite de intensitate p şi normală pe axa barei (fig.I.27), rămîn două relaţii diferenţiale de forma:

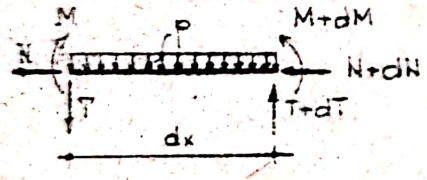


Fig. I.27

$$\frac{dT}{dx} = -p \qquad (I.16)$$

$$\frac{dM}{dx} = T \qquad (I.17)$$

I.8. Diagrame de eforturi şi caracteristicile lor.

Aşa cum s-a mai arătat, diagramele de eforturi reprezintă grafice de variaţie a eforturilor secţionale în lungul barelor.

Relaţiile diferenţiale stabilite în paragraful precedent, indică o serie de corespondenţe între încărcări şi funcţiile de variaţie a eforturilor, respectiv diagramele de eforturi corespunzătoare şi anume:

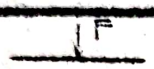
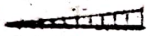
a) Combinînd relaţiile (I.16) şi (I.17), rezultă:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -p \qquad (I.18)$$

deci că funcţia de variaţie a forţei tăietoare este

cu un grad mai mare decît funcţia de variaţie a încărcării, iar funcţie de variaţie a momentului încovoietor este cu un grad mai mare decît funcţia de variaţie a forţei tăietoare. Acest lucru este sintetizat pentru încărcările obişnuite în tabelul I.1.

Tabel I-1.

Încărcare	$p(x)$	$T(x)$	$M(x)$
	0	const.	$f(x)$
	const	$f(x)$	$f(x^2)$
	$f(x)$	$f(x^2)$	$f(x^3)$
	$f(x^2)$	$f(x^3)$	$f(x^4)$

b) Relaţia (I.16) indică faptul că panta tangentei la diagrama T într-o secţiune oarecare este egală cu valoarea intensităţii încărcării în secţiunea respectivă; pe baza relaţiei (I.17) rezultă de asemenea că panta tangentei la diagrama M într-o secţiune este egală cu valoarea forţei tăietoare din secţiunea respectivă.

c) Relaţia (I.17) arată că în secţiunile în care forţa tăietoare trece prin zero, momentul încovoietor prezintă un extremum şi, pe baza relaţiei (I.18) (derivata a doua a momentului este negativă), rezultă că acest extremum este un maxim.

d) Pe baza relaţiei (I.17) rezultă că pe porţiunile pe care forţa tăietoare este pozitivă, momentul încovoietor este crescător (fig.I.28.a,b), iar pe porţiunile pe care forţa tăietoare este negativă, momentul încovoietor este descrescător (fig.I.28.c,d). Practic, trasarea unei diagrame de eforturi se face (după ce s-au determinat reacţiunile) în felul urmă-

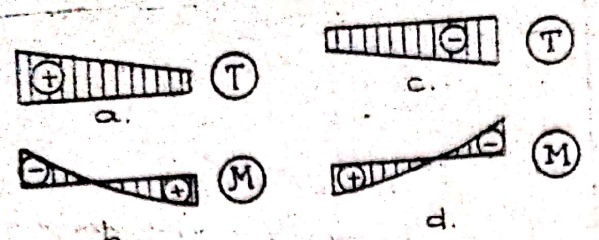


Fig.I-28

tor:

- se scrie expresia efortului pentru fiecare porţiune caracteristică a barei, stabilindu-se astfel legea de variaţie a efortului pe zona respectivă;

- se dau variabilei x valorile corespunzătoare extremităţilor porţiunii caracteristice respective pe care se determină diagrama şi, cunoscînd valorile efortului în aceste puncte, se construieşte graficul de variaţie pe tronsonul respectiv, faţă de o linie de referinţă paralelă cu axa barei şi respectînd următoarele reguli de aşezare a diagramelor:

a) <u>diagrama de momente încovoietoare</u> se dispune totdeauna pe partea fibrei întinse, ceea ce - pentru bare orizontale şi ţinînd cont de convenţia de semne stabilită anterior - conduce la aşezarea diagramelor de momente pozitive pe partea inferioară a barei şi a diagramelor de momente negative pe partea superioară a barei;

b) <u>diagramele de forţe tăietoare şi axiale</u> se aşează, convenţional, invers (cele pozitive pe partea superioară a barei, cele negative pe partea inferioară.

Pe baza celor prezentate pînă aici, mai rezultă o serie de caracteristici ale diagramelor de eforturi, în funcţie de tipul de încărcare:

1. <u>Cazul încărcării cu sarcini concentrate</u> (fig.I.29).

a) Diagrama T prezintă în acest caz o variaţie în trepte cu salturi de mărimea forţelor concentrate în dreptul acestora.

b) Diagrama M are o formă poligonală, cu vîrfuri (schim-

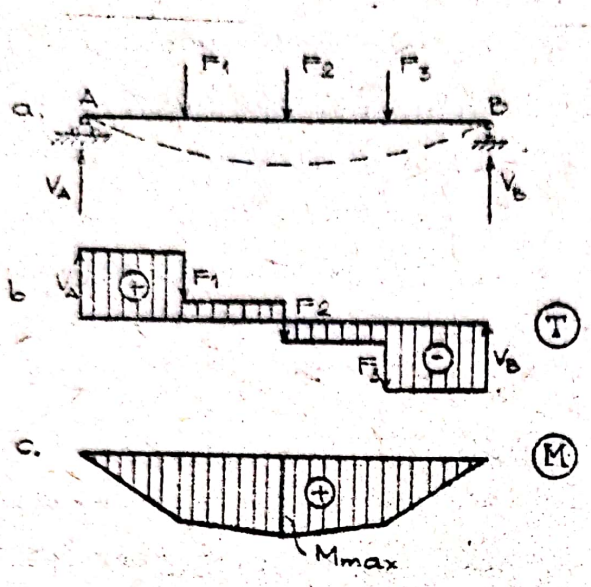


Fig. I-29

bări de pantă) în dreptul forţelor concentrate, unghiul de înclinare a fiecărei ramuri a diagramei având tangenta egală cu valoarea forţei tăietoare de pe zona respectivă:

c) momentul maxim se produce în secţiunea în care forţa tăietoare trece prin zero, deci totdeauna în dreptul unei forţe concentrate.

2. <u>Cazul sarcinilor uniform distribuite</u> (fig.I.30):

a) Pe zona cu sarcină uniform repartizată, forţa tăietoare variază liniar, cu un unghi de înclinare a cărei tangentă este egală cu valoarea cu semn schimbat a intensităţii încărcării.

b) Diagrama de momente încovoietoare are pe zona încărcată o variaţie parabolică, iar în punctele 1 şi 2, cele două variaţii liniare din stînga şi dreapta sînt tangente la parabolă.

c) Intersecţia celor două drepte din diagrama M din stînga şi dreapta parabolei, se produce în dreptul

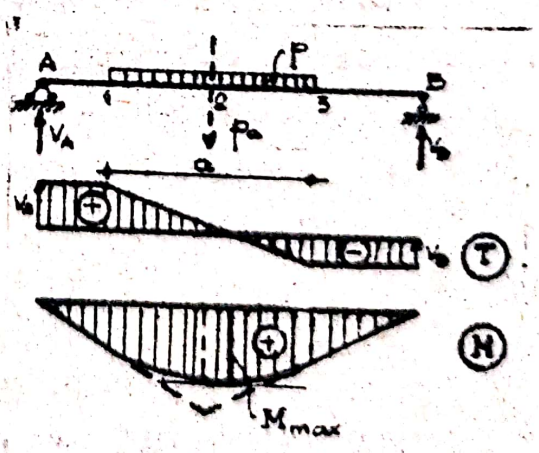


Fig. I-30

rezultantei sarcinii distribuite; aceasta deoarece dacă în locul sarcinii distribuite ar acționa o forță concentrată echivalentă (rezultanta), poligonul funicular al acesteia s-ar compune din cele două drepte, care se întîlnesc pe suportul forței.

d). Momentul maxim se produce în secțiunea de anulare a forței tăietoare și în dreptul acestei secțiuni tangenta la parabolă este orizontală.

3. <u>Cazul încărcării cu sarcini distribuite oarecare</u>. (fig.I.31).

a) Diagrama de forțe tăietoare este o curbă cu un grad mai mare decît funcția de variație a încărcării, iar diagrama de momente este o curbă cu un grad mai mare decît funcția de variație a forței tăietoare.

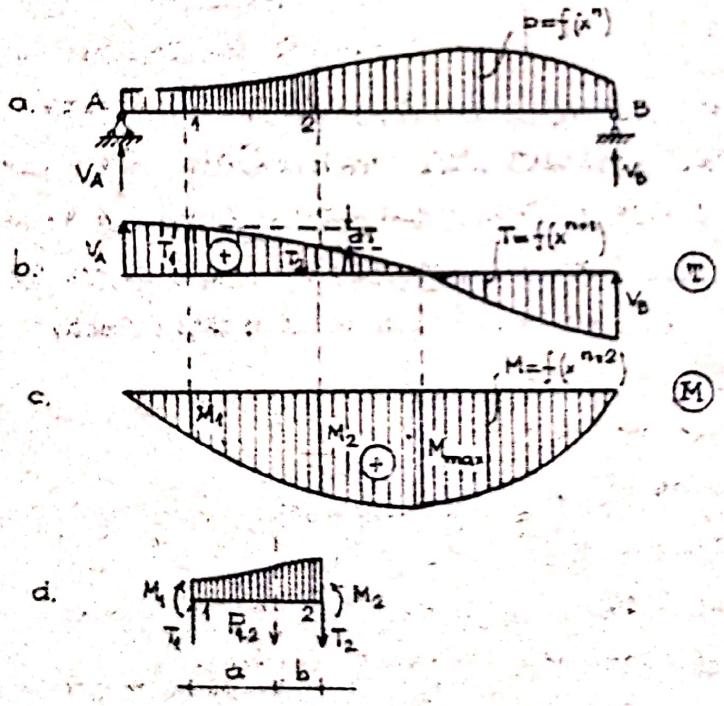


Fig. I.31

b) In fiecare secțiune, panta tangentei la diagrama de forțe tăietoare este egală cu valoarea cu semn schimbat a forței tăietoare din secțiunea respectivă, iar panta tangentei la diagrama de momente este egală cu valoarea forței tăietoare din aceeași

secţiune.

c) Izolînd o porţiune din grindă între secţiunile 1 şi 2 (fig.I.31.d) şi utilizînd relaţiile diferenţiale deduse, se pot stabili relaţii de recurenţă între eforturile din două secţiuni vecine:

$$\int_1^2 dT = T_2 - T_1 = - \int_1^2 p\,dx = - P_{1-2}$$

deci:

$$T_2 = T_1 - \int_1^2 p\,dx \qquad (I.19)$$

ceea ce arată că forţa tăietoare din secţiunea 2 este egală cu forţa tăietoare T_1 dintr-o secţiune vecină, din care se scad încărcările de pe porţiunea 1-2.

$$\int_1^2 dM = M_2 - M_1 = \int_1^2 T\,dx$$

deci:

$$M_2 = M_1 + \int_1^2 T\,dx \qquad (I.20)$$

relaţie care arată că momentul încovoietor din secţiunea 2 este egal cu momentul din secţiunea vecină 1,la care se adaugă suprafaţa diagramei de forţe tăietoare de pe porţiunea 1-2.

Dacă pentru elementul izolat se scrie condiţia de echilibru prin ecuaţia $\sum M_{(2)} = 0$, rezultă:

$$M_1 + T_1 (a + b) - P_{1-2} \cdot b - M_2 = 0$$

din care:

$$M_2 = M_1 + T_1 (a + b) - P_{1-2} \cdot b \qquad (I.21)$$

Relaţia (I.21) indică faptul că momentul din secţiunea 2 este egal cu momentul din secţiunea vecină 1, la care se adaugă (algebric) momentul forţei tăietoare din 1 şi momentul încărcării de pe zona 1-2, ambele în raport cu centrul de

greutate al secţiunii a.

În capitolele următoare se analizează modul de efectuare a calculului static (determinarea diagramelor de eforturi) pentru diferite categorii de sisteme static determinate utilizate ca elemente sau structuri de rezistenţă în construcţii, sau ca scheme de calcul pentru rezolvarea structurilor static nedeterminate.

..ooOoo..

CAPITOLUL II

GRINZI SI SISTEME STATIC DETERMINATE ALCATUITE DIN BARE DREPTE

In acest capitol este prezentat modul de determinare a eforturilor secţionale pentru următoarele categorii de sisteme static determinate:

A. Grinzi drepte static determinate:

1. Grinda simplu rezemată.
2. Grinda încastrată (consola).
3. Grinda cu console.

B. Sisteme static determinate alcătuite din bare drepte.

4. Grinzi cu console şi articulaţii (grinzi Gerber).
5. Bare cotite şi cadre static determinate.

II.1. Calculul la sarcini fixe.

II.1.1. Grinda simplu rezemată.

II.1.1.1. Rezolvarea pe cale analitică.

Se consideră grinda simplu rezemată din fig.II.1.a încărcată cu sarcini concentrate şi uniform distribuite (cazurile curente de încărcare).

a) Determinarea reacţiunilor:

$$\sum X = 0: \quad H_A - \sum_{k=1}^{n} F_k \cos \alpha_k = 0 \qquad \text{(II.1.a)}$$

de unde:

$$H_A = \sum_{k=1}^{n} F_k \cos \alpha_k \qquad \text{(II.1.b)}$$

$$\sum M_{(B)} = 0: \quad V_A \cdot \ell - \sum_{k=1}^{n} (F_k \cdot \sin \alpha_k)\, b_k \qquad \text{(II.2.a)}$$

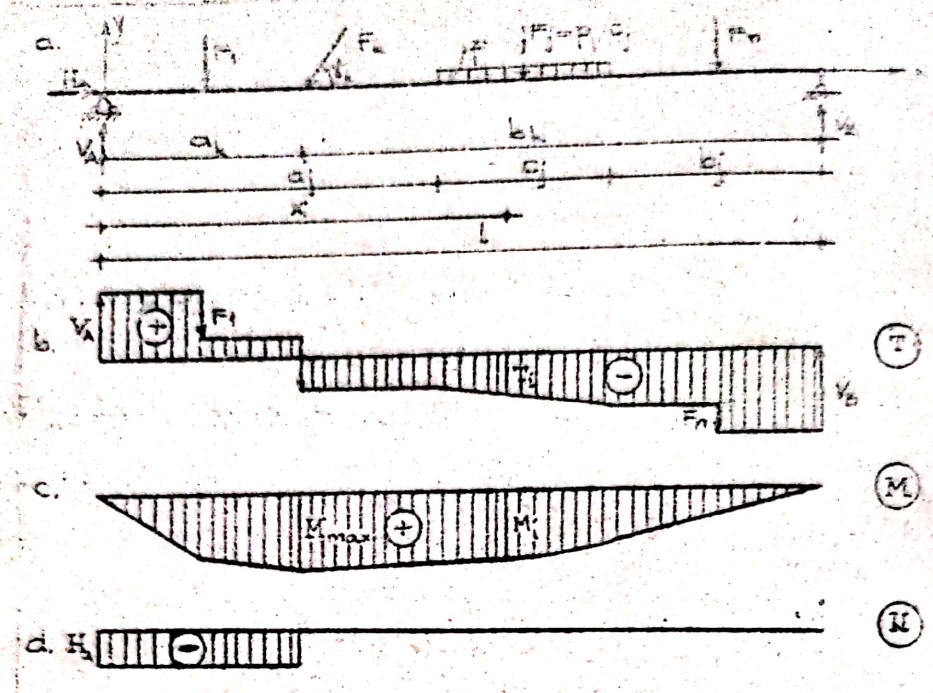


Fig. II-1

de unde: $$V_A = \frac{\sum M_{(B)}}{\ell} = \frac{\sum_{K=1}^{n} (F_k \sin \gamma_k) b_k}{\ell} \qquad \text{(II.2.b)}$$

$$\sum M_{(A)} = 0: \; V_B \cdot \ell - \sum_{K=1}^{n} (F_k \sin \gamma_k) a_k \qquad \text{(II.3.a)}$$

de unde: $$V_B = \frac{\sum M_{(A)}}{\ell} = \frac{\sum_{K=1}^{n} (F_k \sin \gamma_k) a_k}{\ell} \qquad \text{(III.3.b)}$$

<u>Observație:</u> în relațiile scrise, au fost incluse și sarcinile distribuite care se înlocuiesc cu rezultantele ($F_j = p_j c_j$), aplicate în centrele de greutate respective.

b) <u>Determinarea eforturilor</u>.

$$T_i = V_A - \sum_{A}^{i} F_k \sin \gamma_k - \sum p_j (x_i - a_j) \qquad \text{(II.4)}$$

$$M_i = V_A x_i - \sum_{A}^{i} (F_k \sin \gamma_k)(x_i - a_k) - \sum_{A}^{i} p_j \frac{(x_i - a_j)^2}{2} \qquad \text{(II.5)}$$

$$N_i = -H_A + \sum_{A}^{i} F_k \cos \gamma_k \qquad \text{(II.6)}$$

Folosind aceste relații scrise succesiv pentru toate re-

giunile distincte ale grinzii, se determină diagramele de eforturi T, M, N din fig.II.1.b,c,d,

In cazul în care pe grindă acţionează multe tipuri de încărcări, diagramele de eforturi se pot determina prin suprapunere de efecte, pentru fiecare tip de încărcare diagramele trasîndu-se mai simplu.

Se mai pot obţine de asemenea simplificări prin utilizarea proprietăţilor de simetrie ale structurii şi încărcărilor.

Astfel, pentru grinda simplu rezemată din fig.II.2.a, care este simetrică pentru sarcini verticale, încărcarea cu forţa concentrată F se poate descompune într-o încărcare simetrică (fig.II.2.b) şi una antisimetrică (fig.II.2.c).

Stiind că diagramele de eforturi prezintă în acest caz următoarele caracteristici:

- la încărcarea cu sarcini simetrice, diagramele M şi N sînt simetrice, iar diagrama T este antisimetrică;

- la încărcarea cu sarcini antisimetrice, diagramele M şi N sînt antisimetrice, iar diagrama T este simetrică, diagramele se pot determina numai pe jumătate de structură, pe cealaltă jumătate trasîndu-se pe baza acestor proprietăţi de simetrie.

Diagramele totale se determină apoi prin suprapunere de efecte.

Avantajul acestui mod de lucru care poate părea minor la exemplul simplu considerat aici, este important în cazul structurilor mai complicate şi acţionate de încărcări complexe. Utilizarea proprietăţilor de simetrie şi antisimetrie conduce la simplificări importante de exemplu în rezolvarea structurilor static nedeterminate simetrice geometric (dimensiuni), mecanic (legături) şi elastic (material şi caracteristici geometrice

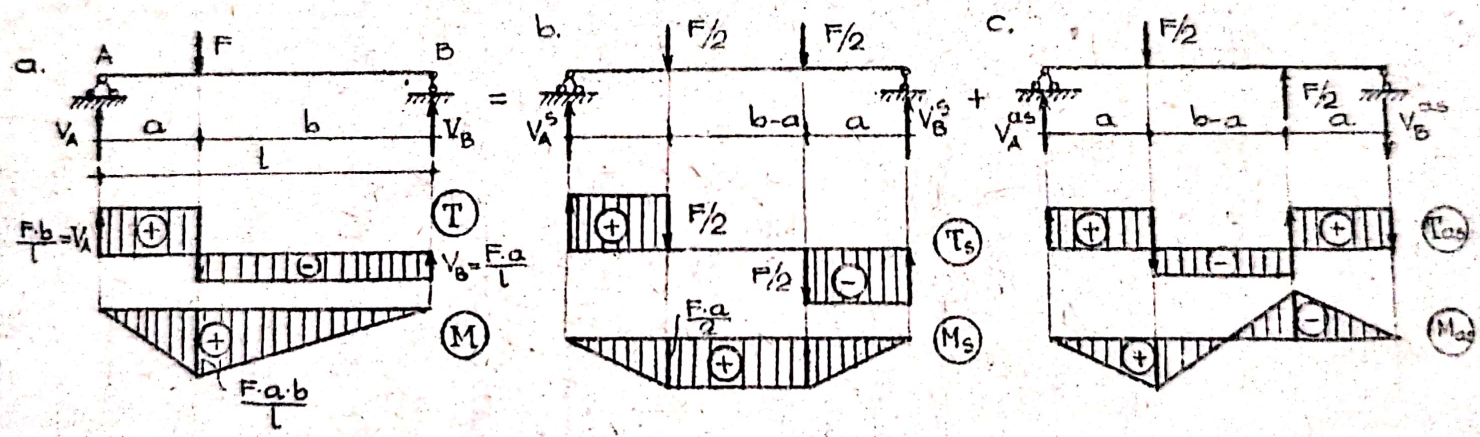

a.
A
F
B
V_A
a
b
l
V_B
T
$\frac{F \cdot b}{l} = V_A$
$V_B = \frac{F \cdot a}{l}$
M
$\frac{F \cdot a \cdot b}{l}$
=
b.
F/2
F/2
V_A^S
b-a
a
V_B^S
T_S
F/2
F/2
$\frac{F \cdot a}{2}$
M_S
+
c.
F/2
V_A^{as}
a
b-a
F/2
a
V_B^{as}
T_{as}
M_{as}

Fig II·2

ale secţiunilor).

In anumite cazuri pot apare ca încărcări momente încovoietoare (cazul stîlpilor de hale industriale, avînd consolele pe care se reazemă grinzile de rulare ale podurilor rulante) sau momente încovoietoare distribuite (cazul grinzilor pe care se reazemă elemente transversale aşezate la mică distanţă şi supuse la torsiune).

Se consideră pentru exemplificare grinda din fig.II.3, acţionată de momentele M_o şi $2M_o$.

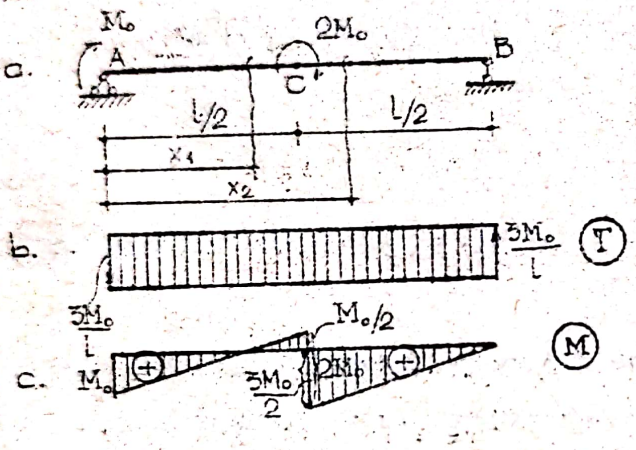


Fig. II-3

a) <u>Determinarea reacţiunilor</u>. Reacţiunile V_A şi V_B vor trebui să formeze un cuplu al cărui moment să echilibreze rezultanta momentelor exterioare. Scriind echilibrul celor două cupluri (acţiuni şi reacţiuni), se determină mărimile reacţiunilor:

$$M_o + 2M_o = V_A \cdot \ell \qquad \text{(II.7.a)}$$

de unde:

$$V_A = \frac{3M_o}{\ell} = V_B \qquad \text{(II.7.b)}$$

Desigur, ecuaţiile de echilibru se pot scrie şi sub forma $\Sigma M_{(A)} = 0$, respectiv $\Sigma M_{(B)} = 0$.

b) <u>Determinarea diagramelor de eforturi</u>.

- Forţe tăietoare:

$$T(x_1) = T(x_2) = V_A = \frac{3M_o}{\ell} \qquad \text{(II.8)}$$

(forţă tăietoare constantă pe toată grinda)

- Momente încovoietoare:

$$M(x_1) = M_0 - V_A \cdot x_1 = M_0 - \frac{3M_0}{\ell} \cdot x_1 \qquad \text{(II.9)}$$

$$x_1 = 0: \quad M_A = M_0$$

$$x_1 = \frac{\ell}{2}: \quad M_C^{st} = -\frac{M_0}{2}$$

$$M(x_2) = M_0 - V_A \cdot x_2 + 2M_0 = 3M_0 - \frac{3M_0}{\ell} \cdot x_2 \qquad \text{(II.10)}$$

$$x_2 = \frac{\ell}{2}: \quad M_C^{dr} = \frac{3M_0}{2}$$

$$x_2 = \ell: \quad M_B = 0$$

În legătură cu acest caz de încărcare, sînt de reţinut următoarele:

- întrucît forţa tăietoare este constantă, panta diagramei de moment trebuie să fie aceeaşi în tot lungul grinzii, deci cele două drepte care alcătuiesc diagrama de momente sînt paralele între ele;

- în dreptul momentelor concentrate, în diagrama de moment se produc salturi egale cu valoarea momentelor respective (secţiunea C).

Dacă grinda este încărcată cu un moment încovoietor uniform distribuit de intensitate m (fig.II.4), reacţiunile se determină astfel:

$$\Sigma M_{(B)} = 0: \quad -V_A \cdot \ell + m \cdot \ell = 0 \qquad \text{(II.11.a)}$$

deci:

$$V_A = m = V_B \qquad \text{(II.11.b)}$$

Diagramele de eforturi:

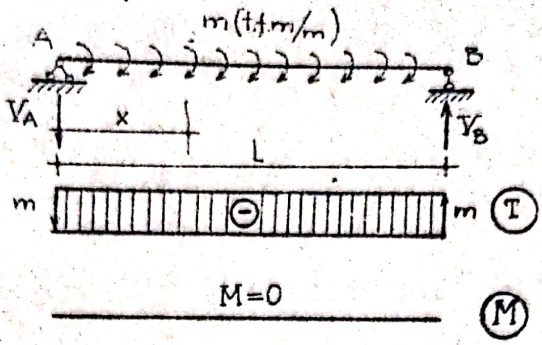


Fig. II-4

$$T(x) = V_A = m \qquad \text{(II.12)}$$

$$M(x) = V_A x - mx = 0 \qquad \text{(II.13)}$$

Deci, în acest caz, forţa tăietoare este constantă şi egală cu intensitatea momentului distribuit, iar momentul încovoietor este egal cu zero în tot lungul grinzii.

<u>Grinzi cu reazeme simple înclinate, grinzi înclinate.</u>

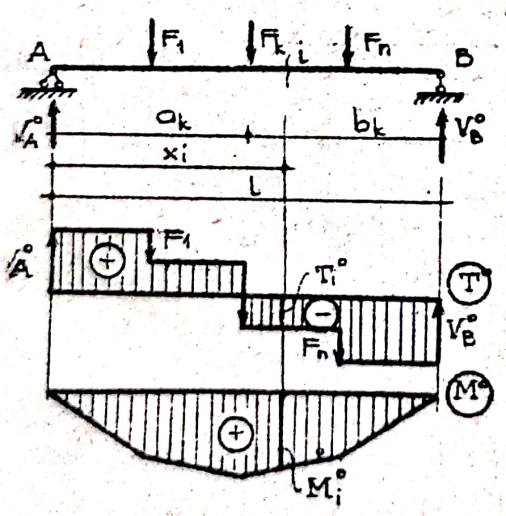


Fig. II-5

Se analizează modul de determinare a reacţiunilor şi eforturilor în cazul grinzilor cu reazeme simple înclinate şi al grinzilor înclinate, comparîndu-se cu cele de la grinda orizontală cu reazemul simplu vertical. Pentru această grindă, încărcată cu sarcini verticale (fig.II.5):

$$V_A^o = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k b_k}{\ell} \qquad \text{(II.14)}$$

$$V_B^o = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k a_k}{\ell} \qquad (II.15)$$

$$H_A^o = 0 \qquad (II.16)$$

$$T_i^o = V_A^o - \sum_{k=1}^{i} F_k \qquad (II.17)$$

$$M_i^o = V_A^o \cdot x_i - \sum_{k=1}^{i} F_k (x_i - a_k) \qquad (II.18)$$

$$N_i^o = 0 \qquad (II.19)$$

Se consideră următoarele cazuri.

a) <u>Grinda orizontală cu reazemul simplu înclinat</u> (fig. II.6.b).

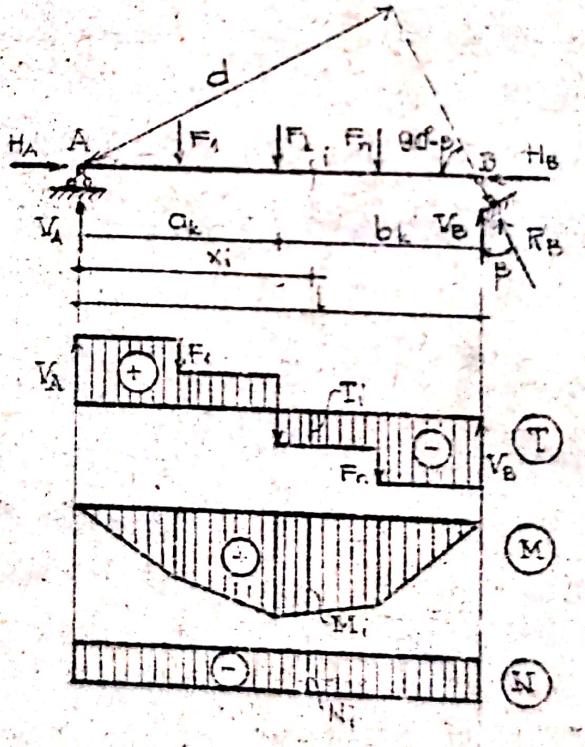


Fig II-6.

<u>Reacțiuni</u>

$$R_B = \frac{\Sigma M_{(A)}}{\ell} = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k a_k}{d} = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k a_k}{\ell \cdot \cos\beta} \qquad (II.20)$$

Această reacţiune se descompune în:

$$H_B = R_B \sin\beta = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k a_k}{\ell} \operatorname{tg}\beta \qquad (II.21)$$

$$V_B = R_B \cos\beta = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k . a_k}{\ell} = V_B^0 \qquad (II.22)$$

Din ecuaţia de proiecţie pe orizontală:

$$\Sigma X = 0: \quad H_A - H_B = 0 \qquad (II.23)$$

$$H_A = H_B = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k a_k}{\ell} \operatorname{tg}\beta \qquad (II.24)$$

$$\Sigma M_{(B)} = 0: \quad V_A = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k b_k}{\ell} = V_A^0 \qquad (II.25)$$

Eforturi:

$$T_i = V_A - \sum_{A}^{i} F_k = T_i^0 \qquad (II.26)$$

$$M_i = V_A x_i - \sum_{A}^{i} F_k (x_i - a_k) = M_i^0 \qquad (II.27)$$

$$N_i = - H_A \qquad (II.28)$$

Deci, în acest caz, diagramele T şi M sînt aceleaşi ca la grinda cu reazemul simplu vertical, dar apare în plus forţa axială.

b) Grinda înclinată, cu reazemul simplu vertical (fig. II.7).

Reacţiuni:

$$\Sigma M_{(B)} = 0: \quad V_A = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k b_k}{\ell} = V_A^0 \qquad (II.29)$$

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \quad V_B = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k a_k}{\ell} = V_B^0 \qquad (II.30)$$

$$\Sigma X = 0: \quad H_A = 0 \qquad (II.31)$$

Eforturi:

$$T_i = (V_A - \sum_{A}^{i} F_k) \cos\alpha = T_i^0 \cos\alpha < T_i^0 \qquad (II.32)$$

$$M_i = V_A \cdot x_i - \sum_1^i F_k (x_i - a_k) = M_i^0 \qquad (II.33)$$

$$N_i = -(V_A - \sum_1^i F_k) \sin\alpha = -T_i^0 \sin\alpha$$

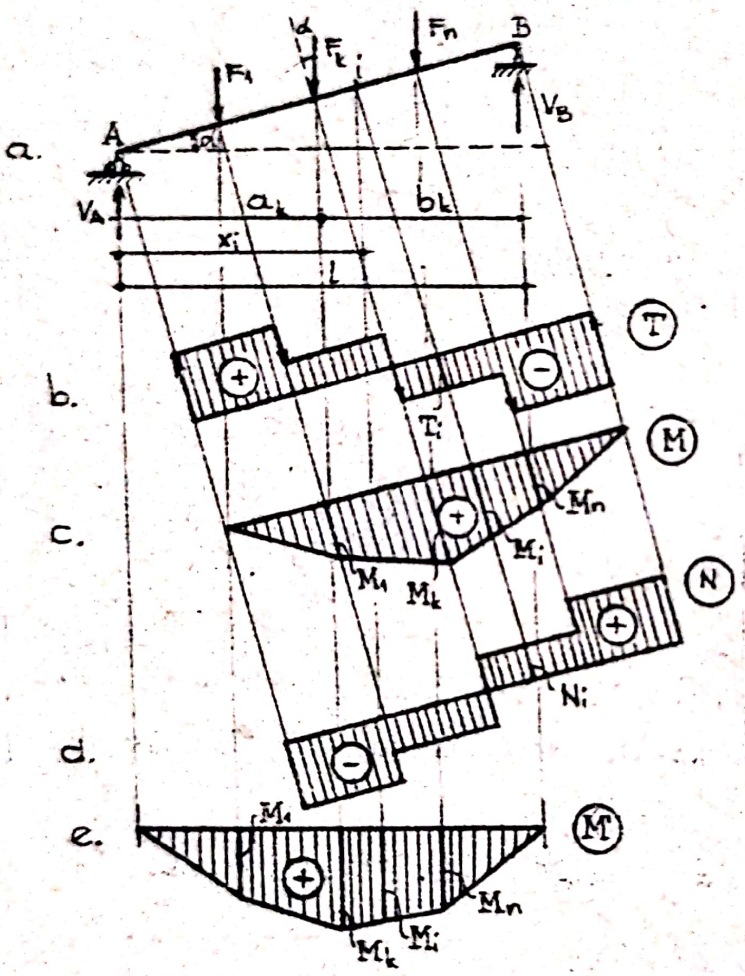


Fig. II-7

Prin urmare, în comparaţie cu grinda orizontală cu reazemul simplu vertical, forţele tăietoare sînt în acest caz mai mici, momentele încovoietoare sînt aceleaşi şi apare în plus forţa axială care are o variaţie în trepte.

Diagrama M se poate reprezenta fie faţă de o linie de referinţă paralelă cu axa barei(fig. II.7.c), fie faţă de o linie de referinţă orizontală (fig.II.7.e).

In al doilea caz, ordonatele din diagramă sînt cele reale, dar aria diagramei este mai mică decît cea reală.

c) <u>Grinda înclinată cu reazemul simplu înclinat</u> (fig. II.8).

<u>Reacţiuni</u>:

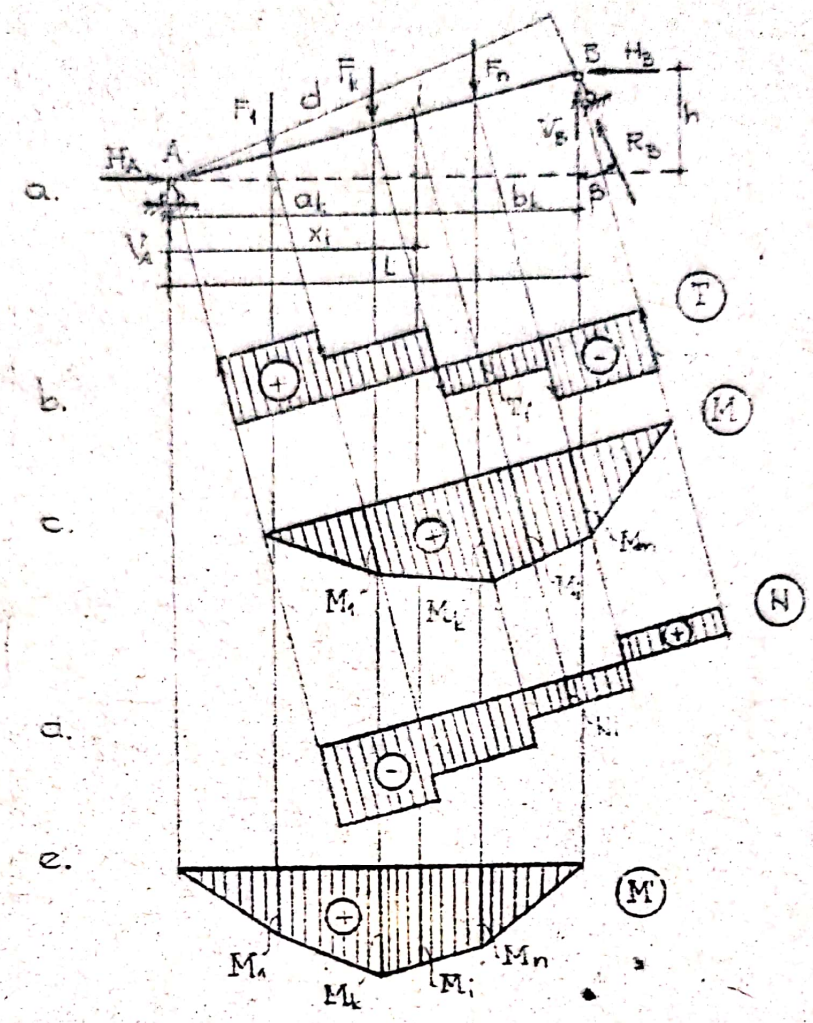


Fig. II-8

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \quad R_B = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k a_k}{\ell} = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k a_k}{\ell \cos(\beta - \alpha)} \cos\alpha \qquad \text{(II.35)}$$

Această reacțiune se descompune în:

$$H_B = R_B \sin\beta \qquad \text{(II.36)}$$

$$V_B = R_B \cos\beta \qquad \text{(II.37)}$$

Din ecuația de proiecție pe orizontală:

$$\Sigma X = 0: \quad H_A - H_B = 0 \qquad \text{(II.38)}$$

$$H_A = H_B = R_B \sin \beta \qquad (II.39)$$

$$\sum M_{(B)} = 0: V_A \cdot \ell - \sum_{k=1}^{n} F_k \cdot b_k - H_A \cdot h = 0 \qquad (II.40)$$

de unde:

$$V_A = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k b_k}{\ell} - H_A \frac{h}{\ell} = V_A^0 + H_A \operatorname{tg} \alpha \qquad (II.41)$$

Eforturi:

- Forțe tăietoare:

$$T_i = V_A \cos\alpha - H_A \sin\alpha - \sum_{A}^{i} F_k \cos\alpha = (V^0 + H_A \operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha - H_A \sin\alpha - \sum_{A}^{i} F_k \cos\alpha \qquad (II.42.a)$$

deci:

$$T_i = (V_A^0 - \sum_{A}^{i} F_k) \cos\alpha = T_i^0 \cos\alpha < T_i^0 \qquad (II.42.b)$$

- Momente încovoietoare:

$$M_i = V_A \cdot x_i - \sum F_k (x_i - a_k) - H_A y_i = (V_A^0 + H_A \operatorname{tg}\alpha) x_i - \sum_{A}^{i} F_k (x_i - a_k) - H_A y_i \qquad (II.43.a)$$

sau, înlocuind $x_i \operatorname{tg}\alpha = y_i$, rezultă:

$$M_i = V_A^0 x_i + H_A y_i - \sum_{A}^{i} F_k (x_i - a_k) - H_A y_i = V_A^0 \cdot x_i - \sum_{A}^{i} F_k (x_i - a_k) = M_i^0 \qquad (II.43.b)$$

- Forțe axiale:

$$N_i = -V_A \sin\alpha - H_A \cos\alpha + \sum_{A}^{i} F_k \sin\alpha = -(V_A - \sum_{A}^{i} F_k)\sin\alpha - H_A \cos\alpha \qquad (II.44)$$

Deci și în acest caz forțele tăietoare sînt mai mici decît la grinda orizontală cu reazemul simplu vertical, momentele încovoietoare sînt aceleași și apare în plus forța axială care variază în trepte.

Diagrama de momente, se poate reprezenta de asemenea fie

față de o linie de referință paralelă cu axa barei (fig.II.8.c) fie față de o linie de referință orizontală (fig.II.8.e), cînd aria diagramei este mai mică decît cea reală.

In concluzie:

- în toate cele trei cazuri analizate, momentele încovoietoare sînt aceleași ca la grinda orizontală cu reazemul simplu vertical;

- la grinzile înclinate (cazurile b și c) forțele tăietoare sînt mai mici decît la grinda orizontală cu reazemul simplu vertical ($T_i = T_i^0 \cos\alpha$)

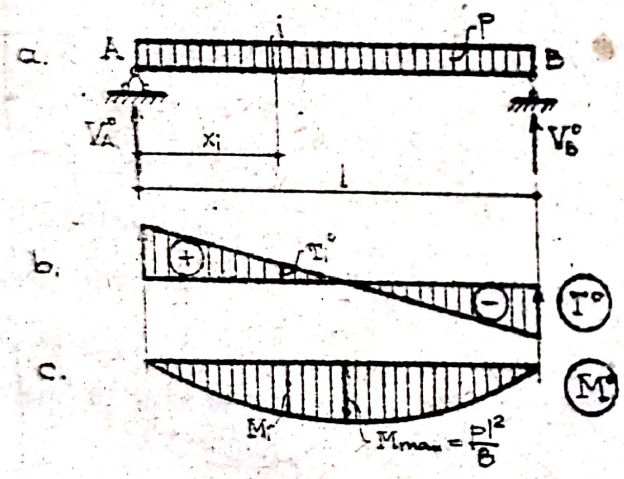


Fig. II-9

- în toate cele trei cazuri, apar ca eforturi suplimentare forțele axiale.

Dacă încărcarea este o sarcină uniform distribuită, se ia drept element de comparație grinda orizontală din fig. II.9, la care reacțiunile și eforturile într-o secțiune oarecare sînt următoarele:

$$V_A^0 = V_B^0 = \frac{pl}{2} \qquad \text{(II.45)}$$

$$T_i = V_A^0 - px_i \qquad \text{(II.46)}$$

$$M_i^0 = V_A^0 - \frac{px_i^2}{2} \qquad \text{(II.47)}$$

Se consideră următoarele cazuri de grinzi înclinate în-

întîlnite curent în practică:

a) <u>Grindă înclinată încărcată cu sarcină uniform distribuită pe orizontală</u> (fig.II.10).

Considerînd încărcarea de intensitate p, rezultă:

$$V_A = V_A^0 = \frac{p'l}{2} = \frac{pl}{2} \qquad (II.48)$$

$$V_B = V_B^0 = \frac{p'l}{2} = \frac{pl}{2} \qquad (II.49)$$

$$T_i = (V_A - px_i)\cos\alpha = T_i^0 \cos\alpha \qquad (II.50)$$

$$M_i = V_A x_i = \frac{px_i^2}{2} = M_i^0 \qquad (II.51)$$

$$N_i = (-V_A + px_i)\sin\alpha = -T_i^0 \sin\alpha \qquad (II.52)$$

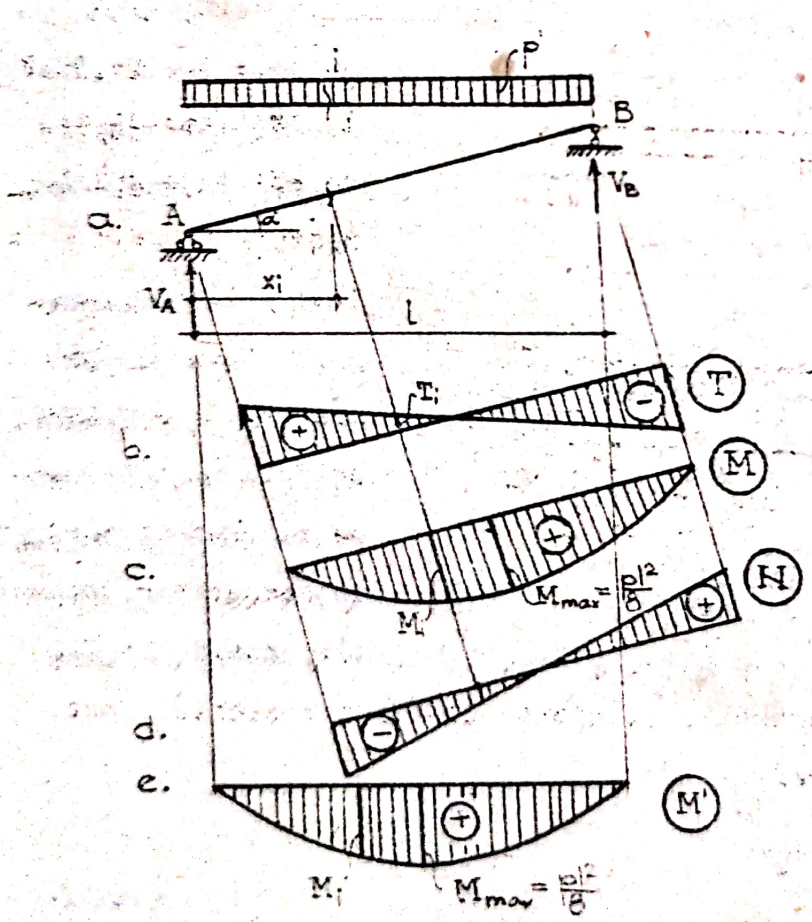


Fig. II-10

Diagrama M se poate reprezenta față de o linie de referință paralelă cu axa barei, sau față de o linie de referință orizontală.

b) <u>Grindă înclinată încărcată cu sarcină uniform distribuită pe lungimea barei</u> (fig.II.11).

Notînd cu p' intensitatea sarcinii uniform distribuite pe unita-

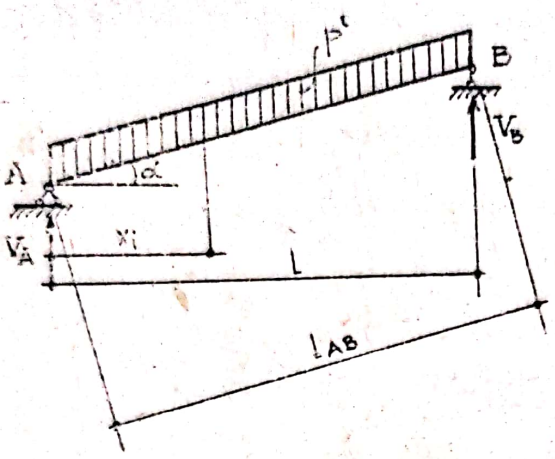


Fig. II-11

te de lungime înclinată, reacţiunile şi eforturile se pot scrie în funcţie de cele din cazul din fig.II.9, dacă se consideră o sarcină uniform distribuită pe orizontală de intensitate

$$p = p'/\cos\alpha .$$

In această situaţie:

$$V_A = \frac{p' l_{AB}}{2} = \frac{p\cos\alpha \cdot l/\cos\alpha}{2} = \frac{pl}{2} = V_A^0 \qquad (II.53)$$

$$V_B = \frac{p' l_{AB}}{2} = \frac{pl}{2} = V_B^0 \qquad (II.54)$$

$$T_i = (V_A - px_i)\cos\alpha = T_i^0 \cos\alpha \qquad (II.55)$$

$$M_i = V_A x_i - \frac{px_i^2}{2} = M_i^0 \qquad (II.56)$$

$$N_i = (-V_A + px_i)\sin\alpha = -T_i^0 \sin\alpha \qquad (II.57)$$

diagramele fiind similare cu cele din fig.II.10.

a) <u>Grinda înclinată, încărcată cu sarcină uniform distribuită normală pe axa barei de intensitate p' pe unitate de lungime înclinată a barei</u> (fig.II.12).

In acest caz, dacă se ia ca intensitate a încărcării $p = p'/\cos^2\alpha$, reacţiunile şi eforturile se scriu în funcţie de cele ale grinzii din fig.II.9 şi anume:

$$V_A = \frac{pl}{2} = V_A^0 \qquad (II.58)$$

$$V_B = \frac{pl}{2} = V_B^0 \qquad (II.59)$$

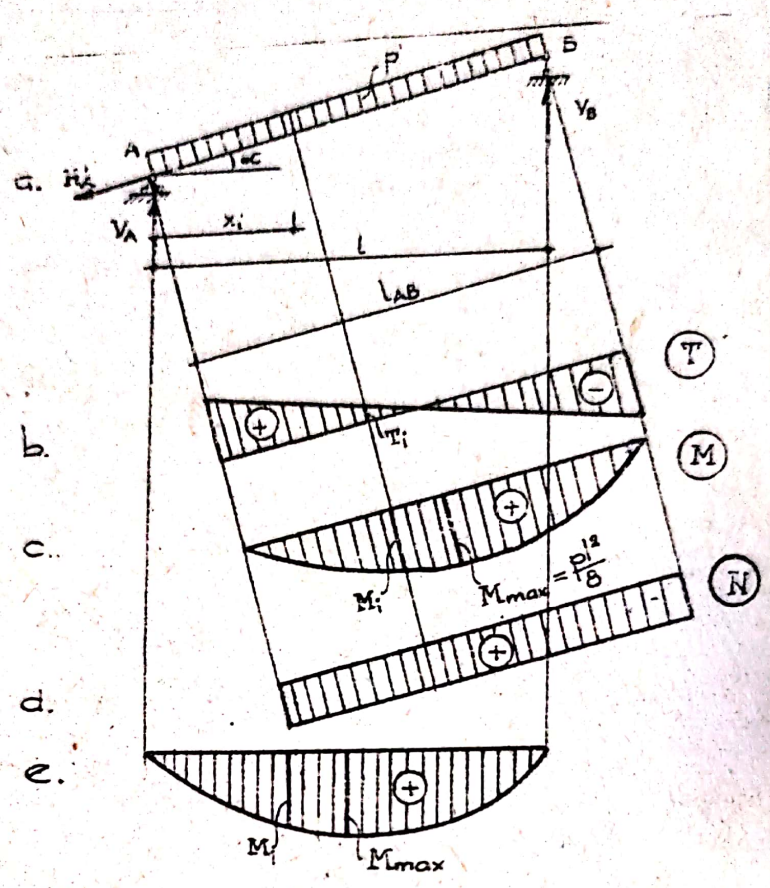


Fig. II-12

Apare şi o componentă H'_A, egală cu $H'_A = p' \ell_{AB} \operatorname{tg}\alpha$ (II.60)

Eforturile într-o secţiune oarecare vor avea expresiile:

$$T_i = \left(\frac{pl}{2} - px_i\right)\cos\alpha = T_i^0 \cos\alpha \qquad \text{(II.61)}$$

$$M_i = V_A x_i - \frac{px_i^2}{2} = M_i^0 \qquad \text{(II.62)}$$

$$N_i = -V_A \sin\alpha + H'_A = -V_A \sin\alpha + p' \ell_{AB} \operatorname{tg}\alpha =$$

$$= -\frac{pl}{2}\sin\alpha + p\cos^2\alpha \frac{\ell}{\cos\alpha} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \left(-\frac{pl}{2} + pl\right)\sin\alpha \qquad \text{(II.63.a)}$$

deci:

$$N_i = \frac{pl}{2}\sin\alpha \qquad \text{(II.53.b)}$$

In concluzie, în toate cele trei cazuri de grinzi înclinate considerate, reacţiunile şi eforturile se pot determina în funcţie de reacţiunile şi eforturile de la grinda orizontală, dacă se ia drept intensitate a încărcării:

$p = p'$ în cazul a;

$p = p/\cos\alpha$ în cazul b;

$p = p/\cos^2\alpha$ în cazul c;

Cu aceste intensităţi ale încărcărilor:

$$\begin{aligned} V_A &= V_A^0 \\ V_A &= V_B^0 \\ T_i &= T_i^0 \cos\alpha \\ M_i &= M_i^0 \end{aligned} \qquad \text{(II.64)}$$

şi apar şi eforturile axiale deduse pentru fiecare caz în parte.

II.1.1.2. <u>Rezolvarea pe cale grafică</u>.

Pentru determinarea reacţiunilor şi eforturilor pe cale grafică, se utilizează poligonul de forţe şi poligonul funicular.

Înainte de a analiza modul de lucru pentru grinda simplu rezemată se discută <u>determinarea pe cale grafică a momentului unui sistem de forţe plane în raport cu un punct din planul forţelor</u>.

Se consideră un sistem oarecare de forţe plane (fig.II.13), a căror rezultantă se determină în poligonul de forţe(ca mărime, direcţie şi sens) şi are ca suport dreapta care trece prin punctul de intersecţie a laturilor extreme ale poligonului funicular.

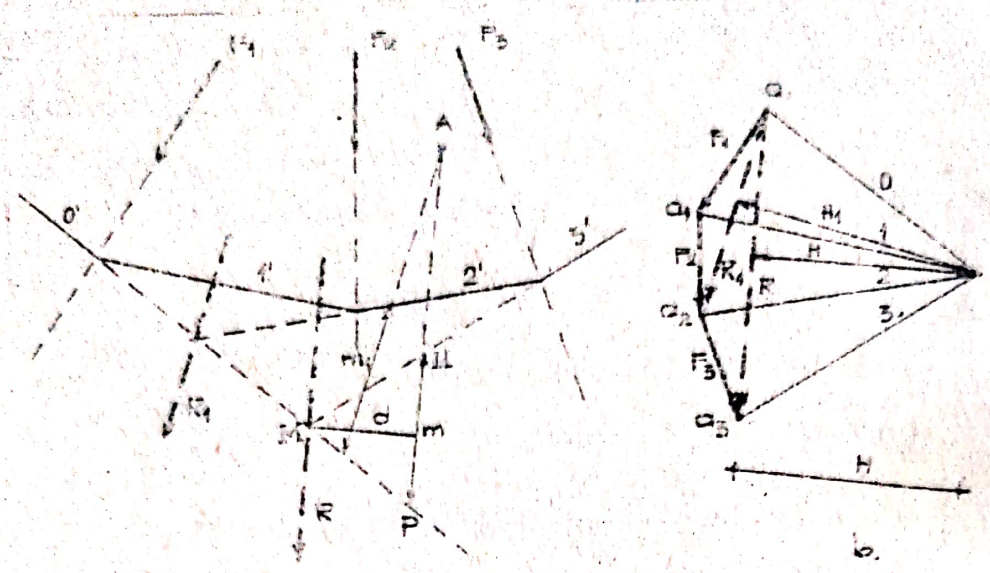


Fig. II-13

Momentul celor trei forţe în raport cu punctul A, se determină analitic astfel:

$$M_A = \sum F_i \cdot d_i = R \cdot d \qquad (II.65)$$

Ducînd prin punctul A o paralelă la rezultanta R a sistemului de forţe, se formează triunghiul MNP care este asemenea cu triunghiul $a_0 O a_3$ din poligonul de forţe şi deci se poate scrie:

$$\frac{m}{d} = \frac{R}{H} \quad \text{sau:} \quad Rd = H \cdot m = M_A \qquad (II.66)$$

Ultima egalitate arată că momentul unui sistem de forţe în raport cu un punct se determină ca produs între distanţa polară (perpendiculara dusă din polul poligonului de forţe pe direcţia rezultantei) şi segmentul m cuprins între prima şi ultima latură ale poligonului funicular pe o paralelă la rezultantă dusă prin punctul A faţă de care se determină momentul.

Dacă se consideră de exemplu momentul numai al forţelor F_1 şi F_2 faţă de acelaşi punct A, acesta este (fig.II.13):

$$M'_A = H_1 \cdot m_1 \qquad (II.67)$$

H_1 măsurîndu-se pe perpendiculara dusă din polul O pe direcţia rezultantei R_1 a forţelor F_1 şi F_2, iar m_1 fiind segmentul măsurat între laturile o'şi 2'ale poligonului funicular, pe o paralelă dusă la R_1 prin punctul A.

Ca la orice construcţie de statică grafică, este necesar să precizăm scările cu care se lucrează. Dacă se aleg următoarele scări:

$\frac{l}{n}$ = scara lungimilor

$\frac{l}{f}$ = scara forţelor

distanţa polară H se va măsura la scara forţelor, (la care se măsoară forţele F_1) iar segmentul m la scara lungimilor (la care se măsoară şi dimensiunile geometrice ale grinzilor), adică momentul va fi egal cu:

$$M = H.f.m.n \qquad (II.68.a)$$

In cazul forţelor paralele, cînd H este acelaşi pentru orice număr de forţe considerate, produsul H.f.n care o valoare constantă şi reprezintă scara momentelor. Momentele se determină deci ca produs între segmentele m şi această constantă:

$$M = m\ (H.f.n) \qquad (II.68.b)$$

Forţele tăietoare se măsoară, evident, la scara forţelor.

Se consideră acum următoarele ipoteze curente de încărcare ale grinzii simplu rezemate:

a) <u>Grindă simplu rezemată încărcată cu sarcini concentrate verticale</u> (fig.II.14).

In acest caz, pentru determinarea reacţiunilor se construieşte un poligon de forţe cu o distanţă polară oarecare H.

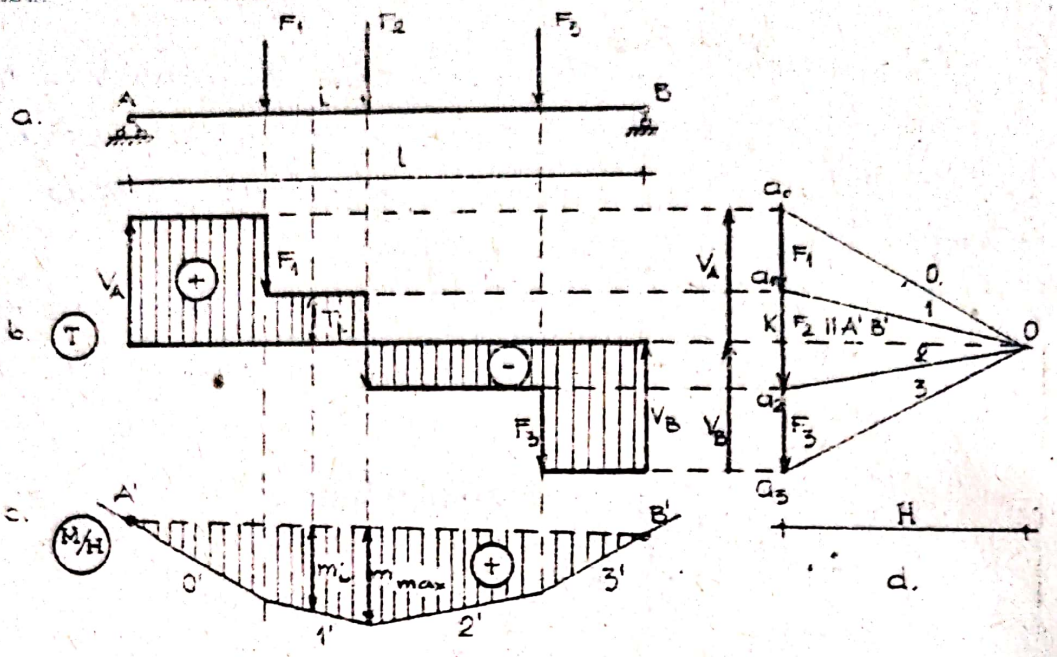


Fig. II - 14

Se construieşte apoi poligonul funicular din fig.II.14,c, ducînd paralele la razele polare 0, 1, 2, 3 şi se duce linia de închidere A'B' prin punctele de intersecţie ale verticalelor din reazemele grinzii cu prima şi respectiv ultima latură a poligonului funicular. De notat că în cazul forţelor înclinate, latura 0'se duce chiar prin articulaţia A, punctul de aplicaţie al reacţiunii R_A, deci linia de închidere se va obţine unind acest punct cu punctul de intersecţie a verticalei reazemului simplu cu ultima latură a poligonului funicular.

Ducînd din polul O o paralelă la linia de închidere a poligonului funicular, se delimitează cele două reacţiuni V_A şi V_B, pe baza corespondenţei dintre poligonul funicular şi poligonul de forţe, cunoscută din Mecanică: unui punct din poligonul funicular (punctul A'în care se intersectează linia de închidere A'B', latura 0'şi reacţiunea V_A), îi corespunde un triunghi în poligonul de forţe (triunghiul Oa_0K , în care K O corespunde liniei de închidere, a_0O laturii 0; deci a_0K trebuie

să fie V_A). Acelaşi raţionament pentru V_B.

Odată determinate reacţiunile, diagrama de forţe tăietoare se trasează direct, prin translarea reacţiunilor şi forţelor F_i în diagramă (fig.II.14.b).

Pentru determinarea momentelor încovoietoare, segmentele m se vor măsura între prima latură a poligonului funicular (linia de închidere, deoarece prima forţă din stînga oricărei secţiuni este reacţiunea V_A) şi latura corespunzătoare de pe verticala secţiunii, care reprezintă ultima latură de poligon funicular pentru forţele din stînga secţiunii. Aceste segmente se măsoară pe verticală, deoarece rezultanta din fiecare secţiune are această direcţie. Multiplicînd aceste segmente cu distanţa polară H şi cu numitorii n şi f ai scării lungimilor şi respectiv forţelor, se obţin momentele încovoietoare. Deci, poligonul funicular trasat reprezintă de fapt diagrama de momente împărţită la distanţa polară H. (fig.II.14.c).

b) <u>Grinda simplu rezemată încărcată cu sarcini distribuite verticale</u> (fig.II.15).

In acest caz, se înlocuieşte într-o primă aproximaţie sarcina distribuită cu un număr de forţe concentrate echivalente, aplicate în centrele de greutate ale suprafeţelor respective (trapeze, dreptunghiuri, triunghiuri).

Fiecare forţă concentrată echivalentă P_i are mărimea rezultantei porţiunii de sarcină distribuită pe care o înlocuieşte.

Cu aceste forţe concentrate se determină reacţiunile şi se trasează diagramele T şi M/H punctate, după procedeul prezentat în cazul precedent.

Apoi, se corectează aceste diagrame, păstrînd ordonatele din dreptul rosturilor de separaţie a tronsoanelor în care a

fost divizată sarcina distribuită (A, a, b, c, d, B). In aceste secțiuni eforturile sînt aceleași atît pentru încărcarea cu sarcină reală, cît și pentru încărcarea cu sarcinile echivalente concentrate. Intr-adevăr, dacă se scrie de exemplu forța tăietoare într-o secțiune oarecare x_i:

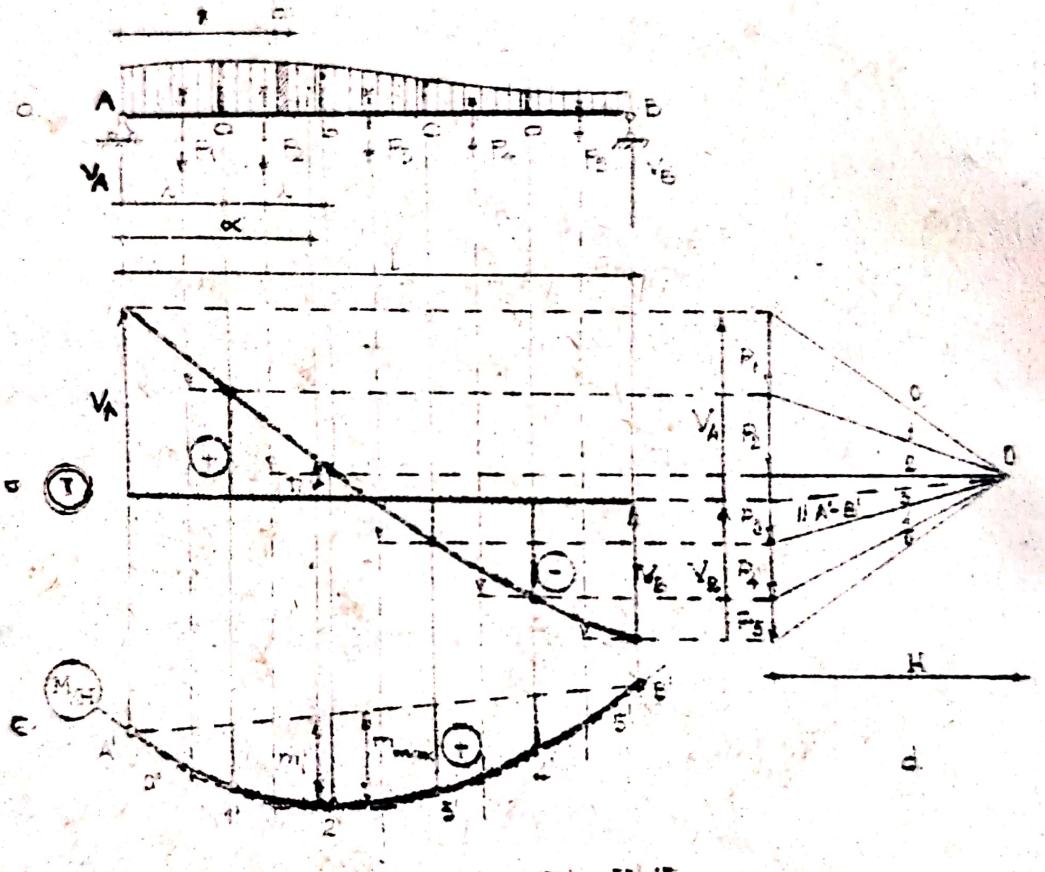


Fig. II-15

- cu încărcare reală distribuită:

$$T_i' = V_A - \int_0^{x_i} p(t)dt \qquad (II.69.a)$$

- cu sarcinile concentrate:

$$T_1'' = V_A - P_1 - P_2 = V_A - \int_0^{2\lambda} p(t)dt \qquad (II.69.b)$$

și deoarece $x_i > 2\lambda$, rezultă că:

$$T''_i \neq T_i' \qquad (II.70)$$

In schimb, în dreptul rostului b:

- cu sarcina reală distribuită:

$$T_b' = V_A - \int_0^{2\lambda} p(t)dt \qquad \text{(II.71.a)}$$

- cu sarcinile concentrate:

$$T_b'' = V_A - P_1 - P_2 = V_A - \int_0^{2\lambda} p(t)dt \qquad \text{(II.71.b)}$$

deci: $T_b'' = T_b'$ (II.72)

În mod similar se arată că în dreptul rosturilor și momentele încovoietoare sînt aceleași în cele două ipoteze de încărcare, ceea ce justifică deci corecțiile făcute.

II.1.2. Grinda încastrată (consola)

II.1.2.1. Rezolvare pe cale analitică.

Se consideră cazul unei grinzi încastrate, încărcată concomitent cu sarcini concentrate și distribuite (fig.II.16).

a) Determinarea reacțiunilor:

$$\Sigma X = 0: \; H_B - \sum_{k=1}^{n} F_k \cos\delta_k = 0 \qquad \text{(II.73.a)}$$

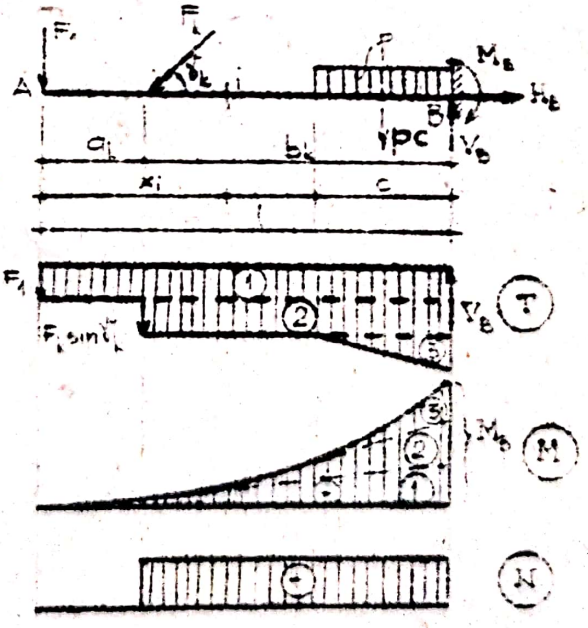


Fig. II-16

deci:

$$H_B = \sum_{k=1}^{n} F_k \cos \gamma_k \qquad \text{(II.73.b)}$$

$$\Sigma Y = 0: \; V_B - \sum_{k=1}^{n} F_k \cdot \sin \gamma_k = 0 \qquad \text{(II.74.a)}$$

deci:

$$V_B = \sum_{k=1}^{n} F_k \cdot \sin \gamma_k \qquad \text{(II.74.b)}$$

$$\Sigma M_{(B)} = 0:$$

$$M_B + \sum_{k=1}^{n} F_k \, b_k = 0 \qquad \text{(II.75.a)}$$

deci:

$$M_B = \sum_{k=1}^{n} F_k \, b_k \qquad \text{(II.75.b)}$$

Observație: sarcinile distribuite se consideră prin rezultantele lor.

b) Determinarea eforturilor:

$$T_i = - \sum_{A}^{i} F_k \cdot \sin \gamma_k \qquad \text{(II.76)}$$

$$M_i = - \sum_{A}^{i} F_k \, (x_i - a_k) \qquad \text{(II.77)}$$

$$N_i = \sum_{A}^{i} F_k \cdot \cos \gamma_k \qquad \text{(II.78)}$$

Pentru acest tip de grindă, diagramele de eforturi se trasează foarte ușor prin suprapunere de efecte: diagramele T și M se obțin din sumarea diagramelor parțiale ①, ② și ③ corespunzătoare celor trei încărcări de pe grindă.

II.1.2.2. Rezolvarea pe cale grafică.

Considerînd grinda încastrată încărcată cu sarcini concentrate și distribuite verticale, reacțiunile și diagramele de eforturi se obțin prin utilizarea poligonului de forțe și a poligonului funicular (fig.II.17).

Sarcina distribuită se înlocuiește cu sarcini concentra-

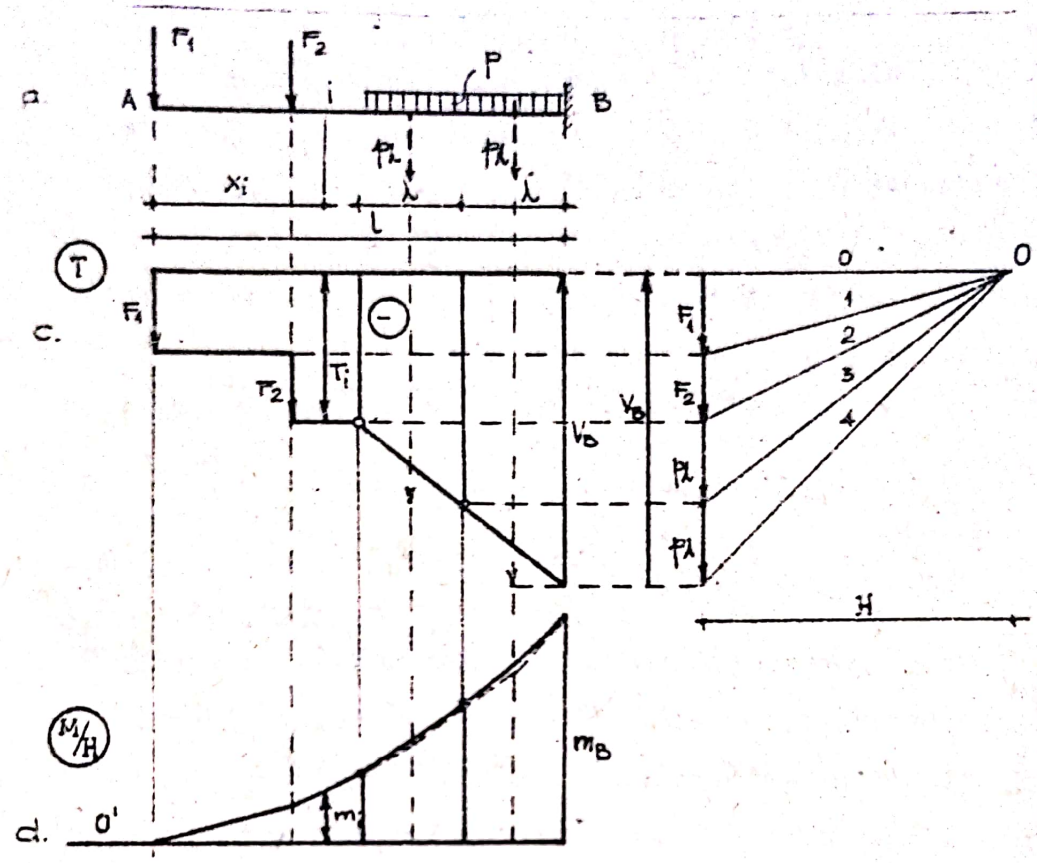


Fig. II-17

te echivalente, diagramele de eforturi corectîndu-se pe porţiunile respective după principiul stabilit de grinda simplu rezemată.

Reacţiunea V_B rezultă direct ca fiind egală şi de sens contrar cu rezultanta încărcărilor de pe grindă, iar momentul din M_B din încastrare rezultă din poligonul funicular ($M_B = H.m_B$).

Este indicat ca prima rază polară să fie orizontală, deoarece prima latură a poligonului funicular - orizontală de asemenea - serveşte drept linie de referinţă pentru măsurarea segmentelor m_1 cu care se determină momentele încovoietoare ($M_1 = H.m_1$).

II.1.3. Grinda cu consola.

II.1.3.1. Rezolvarea pe cale analitică.

Această grindă (fig.II.18) poate fi considerată ca fiind alcătuită dintr-o grindă simplu rezemată obișnuită și o grindă în consolă (fig.II.18.b și c).

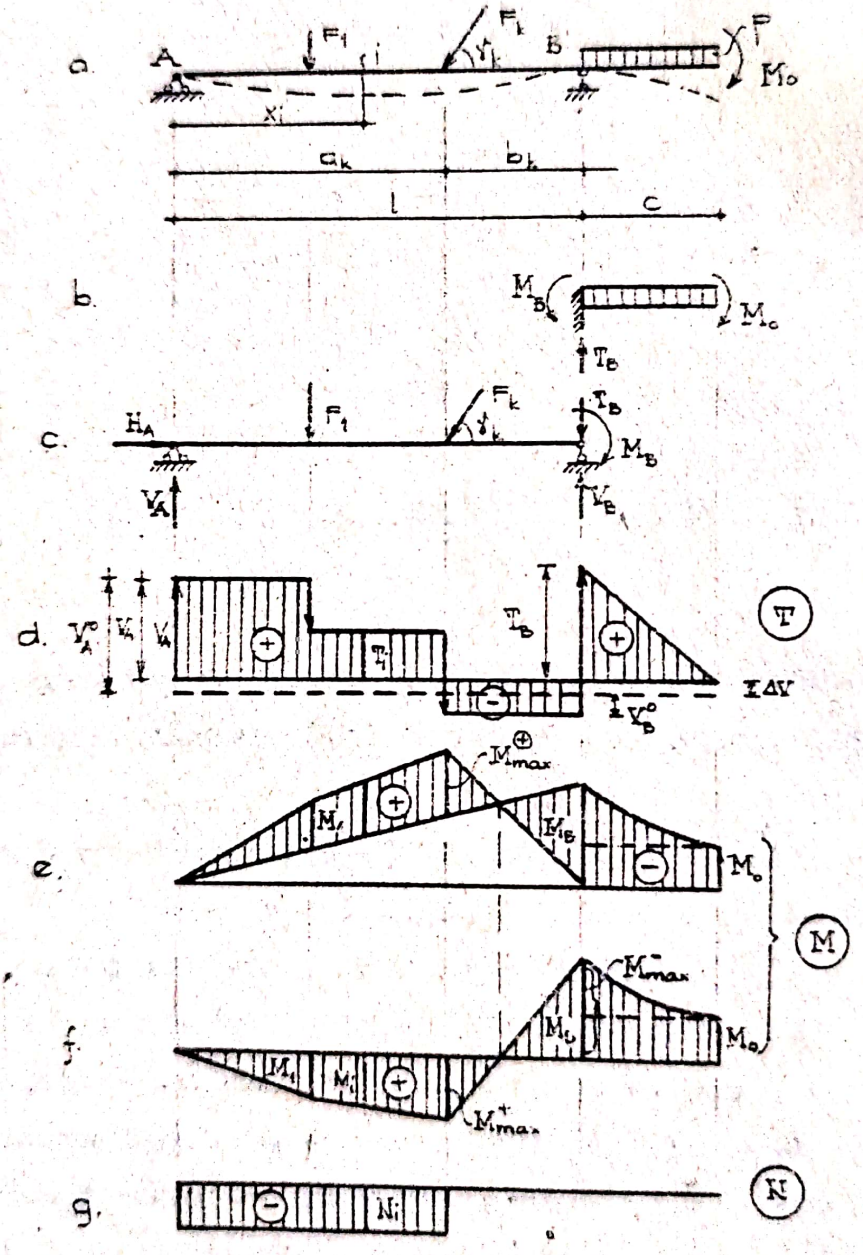


Fig. II-18

Deci, eforturile de pe consolă se determină ca la o grindă încastrată în B.

Pentru deschiderea A-B, efectul consolei se înlocuieşte cu forţa tăietoare $T_B = pc$ şi momentul încovoietor $M_B = M_o + pc^2/2$

Dacă se notează cu V_A^o şi V_B^o reacţiunile grinzii simplu rezemată fără consolă, se vede că reacţiunile grinzii cu consolă se modifică astfel:

$$V_A = V_A^o - \frac{M_B}{\ell} = V_A^o - \Delta V \qquad (II.79)$$

$$V_B = V_B^o + T_B + \frac{M_B}{\ell} = V_A^o + T_B + \Delta V \qquad (II.80)$$

Diagramele de eforturi se modifică de asemeni, astfel:

- linia de referinţă a diagramei de forţe tăietoare se deplasează cu ΔV (fig.II.18.d), ceea ce poate conduce eventual la modificarea secţiunii de anulare a forţei tăietoare, deci a secţiunii de moment maxim pozitiv;

- în diagrama de momente, care se poate trasa prin suprapunere de efecte (fig.II.18.e), se micşorează momentele încovoietoare pozitive, dar apar momente încovoietoare negative. O grindă cu consolă cu secţiunea constantă este raţională atunci cînd se realizează respectarea condiţiei:

$$|M_{max}^{+}| \simeq |M_{max}^{-}| \qquad (II.81)$$

Acest lucru se poate obţine prin variaţia lungimii consolei, sau a încărcărilor de pe această porţiune a grinzii.

Reacţiunile grinzilor cu console se calculează ca la o grindă simplu rezemată obişnuită, utilizînd ecuaţiile de echilibru static ($\Sigma M_{(A)} = 0$, $\Sigma M_{(B)} = 0$, $\Sigma X = 0$), iar eforturile se determină prin metoda secţiunilor.

II.1.3.2. Rezolvarea pe cale grafică.

Considerînd grinda cu o consolă din fig.II.19, determinarea reacţiunilor şi eforturilor se face folosindu-ne de poligonul de forţe şi poligonul funicular al încărcărilor (sarcinile distribuite se înlocuiesc cu sarcini concentrate echivalente).

Linia de închidere a poligonului funicular se duce prin punctul A'- intersecţia primei laturi a poligonului funicular

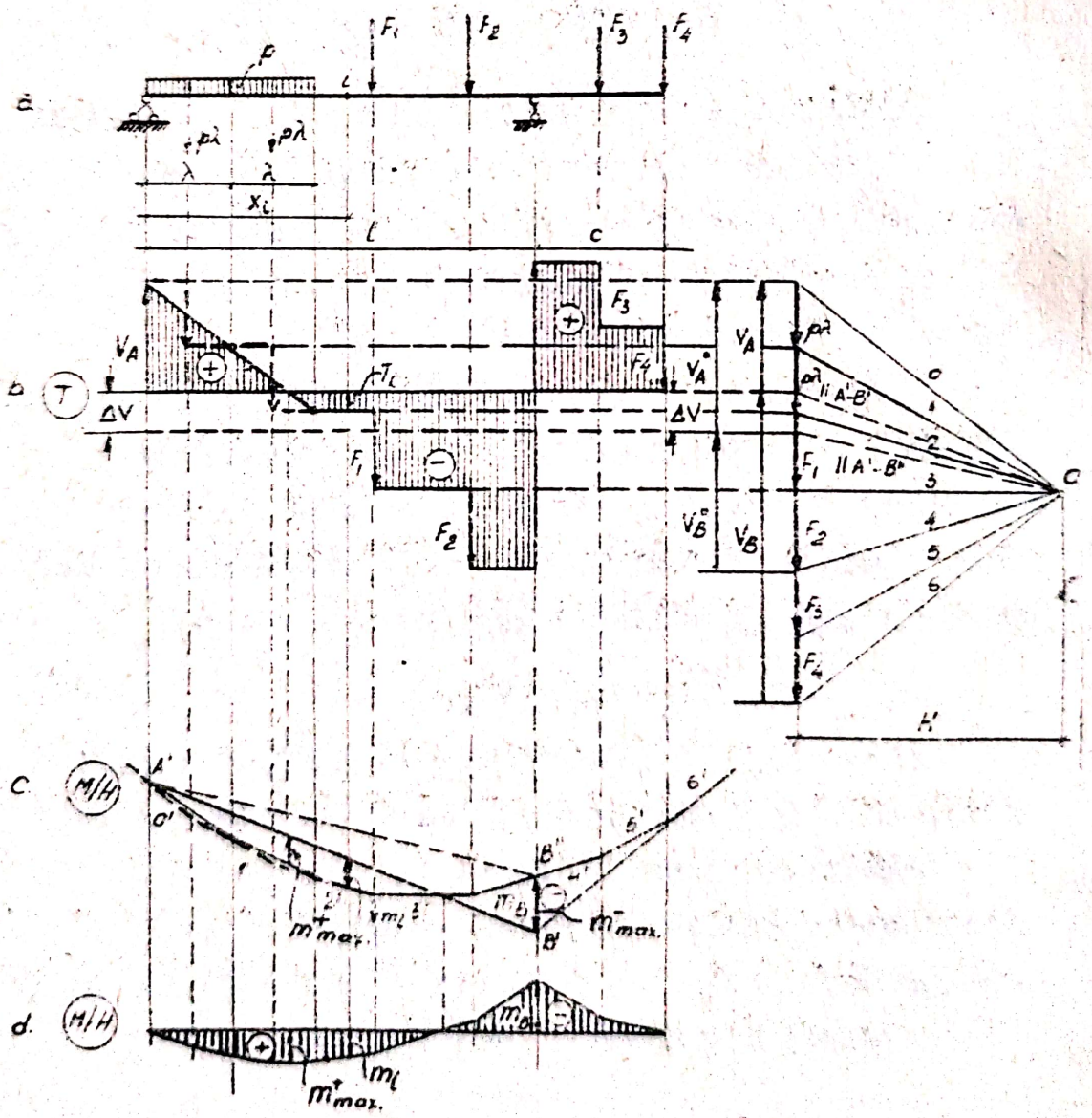


Fig. II.19

cu verticala articulației A (în cazul sarcinilor înclinate, prima latură a poligonului funicular se duce chiar prin articulație) - și punctul B'de intersecție a ultimei laturi (6') a poligonului funicular cu verticala reazemului simplu B. Aceasta pe baza corespondenței între poligonul funicular și poligonul de forțe, discutată la grinda simplu rezemată fără console.

O paralelă dusă din polul O la linia de închidere A'B', delimitează cele două reacțiuni V_A și V_B.

Diagrama de forțe tăietoare se trasează prin translarea directă a forțelor din poligonul de forțe numai pentru porțiunea A-B, în continuare (începînd cu V_B) sarcinile măsurîndu-se în poligon și reprezentîndu-se în diagramă.

Dacă grinda nu ar avea consolă, linia de închidere a poligonului funicular ar fi A'- B" și reacțiunile corespunzătoare V_A^o și V_B^o. Se constată și pe această cale că linia de referință a diagramei de forțe tăietoare este decalată cu ΔV (care reprezintă raportul M_B/ℓ).

Segmentele m_i se măsoară în poligonul funicular (fig.II.19.c) și acestea multiplicate cu H și ținînd cont de scările alese, ne dau momentele încovoietoare în secțiunile grinzii. Față de grinda simplu rezemată fără console, diagrama segmentelor m_i - deci diagrama de momente - se modifică prin suprafețele cu ordonate negative de pe consolă și din triunghiul A'B'B".

Se constată, evident, îmbunătățirea, distribuției de momente încovoietoare prin micșorarea momentelor pozitive din deschiderea grinzii. Apar însă momente negative și alcătuirea rațională a grinzii rezultă din condiția:

$$|m^+_{max}| \simeq |m^-_{max}| \qquad (II.82)$$

Diagrama segmentală m_t se poate reprezenta şi faţă de o linie de referinţă orizontală (fig.II.19.d).

II.1.4. Grinzi cu console şi articulaţii (grinzi Gerber)

II.1.4.1. Consideraţii generale.

Aceste sisteme static determinate sînt alcătuite din grinzi simple (grinzi simplu rezemate cu sau fără console, grinzi în consolă), legate între ele prin articulaţii. Sînt de fapt grinzi continue la care se introduc articulaţii intermediare în aşa fel încît atît pe ansamblu cît şi pe porţiuni structura să fie static determinată.

Acest mod de alcătuire prezintă avantaje în cazul cînd sistemul este supus unor acţiuni (variaţii de temperatură, cedări de reazeme etc.) care ar produce eforturi suplimentare, uneori destul de mari, dacă sistemul ar fi static nedeterminat, adică o grindă continuă fără articulaţii.

Considerînd de exemplu grinda continuă din fig.II.20.a, care este static nedeterminată de patru ori, transformarea ei în sistem static determinat se obţine prin introducerea a patru articulaţii intermediare.

In felul acesta, rezultă de fapt şi patru ecuaţii suplimentare de echilibru static (momentele în cele patru articulaţii sînt nule), care, împreună cu cele trei ecuaţii obişnuite, permit determinarea tuturor celor şapte forţe de legătură ale sistemului.

Dispunerea articulaţiilor nu se face însă la întîmplare, ci respectînd în primul rînd condiţia de determinare statică atît pe ansamblu, cît şi pe porţiuni. Astfel, dacă la sistemele din fig.II.20.b şi d această condiţie este îndeplinită, în schimb la sistemul din fig.II.20.f introducerea articulaţiilor

este defectuoasă, deoarece porțiunea I este un sistem static nedeterminat, în timp ce porțiunea II este un mecanism.

Un sistem Gerber este alcătuit din două tipuri de sisteme simple:

a) <u>Sisteme principale (independente)</u> - care au un număr suficient de legături cu terenul, încît pot exista independent de restul structurii.

b) <u>Sisteme secundare</u> - care au un număr de legături cu terenul și un număr de legături pe sistemele principale sau pe

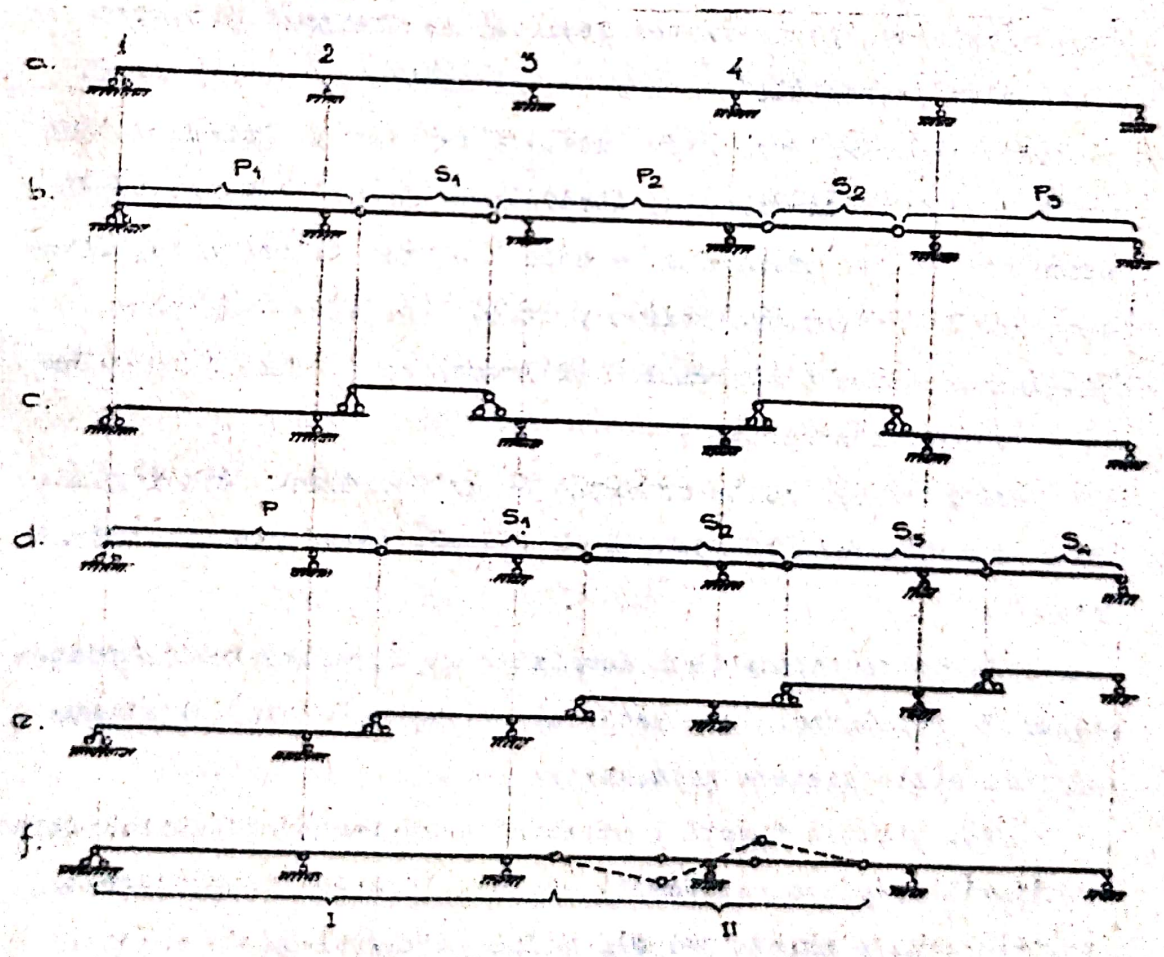


Fig. II-20

alte sisteme secundare, sau toate legăturile pe astfel de sisteme.

Astfel, grinda Gerber din fig.II.20.b este alcătuită din trei sisteme principale (P_1, P_2, P_3) și două sisteme secundare (s_1, s_2), în timp ce grinda Gerber din fig.II.20.d, are doar un sistem principal (p) și patru sisteme secundare (S_1, S_2, S_3, S_4).

În fig.II.20.c și respectiv II.20.e sînt prezentate schemele statice de rezemare ale celor două variante de grinzi Gerber alese. O primă constatare impertantă care rezultă din analizarea acestor scheme statice, este aceea că sarcinile care acționează pe un sistem secundar se transmit și asupra sistemelor principale sau a celor secundare pe care reazemă sistemul secundar respectiv. Aceasta face ca la grinda Gerber din fig.II.20.d de exemplu, încărcările de pe toate sistemele secundare, să se transmită pe unicul sistem principal p, acesta fiind în consecință foarte puternic solicitat. În plus, o eventuală cedare a sistemului principal ar conduce la distrugerea întregii structuri.

Acest lucru nu se întîmplă la grinda Gerber din fig.II.20.b, ceea ce face ca aceasta să fie mai rațională ca alcătuire.

Se poate reține deci concluzia că la alcătuirea structurilor de tip Gerber este rațional să se urmărească existența a cît mai multe sisteme principale.

Mai trebuie făcută o observație în legătură cu realizarea legăturilor acestor structuri, în cazul acțiunii unor sarcini înclinate și a existenței mai multor articulații de legătură cu terenul. Pentru ca fiecare sistem simplu să aibă deplasarea pe orizontală împiedicată într-un singur punct, este necesar

ca pentru fiecare articulaţii exterioară suplimentară, una din legăturile interioare să fie alcătuită ca reazem simplu (fig.II.21).

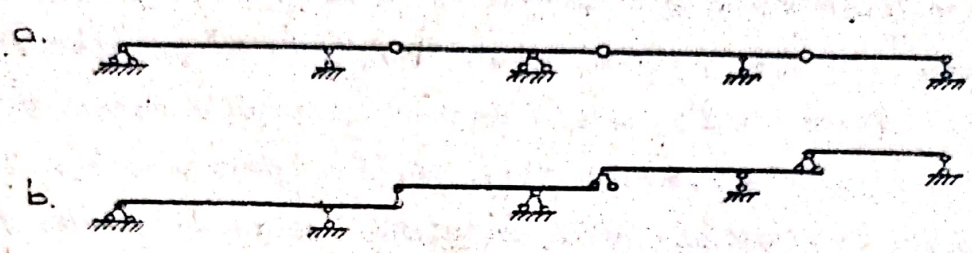


Fig. II-21

II.1.4.2. Rezolvarea pe cale analitică

Pentru determinarea reacţiunilor şi a diagramelor de eforturi la grinzile cu console şi articulaţii, există două posibilităţi:

a) Se rezolvă sistemul în ansamblu, utilizînd pentru determinarea reacţiunilor, ecuaţiile de echilibru static obişnuit, la care se adaugă ecuaţiile suplimentare de momente nule în dreptul articulaţiilor interioare ale grinzii. La grinda din fig.II.22.a de exemplu, aceste ecuaţii suplimentare sînt:

$$M_C = 0,\ M_F = 0,\ M_G = 0 \qquad \text{(II.83)}$$

scrise, evident, ca sumă a momentelor forţelor (acţiuni şi reacţiuni) din stînga sau din dreapta articulaţiilor respective.

Mergînd pe această cale, rezultă însă grupuri de ecuaţii cu mai multe necunoscute, ceea ce complică întrucîtva calculul.

Odată stabilite valorile reacţiunilor, determinarea diagramelor de eforturi se face utilizînd metoda generală a secţiunilor.

b) Se descompune grinda în sisteme simple şi se rezolvă

aceste sisteme în ordine, diagramele totale de eforturi obţinîndu-se prin alăturarea diagramelor parţiale trasate pe sistemele secundare şi principale.

Ordinea de rezolvare este indicată de schema statică de rezemare a sistemelor simple. Se va începe cu sistemele secundare în ordine descrescîndă ca poziţie în schema statică, fiecare sistem simplu încărcîndu-se cu sarcinile care-i revin direct şi cu componentele transmise în dreptul punctelor de rezemare de către sistemele secundare. Aceste componente sînt reacţiunile sistemelor secundare luate ca semne schimbate, deci ca acţiuni.

In fig.II.22 este prezentată schema de rezolvare a unei grinzi Gerber alcătuită din două sisteme principale şi două sisteme secundare (fig.II.22.b).

Se rezolvă întîi sistemele secundare S_1 şi S_2, încărcate cu momentul concentrat M_o şi respectiv cu forţa concentrată F_2, trasîndu-se diagramele de eforturi T_{s1}, Ms_1 şi respectiv T_{s1}, M_{s2}.

Apoi se rezolvă sistemele principale p_1 - încărcat cu sarcina uniform distribuită şi cu reacţiunile V_C şi V_F+F_1 ale sistemelor secundare S_1 şi S_2, luate ca acţiuni - şi p_2 - încărcat cu reacţiunea V_G a sistemului secundar S_2 luată ca acţiune. Se trasează astfel diagonalele de eforturi T_{p1}, M_{p1}, şi respectiv T_{p2}, M_{p2}.

De remarcat că sarcina F_1 care acţionează în articulaţia F, nu produce eforturi în sistemul secundar S_1, întrucît se anulează cu reacţiunea corespunzătoare din acest reazem al sistemului secundar, dar trebuie considerată ca acţiune pe sistemul principal p_1, producînd, evident, eforturi în acest sistem.

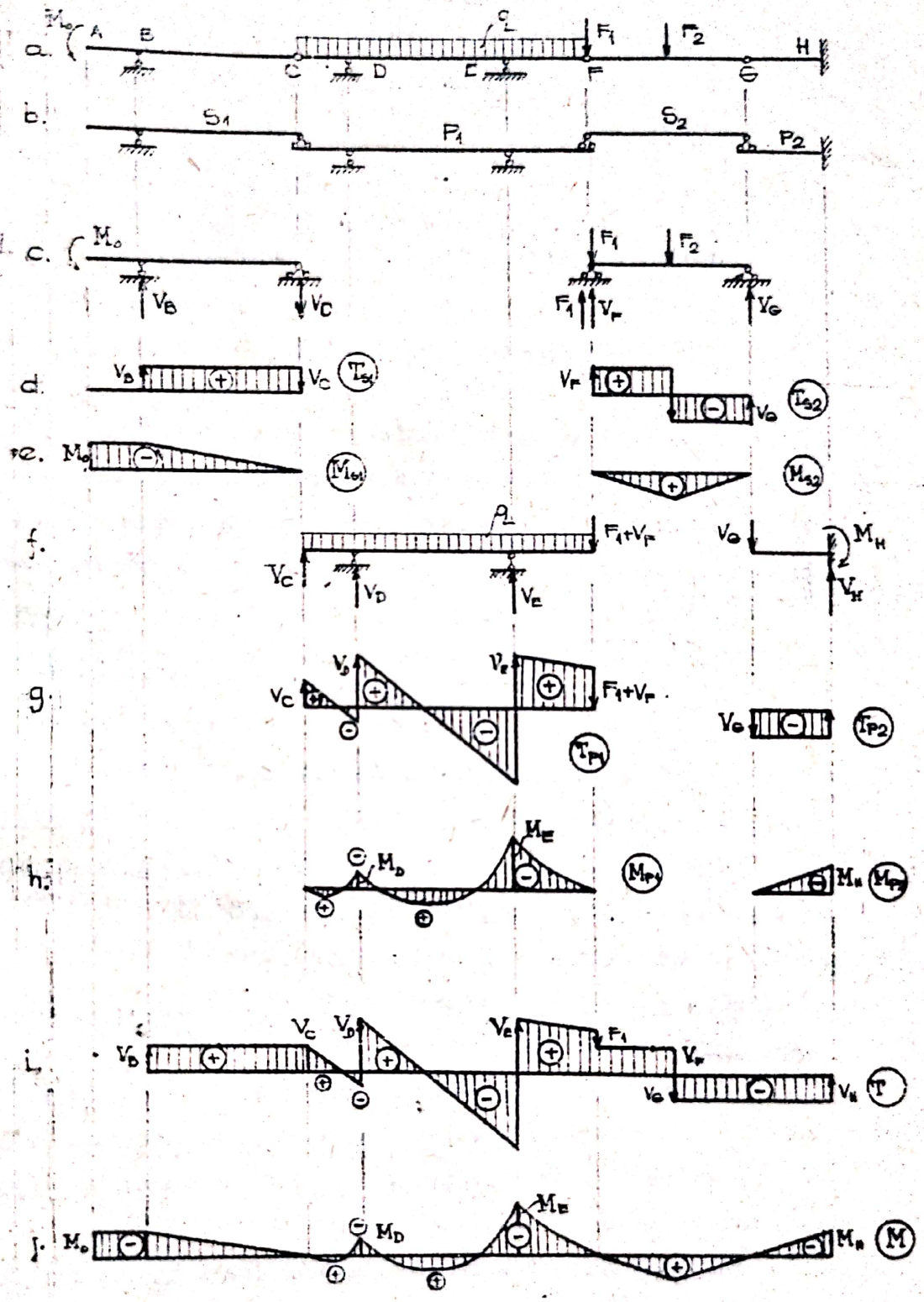

a.
b.
c.
d.
e.
f.
g.
h.
i.
j.
A
B
C
D
E
F
G
H
M_o
S_1
P_1
S_2
P_2
F_1
F_2
V_B
V_C
V_F
V_G
V_D
V_E
V_H
M_H
T_{S1}
T_{S2}
M_{S1}
M_{S2}
T_{P1}
T_{P2}
M_{P1}
M_{P2}
M_D
M_E
T
M

Fig. II-22

Diagramele totale de eforturi rezultă - așa cum s-a mai subliniat - prin alăturarea diagramelor sistemelor simple, fiind de remarcat următoarele:

- In dreptul articulațiilor intericare, diagrama de forțe tăietoare nu suferă modificări, decît dacă în articulațiile respective sînt aplicate forțe concentrate (cazul articulației F, în dreptul căreia se produce un salt de valoarea forței F_1).

- Ca o consecință, în diagrama de momente încovoietoare, în dreptul acestor articulații se produce schimbări de pantă numai în aceeași situație. Astfel, în dreptul articulațiilor C și G, diagramele de momente ale sistemelor secundare S_1 și S_2 sînt continue (au tangentă comună) cu diagramele sistemelor principale p_1 și respectiv p_2, în schimb în dreptul articulației F are loc o schimbare de pantă, diagrama de momente a sistemului secundar S_2 nemafiind tangentă la diagrama parabolică a sistemului principal p_1.

II.1.4.3. <u>Rezolvarea pe cale grafică.</u>

Determinarea reacțiunilor și a diagramelor de eforturi pe cale grafică se face și la aceste sisteme cu ajutorul poligonului de forțe și al poligonului funicular.

Se pot utiliza două variante de lucru:

a) <u>Soluția cu poligoane de forțe diferite pe fiecare deschidere</u>.

Se consideră grinda Gerber din fig.II.23.a, încărcată cu sarcini concentrate și sarcini distribuite, acestea din urmă înlocuindu-se în primă aproximație cu sarcini concentrate echivalente.

Se construiește cîte un poligon de forțe pentru forțele de pe fiecare deschidere, cu aceeași distanță polară H. Apoi se construiesc poligoanele funiculare corespunzătoare în con-

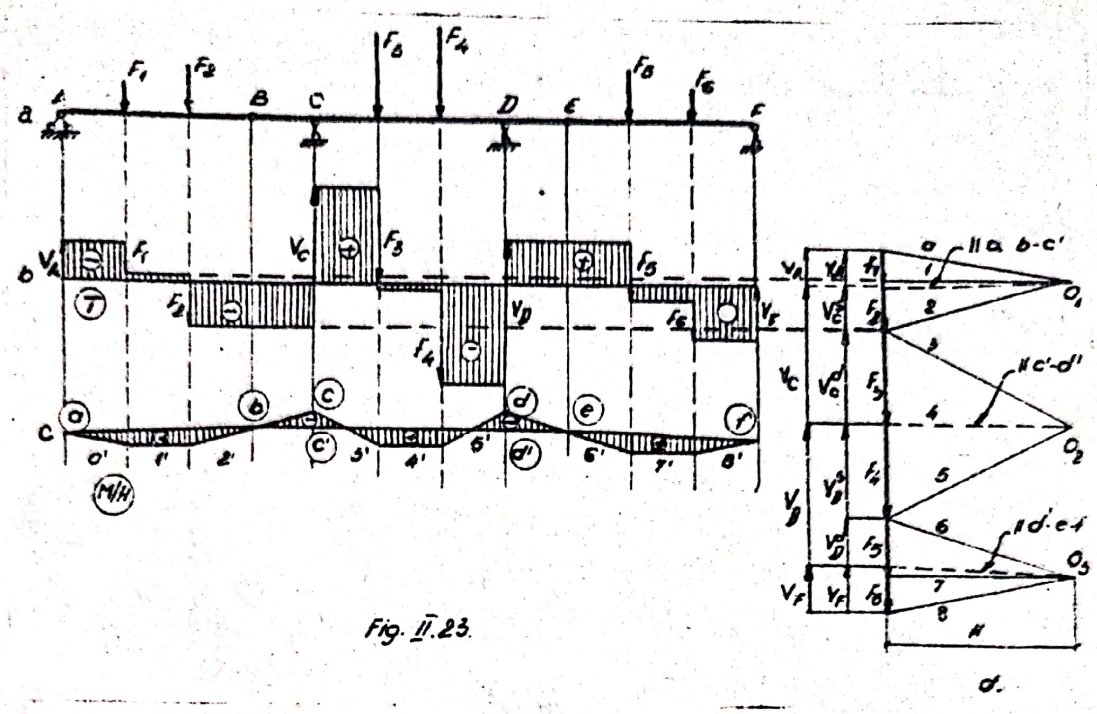


Fig. II.23.

tinuare (cu punctele comune c şi d).Se duc apoi liniile de închidere a-b şi respectiv e-f din condiţiile de momente nule în secţiunile A,B şi respectiv E,F,aceste linii de închidere prelungindu-se pînă în dreptul reazemelor C şi respectiv D, obţinîndu-se punctele o'şi d'prin care se duce linia de închidere pentru poligonul funicular al deschiderii din mijloc.

Ducînd în poligoanele de forţe paralele la liniile de închidere, se determină reacţiunile produse de încărcările de pe fiecare deschidere, iar reacţiunile din reazemele intermediare se determină apoi ca sume ale reacţiunilor parţiale produse de încărcările de pe deschiderile adiacente:

$$V_C = V_C^S + V_C^d \qquad \text{(II.84.a)}$$

$$V_D^D = V_D^S + V_D^d \qquad \text{(II.84.b)}$$

Diagrama de forţe tăietoare din fig.II.23.b se trasează prin translarea forţelor din poligonul de forţe pentru prima deschidere şi în continuare prin măsurarea la scară a mărimii

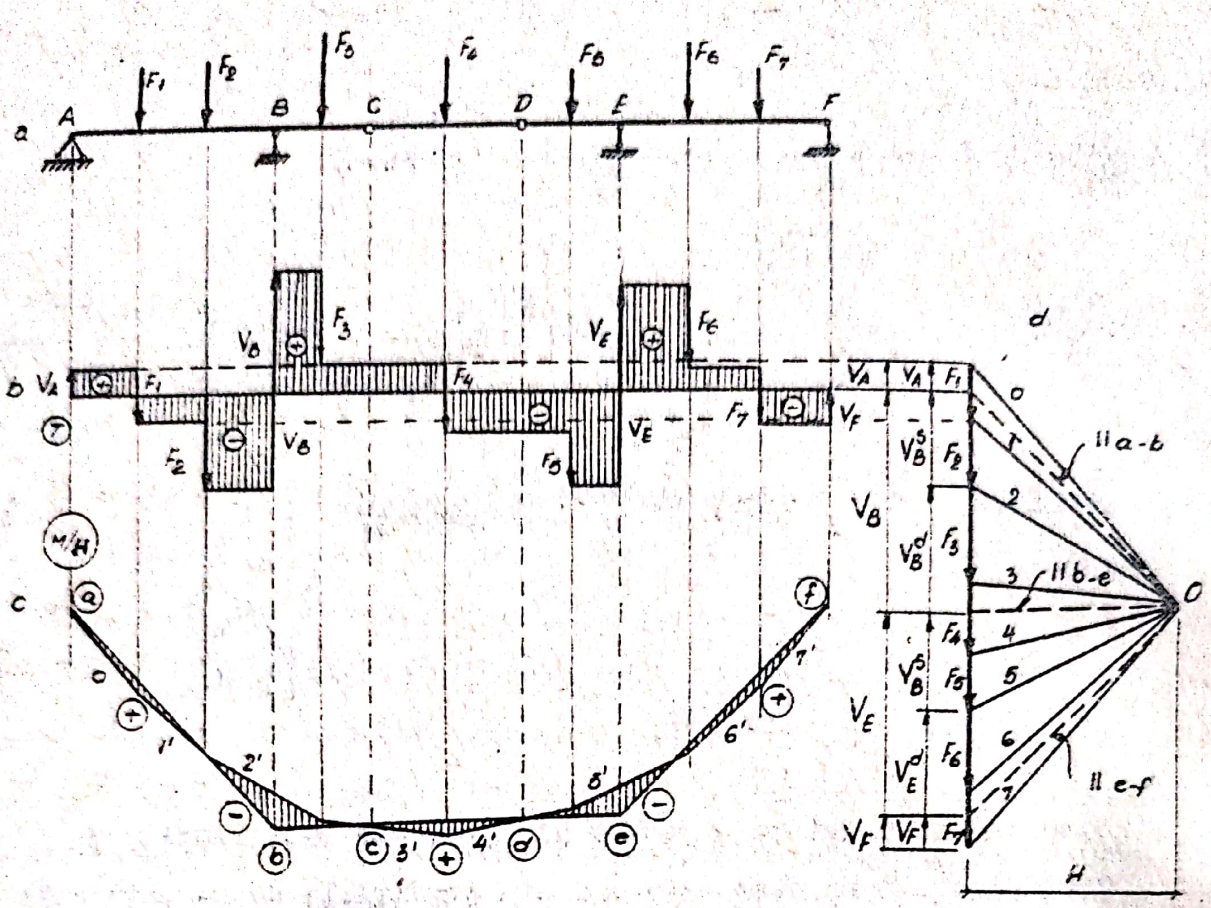


Fig II.24

reacţiunilor şi forţelor exterioare respective.

Ordonatele din poligonul funicular (fig.II.23.c), măsurate faţă de liniile de referinţă corespunzătoare, reprezintă segmentele m care, multiplicate cu distanţa polară H dau momentele încovoietoare din fiecare secţiune.

Corecţia diagramelor de eforturi pe porţiunea cu sarcină distribuită, se face după principiul discutat la sistemele simple.

b) <u>Soluţia cu un singur poligon de forţe</u>.

Această variantă se exemplifică pe grinda din fig.II.24.a.

Se construieşte poligonul de forţe cu distanţa polară H şi apoi poligonul funicular corespunzător din fig.II.24.c. Prima linie de închidere se duce pentru deschiderea din mijloc,

din condiţii de momente nule în articulaţiile C şi D. Prelungind această linie de închidere pînă pe reazemele B şi E, se obţin punctele b şi e. Prin aceste puncte şi din condiţiile de momente nule în A şi F, se duce liniile de închidere a-b şi e-f pentru deschiderile marginale. Reacţiunile se determină în poligonul de forţe, de fel ca în varianta precedentă.

Rezultă astfel diagrama de forţe tăietoare din fig.II.24. b şi diagrama segmentelor m din fig.II.24.c.

II.1.4.4. Influenţa poziţiei articulaţiilor asupra distribuţiilor de eforturi.

Diagramele de eforturi la grinzile cu console şi articulaţii se modifică în funcţie de poziţia articulaţiilor interioare, ceea ce face posibil un studiu asupra alegerii cît mai raţionale a acestei poziţii.

Astfel, dacă la grinda din fig.II.25.a cele două articulaţii necesare s-ar introduce pe reazemele B şi C, ar rezulta trei grinzi simplu rezemate, cu diagramele de momente corespunzătoare (liniile de referinţă A'- B; B'- C; C'- D).

Dacă articulaţiile se realizează în secţiunile E şi F, din condiţia de momente nule în A, E, F şi D liniile de referinţă ale diagramei de momente devin A'- E; E'- F; F'- D. Se

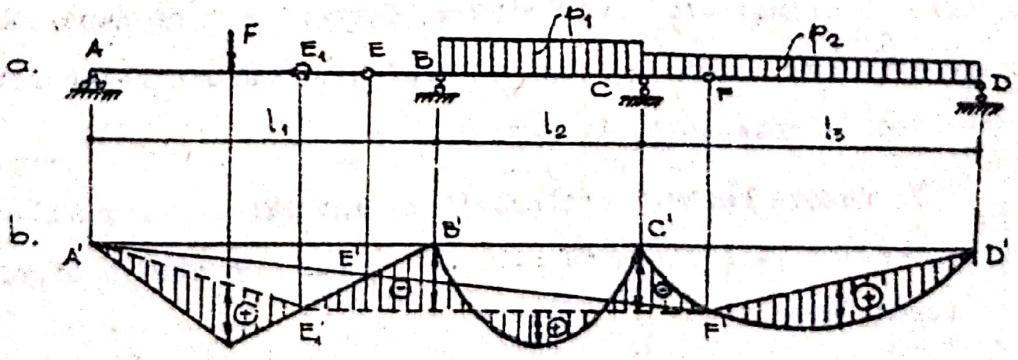


Fig. II-25

vede că diagrama de momente încovoietoare este îmbunătățită, datorită micșorării momentelor pozitive din deschiderile grinzii. Apar însă momente negative pe razemele B și C și soluția optimă - pentru grinda cu secțiune constantă pe toată lungimea - va corespunde unei diagrame de momente în care toate vîrfurile (momentele cu valori mari) vor fi apropiate ca valori absolute. Pentru exemplul considerat, acest lucru se obține prin deplasarea articulației din E în E_1, cînd momentul pozitiv din prima deschidere scade, iar momentul negativ de pe reazemul B crește, liniile de referință fiind în această situație A'- E_1', E_1' - F', F'- D'.

Este indicată pentru această alcătuire rațională utilizarea căii grafice cînd, după construirea poligonului funicular, se potrivesc liniile de închidere în așa fel încît să fie realizat deziderатul ca vîrfurile diagramei de momente să fie apropiate ca valori.

Punctele în care aceste linii de închidere intersectează poligonul funicular, deci în care momentele sînt nule, indică secțiunile de amplasare a articulațiilor interioare ale grinzii.

Evident că acest studiu nu este totdeauna posibil, atît datorită complexității unor sisteme Gerber, cît și datorită existenței mai multor ipoteze de încărcare cărora le-ar corespunde deci diverse soluții optime.

In aceste cazuri, articulațiile interioare se realizează în mod curent la o distanță față de reazem de cca. o cincime din deschidere.

II.1.5. Bare cotite, cadre static determinate.

II.1.5.1. Consideraţii generale.

Barele cotite sînt sisteme alcătuite din mai multe bare avînd direcţii diferite, legate rigid în noduri.

Elementele care alcătuiesc barele cotite, sînt:

a) grinzile (riglele) - bare orizontale sau cu înclinare mică faţă de orizontală;

b) stîlpii - bare verticale sau cu înclinare mică faţă de verticală.

Punctele de legătură dintre bare se numesc noduri şi rigiditatea acestora se caracterizează prin aceea că unghiul pe care-l formează tangentele la axele barelor deformate, este acelaşi cu unghiul format de axele barelor înainte de deformare (fig.II.26.a,b). In fig.II.27 sînt prezentate cîteva exemple de bare cotite încastrate şi simplu rezemate.

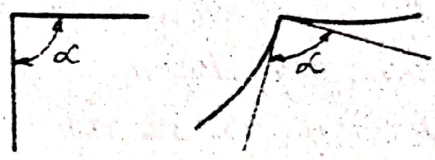


Fig. II-26

Mai multe bare cotite legate între ele prin articulaţii, formează un cadru static determinat. Cadrele static determinate sînt alcătuite după aceleaşi principii ca şi grinzile Gerber

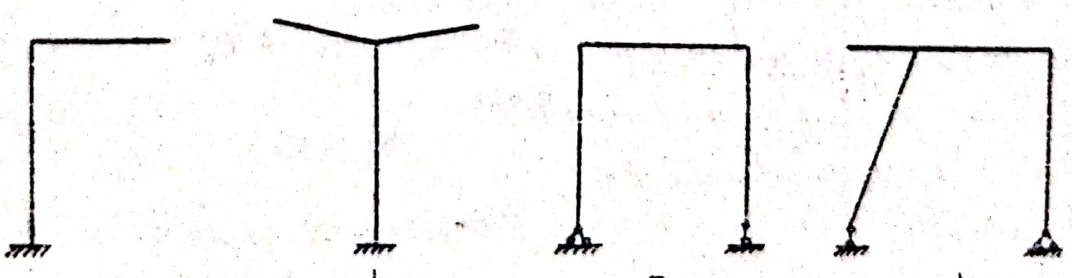


Fig. II-27

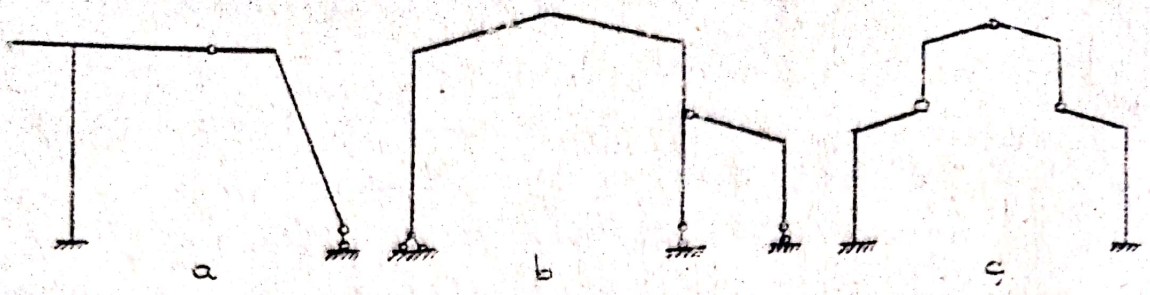


Fig. II-28

şi în fig.II.28 sînt date cîteva exemple de astfel de sisteme.

Atît barele cotite static determinate, cît şi cadrele static determinate, nu sînt utilizate prea des ca structuri de rezistenţă, dar studiul lor este foarte important deoarece ele constituie sisteme de bază în rezolvarea structurilor static nedeterminate prin metoda forţelor.

II.1.5.2. <u>Calculul barelor cotite</u>.

a) <u>Determinarea reacţiunilor</u> se face ca la orice sistem static determinat, utilizînd ecuaţiile de echilibru static (de proiecţii sau de momente), alese convenabil Pentru bara cotită din fig.II.29 de exemplu, cele trei reacţiuni din încastrare se calculează astfel:

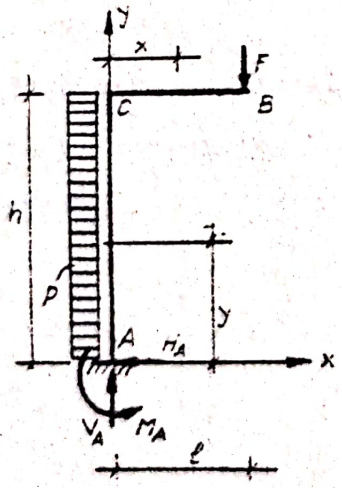


Fig. II.29

$$\Sigma X = 0: \quad ph - H_A = 0$$

deci:

$$H_A = ph$$

$$\Sigma Y = 0: \quad -F + V_A = 0$$

deci:

$$V_A = F$$

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \quad F \cdot \ell - ph \frac{h}{2} - M_A = 0$$

deci:

$$M_A = F \cdot \ell - \frac{ph^2}{2}$$

b) Determinarea eforturilor se face prin metoda secţiunilor, generalizînd relaţiile (I.5), I.7) şi (I.9) adică:

$$N_i = \Sigma \pm F^{st(dr)}_{axa\ barei} \qquad (II.85)$$

$$T_i = \Sigma \pm F^{st(dr)}_{normala\ la\ axa\ barei} \qquad (II.86)$$

$$M_i = \Sigma \pm (F_j d_j)^{st(dr)} \qquad (II.87)$$

Intrucît barele care alcătuiesc o bară cotită au direcţii diferite rezultă că:

- In noduri, la trecerea de pe o bară pe alta, în diagramele de forţe axiale şi forţe tăietoare, aceste eforturi îşi vor schimba bruso valorile, datorită modificării direcţiilor de proiecţie.

- Momentele încovoietoare pentru barele dintr-un nod în care concură numai două bare, vor fi aceleaşi (momentele se calculează în raport cu centrele de greutate ale secţiunilor, care sînt comune celor două bare din nod), In consecinţă, ordonata din diagrama de momente determinată pentru o bară este valabilă ca mărime şi semn şi pentru cea de a doua bară, deci se rabate cu aceeaşi valoare şi pe aceeaşi parte a barei respective (fig.II.30).

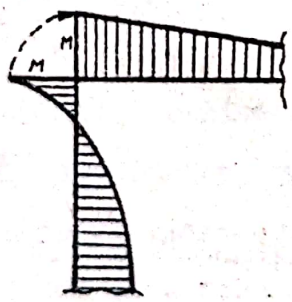


Fig II.30

Convenţiile de semne pentru eforturi rămîn aceleaşi ca la grinzile simple, adică:

- forța axială este pozitivă cînd produce întindere și negativă cînd produce compresiune;

- forța tăietoare este pozitivă cînd produce rotirea secțiunii în sensul acelor de ceasornic și negativă în caz contrar;

- momentul încovoietor este pozitiv cînd produce întinderea fibrei interioare a barei și negativ în caz invers. In fig.II.31 sînt schematizate aceste reguli de semne pentru eforturi secționale pozitive la bare orizontale și verticale.

Pentru momentele încovoietoare, mai trebuie notat că, în cazul sistemelor cu mai multe contururi, fibra interioară tre-

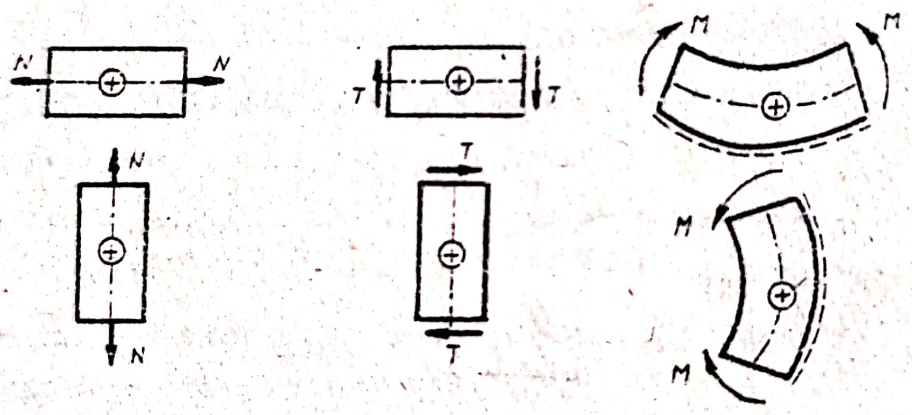


Fig. II.31

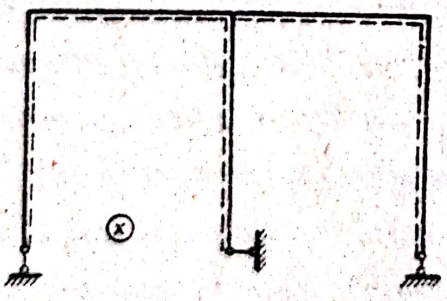


Fig. II.32

buie stabilită în raport cu una din deschideri, în care se consideră situat cel care efectuează calculul (fibra punctată în fig.II.32, dacă ne situăm în prima deschidere).

Regulile de așezare a diagramelor de eforturi sînt următoarele:

- diagramele pozitive de forţe axiale şi de forţe tăietoare se trasează pe partea exterioară a barelor, iar cele negative pe partea interioară;

- diagramele de momente se trasează obligator pe partea fibrei tensionate a barei, rezultînd astfel diagrama pozitive pe partea interioară şi diagrame negative pe partea exterioară.

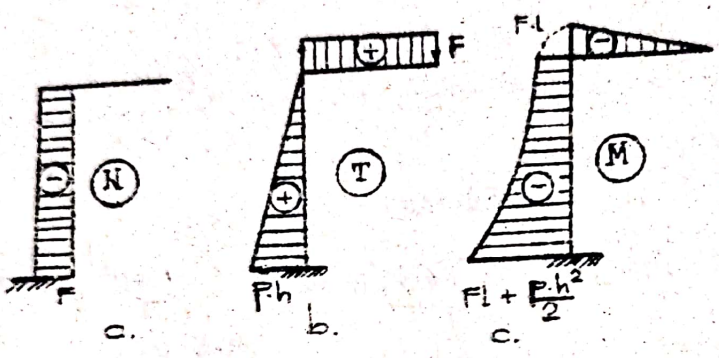


Fig. II-33

Pe baza celor discutate pînă aici, pentru bara cotită din fig.II.29 diagramele de eforturi se determină astfel (plecînd din capătul liber B spre încastrare):

<u>Diagrama de forţe axiale</u> (fig.II.33.a):

- Bara B-C:

$N_{B-C} = 0$

- Bara C-A:

$N_{A-C} = -F$ (constantă)

<u>Diagrama de forţe tăietoare</u> (fig.II.33.b):

- Bara B-C:

$T_{B-C} = F$ (constantă)

- Bara C-A:

$T_{C-A} = p(h-y)$ (variaţie liniară)

$y = h : T_C = 0$

$y = 0 : T_A = ph$

Diagrama de momente (fig.II.33.c):

- Bara B-C:

$M_{B-C} = - F(\ell - x)$ (variația liniară)

$x = \ell$: $M_B = 0$

$x = 0$: $M_C = - F.\ell$

- Bara C-A:

$$M_{C-A} = - F.\ell - p(h-y)\left(y + \frac{h-y}{2}\right) = - F.\ell - \frac{p(h^2-y^2)}{2}$$

(variație parabolică).

$y = h$: $M_C = - F.\ell$

deci aceeași valoare calculată și pe bara B-C;

$$y = 0: \quad M_A = - \left(F.\ell + \frac{ph^2}{2}\right)$$

In fig.II.34.a este prezentată o bară cotită simplu rezemată la care, în nodul D se intersectează trei bare. Reacțiunile sistemului sînt cele indicate pe desen, iar diagrama de momente se determină astfel:

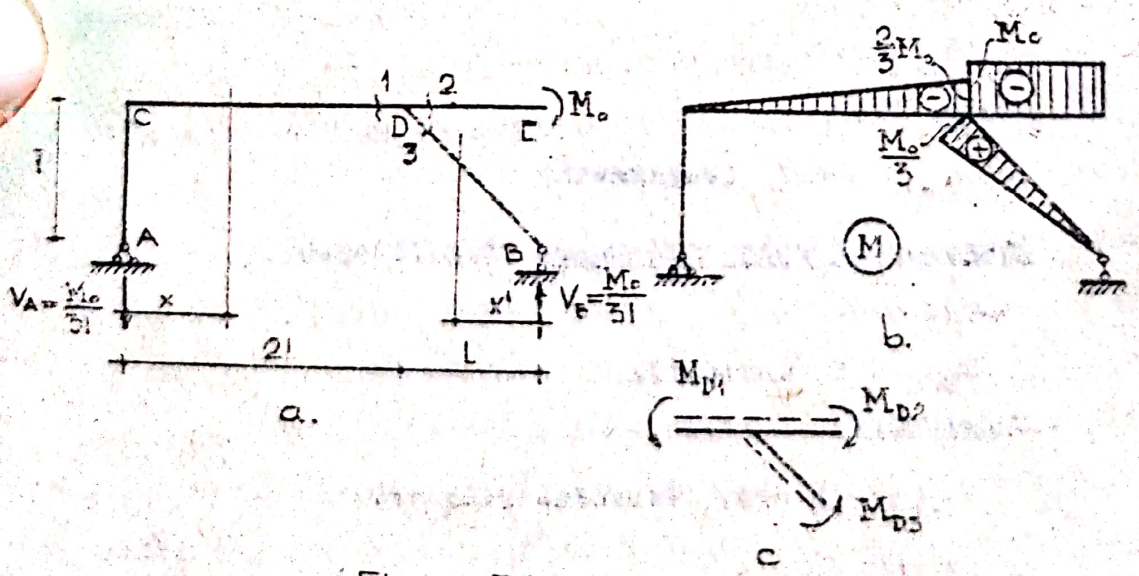


Fig. II-34

- Bara A-C:

$$M_{A-C} = 0$$

- Bara C-D:

$$M_{C-D} = - V_A x = - \frac{M_o}{3\ell} x$$

$$x = 0: M_C = 0$$

$$x = 2\ell : M_{D1} = - \frac{2}{3} M_o$$

- Bara E-D:

$$M_{E-D} = - M_o \text{ (constant)}$$

deci: $M_{D2} = - M_o$

- Bara B-D:

$$M_{B-D} = V_B \cdot x' = \frac{M_o}{3} x'$$

$$x' = 0: M_B = 0$$

$$x' = : M_{D3} = \frac{M_o}{3}$$

In felul acesta se trasează diagrama de momente încovoietoare din fig.II.34.b. Pentru verificarea echilibrului nodului D - operaţiune obligatorie în cazul nodurilor în care concură mai mult de două bare - se procedează astfel (fig.II.34.c):

- se izolează nodul, prin secţionarea barelor din jurul lui şi se stabileşte sensul momentelor de pe capetele barelor secţionate, în funcţie de poziţia fibrei tensionate, care coincide cu partea pe care s-a trasat diagrama de momente;

- se scrie ecuaţia de echilibru a nodului, ţinînd seama de semnele relative ale momentelor, adică:

$$- M_{D1} + M_{D2} - M_{D3} = 0$$

- se verifică dacă ecuaţia de echilibru este satisfăcută

de valorile (absolute) ale momentelor din capetele barelor respective:

$$-\frac{2}{3}M_0 + M_0 - \frac{M_0}{3} = 0$$

Dacă relaţia de echilibru nu este satisfăcută, se verifică atît valorile momentelor, cît şi partea pe care a fost trasată diagrama de momente pe fiecare bară, în funcţie de care se stabileşte sensul şi rezultă deci semnul fiecărui moment.

II.1.5.3. Calculul cadrelor static determinate.

Aşa după cum s-a mai subliniat, modul de alcătuire a acestor structuri este acelaşi ca al grinzilor Gerber. In consecinţă, pentru calculul cadrelor static determinate se poate proceda în două moduri:

a) Prin rezolvarea în ansamblu, utilizînd pentru determinarea reacţiunilor, pe lîngă ecuaţiile obişnuite de echilibru static, valorile suplimentare de momente nule în articulaţiile interioare. La cadrul din fig.II.35.a de exemplu, relaţia suplimentară este:

$$M_C^{st(dr)} = 0$$

care, împreună cu alte trei ecuaţii de echilibru static, va permite determinarea celor patru reacţiuni (V_A, H_A, M_A, V_B).

Odată determinate reacţiunile, diagramele de eforturi se trasează după principiile analizate la celelalte tipuri de structuri.

b) Prin descompunerea în sisteme simple şi rezolvarea în ordinea indicată de schema statică de rezemare.

Ca exemplu se prezintă rezolvarea cadrului static determinat din fig.II.35.a, care se poate descompune în sistemul principal D-G şi sistemul secundar A-D (fig.II.35.b).

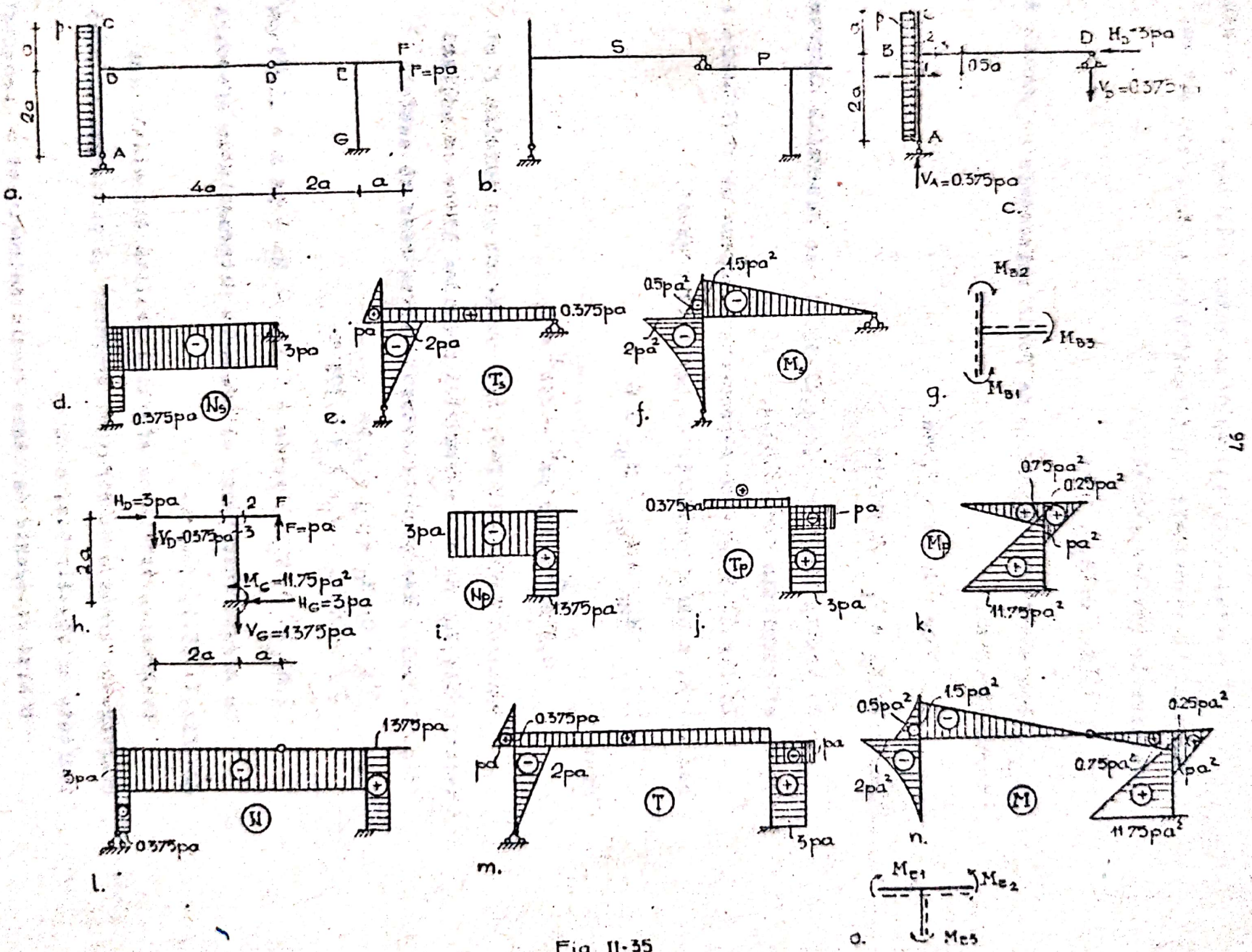


Fig. 11-35

Scanned with OKEN Scanner

Se rezolvă întîi sistemul secundar A-D, încărcat cu sarcina uniform distribuită de intensitatea p. La acest sistem, reacţiunile rezultă astfel:

$$\Sigma X = 0: \; H_D = 3\,pa$$

Din echilibrul cuplului de forţe orizontale cu cuplul de forţe verticale:

$$3\,pa \cdot 0{,}5\,a = V_A \cdot 4a$$

rezultă: $V_A = V_A = 0{,}375\,pa$

Cu aceste reacţiuni (fig.II.35.c), se determină diagramele de eforturi din fig.II.35.d, e şi f.

In fig.II.35.g este reprezentată schema de verificare a nodului B, a cărui condiţie de echilibru este:

$$M_{B2} + M_{B3} - M_{B1} = 0$$

sau:

$$0{,}5\,pa^2 + 1{,}5\,pa^2 - 2pa^2 = 0$$

Sistemul principal D-G, este încărcat cu sarcina F şi reacţiunile V_D, H_D ale sistemului secundar luate ca acţiuni (fig.II.35.h). Reacţiunile acestui sistem rezultă astfel:

$$\Sigma X = 0: \; H_G = H_D = 3\,pa$$
$$\Sigma Y = 0: \; V_G = V_D + F = 1{,}375\,pa$$

$$\Sigma M_{(G)} = 0: \; M_G = 3\,pa \cdot 4a + 0{,}375\,pa \cdot 2a - pa \cdot a = 11{,}75\,pa^2$$

Cu aceste reacţiuni, se trasează diagramele de eforturi din fig.II.35.i, j şi k.

Diagramele totale de eforturi rezultă din alăturarea diagramelor trasate pe sistemul secundar şi principal şi sînt indicate în fig.II.35.m, n şi o.

O altă categorie de cadre static determinate o constituie cadrele cu trei articulaţii (fig.II.36.a), care prezintă parti-

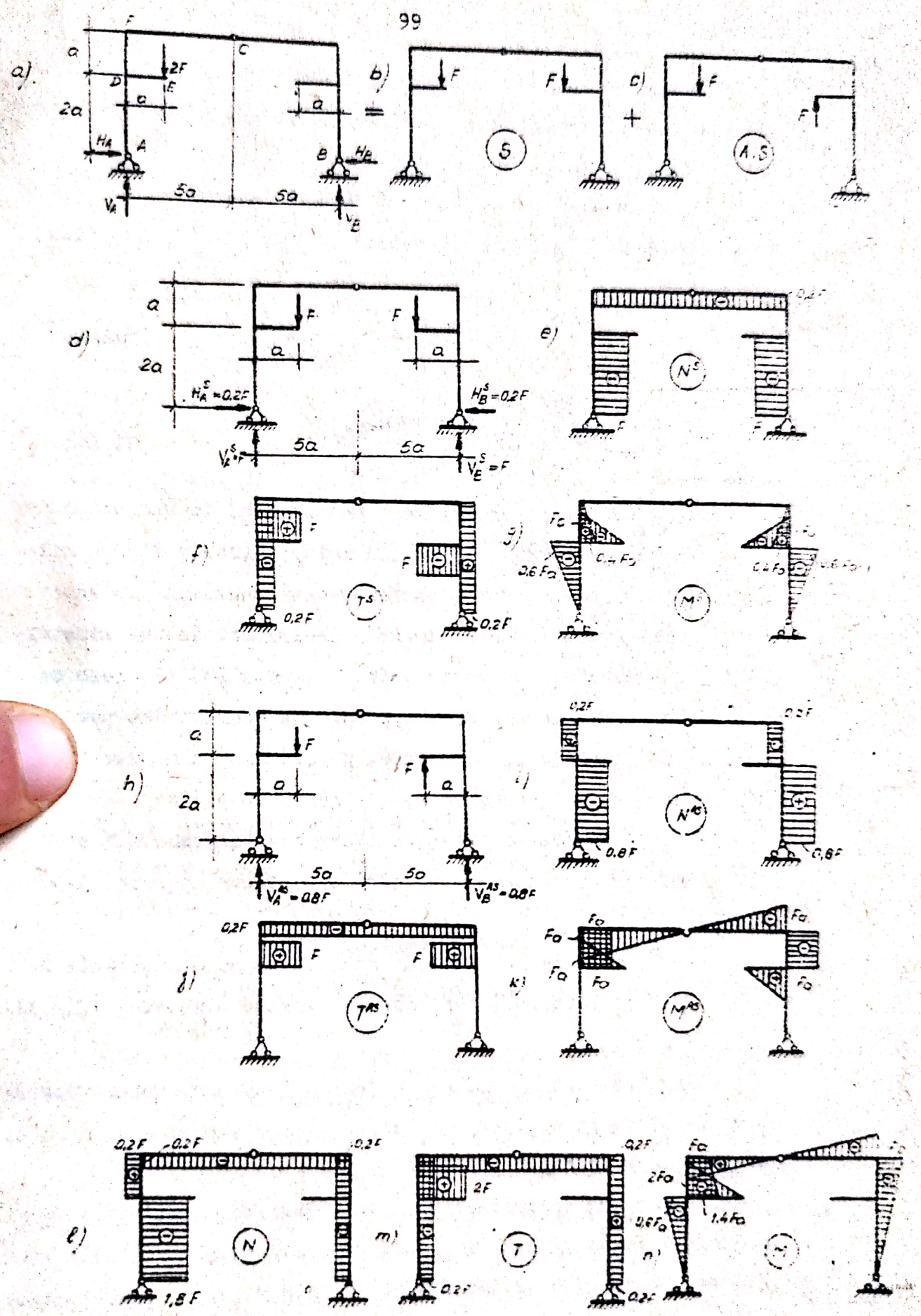

a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)
h)
i)
j)
k)
l)
m)
n)
F
2F
a
2a
5a
H_A
H_B
V_A
V_B
A
B
C
D
E
S
A.S
$H_A^S = 0.2F$
$H_B^S = 0.2F$
$V_A^S = F$
$V_B^S = F$
N^S
T^S
M^S
$V_A^{AS} = 0.8F$
$V_B^{AS} = 0.8F$
N^{AS}
T^{AS}
M^{AS}
0,2F
0,8F
1,8F
N
T
2F
F_a
$2F_a$
$0.6F_a$
$1.4F_a$

Fig. V.36

cularitatea - subliniată și în capitolul I - a apariției unor componente orizontale (împingeri) ale reacțiunilor, indiferent de ipoteza de încărcare.

Rezolvarea acestor cadre se face în ansamblu, relațiile de determinare a celor patru reacțiuni V_A, V_B, H_A, H_B, fiind în ordine:

$$\Sigma M_{(B)} = 0;\ \Sigma M_{(A)} = 0;\ M_C^{st} = 0;\ M_C^{dr} = 0 \qquad (II.88)$$

iar relațiile de verificare:

$$\Sigma X = 0;\quad \Sigma Y = 0 \qquad (II.89)$$

Diagramele de eforturi se trasează apoi în mod obișnuit.

Cadrul considerat ca exemplu mai prezintă particularitatea că este simetric, dar încărcarea este oarecare. În acest caz, se poate face o descompunere a încărcării în una simetrică (fig.II.36.b) și una antisimetrică (fig.II.36.c), ceea ce conduce la simplificarea că diagramele de eforturi se pot trasa numai pe jumătate de structură, pe cealaltă jumătate diagramele de eforturi trasîndu-se apoi direct, întrucît:

- la încărcarea cu sarcini simetrice diagramele N și M sînt simetrice, iar diagrama T este antisimetrică (fig.II.36.e, f și g);

- la încărcarea cu sarcini antisimetrice, diagramele N și M sînt antisimetrice, iar diagrama T este simetrică (fig.II.36.i, j și k).

Diagramele totale se obțin apoi prin suprapunerea diagramelor de eforturi obținute în cele două ipoteze de încărcare și sînt indicate în fig.II.36.l, m și n.

Înainte de încheierea acestui subcapitol, mai subliniem încă odată legătura care există între deformata structurii și diagrama de momente încovoietoare. În fig.II.37 sînt prezentate

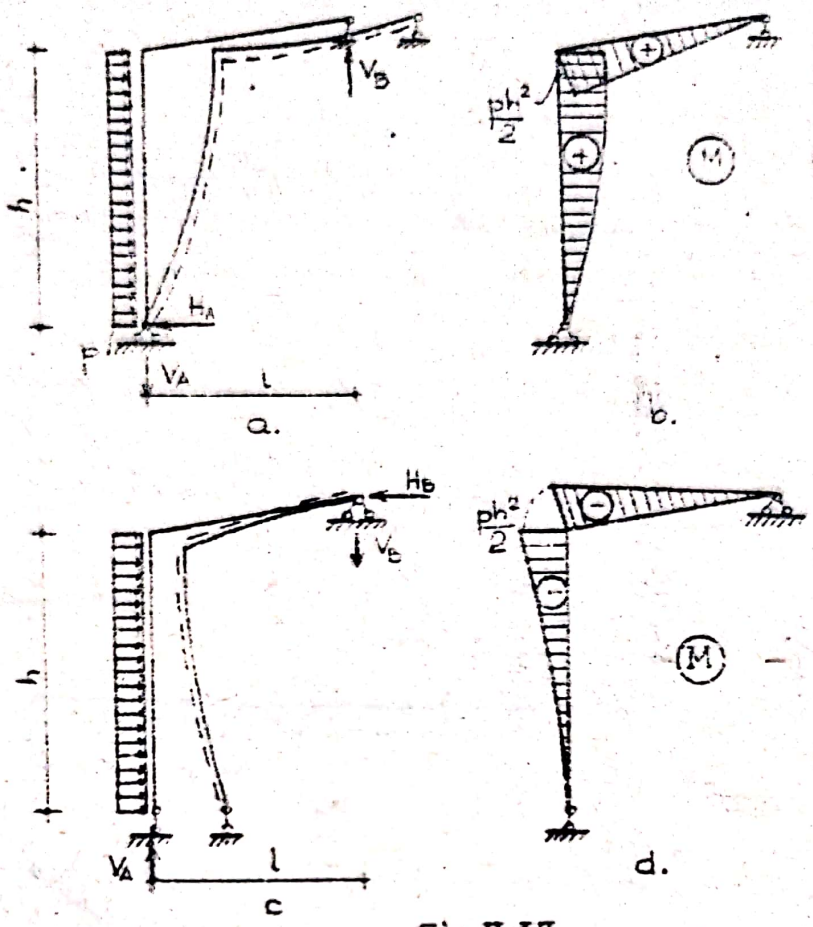


Fig. II-37

două bare cotite care diferă prin modul de dispunere a legăturilor, ceea ce conduce la deformate diferite şi, ca o consecinţă, la diagrame de momente diferite. Aceasta datorită faptului că la prima bară fibra tensionată a barelor se găseşte la partea interioară (fig.II.37.a şi b), iar la cea de a doua bară la partea exterioară (fig.II.37.c şi d).

II.1.6. Cazul sarcinilor transmise indirect.

II.1.6.1. Rezolvarea pe cale analitică.

Se consideră cazul foarte frecvent al structurilor de poduri, cînd sarcinile se aplică pe longeroni şi se transmit la grinda principală prin intermediul elementelor transversale

numite antretoaze (fig.II.38.a).

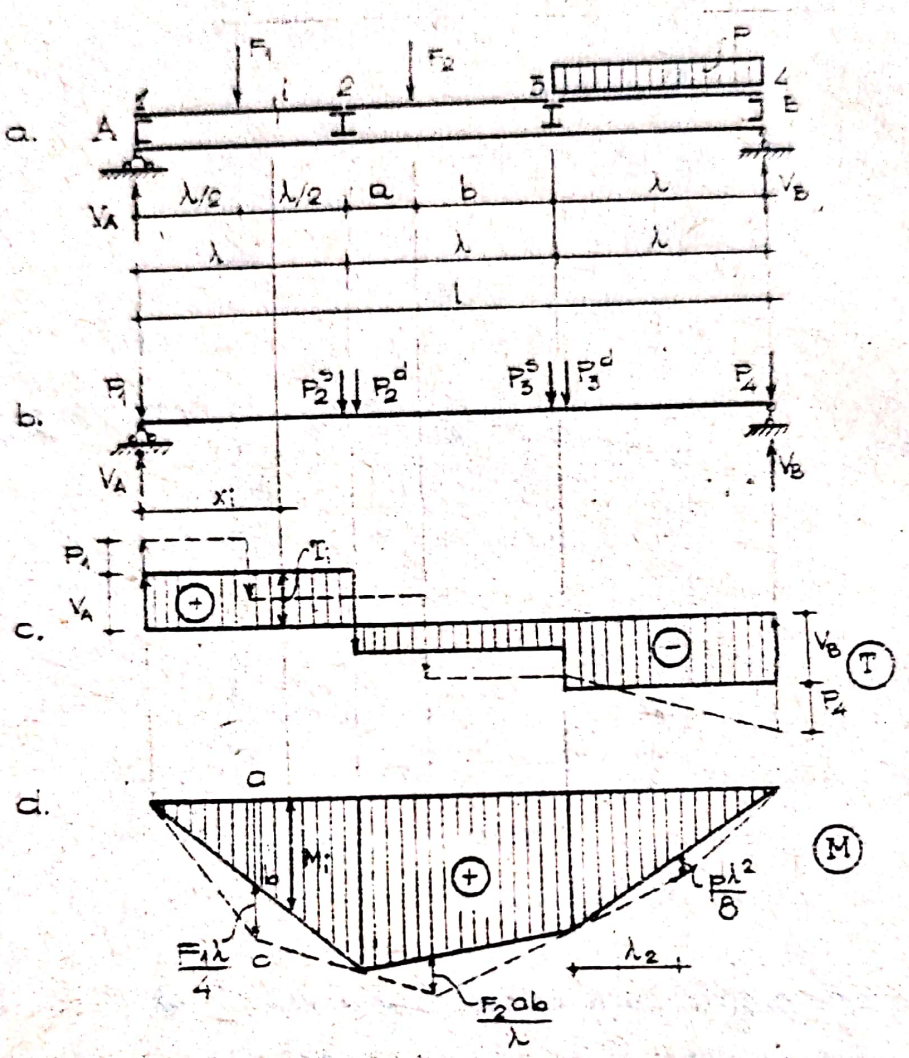


Fig II-38

Longeronii se consideră ca elemente simplu rezemate pe cîte două antretoaze, distanța dintre două antretoaze se numește panou și se notează cu λ , reprezentînd deschiderea de calcul a unui longeron.

Grinda principală împreună cu longeronii și antretoazele alcătuiesc un ansamblu geometric nedeformabil, deci reacțiunile din reazemele grinzii principale vor fi aceleași, indiferent de faptul că sarcinile acționează direct sau indirect.

Pentru grinda considerată

$$T_A = \frac{\sum M_{(B)}}{\ell} = \frac{F_1\left(\frac{\lambda}{2}+2\lambda\right)+F_2(b+\lambda)+p\frac{\lambda^2}{2}}{\ell}$$

$$V_B = \frac{\sum M_{(A)}}{\ell} = \frac{F_1\frac{\lambda}{2}+F_2(\lambda+a)+p\lambda\left(2\lambda+\frac{\lambda}{2}\right)}{\ell}$$

Sarcinile concentrate care acționează asupra grinzii principale vor fi componentele sumate ale încărcărilor de pe longeroni, transmise în dreptul antretoazelor, adică:

$$P_1 = \frac{F_1}{2}$$

$$P_2 = P_2^s + P_2^d = \frac{F_1}{2} + \frac{F_2\, b}{\lambda}$$

$$P_3 = P_3^s + P_3^d = \frac{F_2 a}{\lambda} + \frac{p\lambda}{2}$$

$$P_4 = \frac{p\lambda}{2}$$

Eforturile în grinda principală vor diferi de cele care s-ar produce în cazul în care sarcinile ar acționa direct pe acest element. Astfel dacă scriem eforturile într-o secțiune oarecare la distanța x_i de reazemul A:

- cu sarcinile aplicate direct pe grinda principală:

$$T_i = V_A - F_1$$

$$M_i = V_A \cdot x_i - F_1\left(x_i - \frac{\lambda}{2}\right) = (V_A - F_1)\,x_i + \frac{F_1 \cdot \lambda}{2}$$

- cu sarcinile aplicate pe longeroni, deci acționînd indirect asupra grinzii principale:

$$T_i' = V_A - P_1 = V_A - \frac{F_1}{2} \neq T_i$$

$$M_1' = V_A x_1 - P_1 \cdot x_1 = (V_A - \frac{F_1}{2}) x_1 \neq M_1$$

Dacă se scrie însă momentul încovoietor în grinda principală într-o secțiune din dreptul unei antretoaze:

- cu sarcinile aplicate direct:

$$M_2 = V_A \cdot \lambda - F_1 \frac{\lambda}{2}$$

- cu sarcinile aplicate indirect:

$$M_2' = V_A \cdot \lambda - P_1 \cdot \lambda = V_A \cdot \lambda - \frac{F_1}{2} \cdot \lambda = M_2$$

Deci în secțiunile din dreptul antretoazelor, momentele încovoietoare au aceleași valori, indiferent dacă sarcinile se aplică direct sau indirect.

In fig.II.38.c și d sînt trasate diagramele de forțe tăietoare și momente încovoietoare, atît pentru cazul cînd sarcinile s-ar aplica direct pe grinda principală (punctat), cît și pentru cazul considerat al transmiterii indirecte a încărcărilor (cu linie plină).

Evident că în cazul transmiterii indirecte, diagramele au caracteristicile corespunzătoare acțiunii unor sarcini concentrate, indiferent de încărcările de pe longeroni.

Se constată ușor că porțiunile care se scad din diagrama de momente (zonele dintre diagrama punctată și cea cu linie plină), sînt tocmai diagramele de momente ale longeronilor considerați ca grinzi simplu rezemate pe cîte două antretoaze și încărcate cu sarcinile corespunzătoare.

Astfel, în primul panou:

$$\overline{bc} = \overline{ac} - \overline{ab}$$

unde:

$\overline{ac}$ = ordonata din diagrama de momente în cazul aplicării

directe a sarcinilor;

$\overline{ab}$ = ordonata din diagrama de momente în cazul aplicării indirecte a sarcinilor deci:

$$\overline{bc} = V_A \frac{\lambda}{2} - (V_A \frac{\lambda}{2} - P_1 \frac{\lambda}{2}) = V_A \frac{\lambda}{2} - (V_A \frac{\lambda}{2} - \frac{F_1}{2} \cdot \frac{\lambda}{2})$$

sau:

$$\overline{bc} = \frac{F_1 \lambda}{4}$$

adică ordonata maximă a diagramei de momente pe grinda simplu rezemată de deschidere λ si încărcată cu sarcina F_1 la mijloc (longeronul 1-2).

La fel rezultă că în panoul al doilea ordonata maximă a diagramei care se scade are valoarea $\frac{F_2\, ab}{\lambda}$, iar în pancul al treilea ordonata maximă a diagramei parabolice care se scade valoarea $\frac{p\lambda^2}{8}$ (ordonata de moment maximă pentru longeronul simplu rezemat cu deschiderea λ și încărcat cu sarcina distribuită de intensitate p).

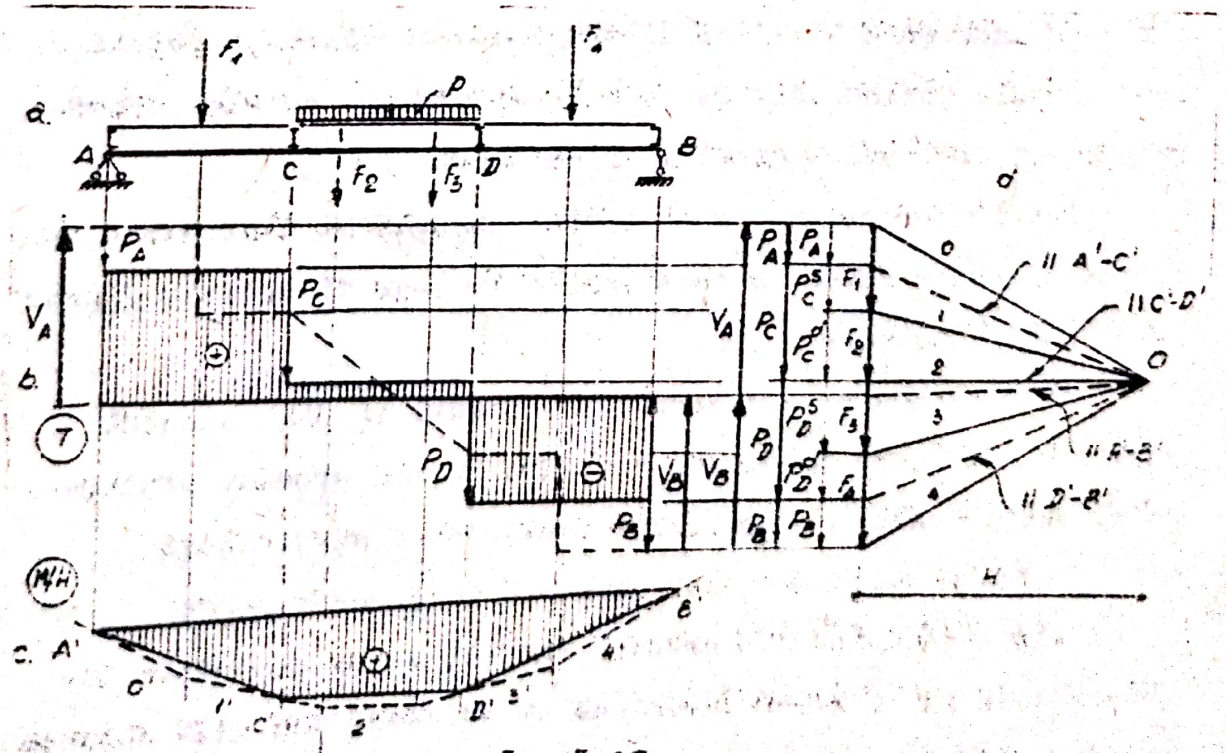


Fig. II 39

II.1.6.1. Rezolvarea pe cale grafică

Se consideră grinda simplu rezemată din fig.II.39.a, având trei panouri.

Se construieşte cîte un poligon al forţelor pentru încărcările de pe fiecare longeron, folosind aceleaşi pol O. Ducînd paralele la liniile de închidere parţiale A'- C', C'- D' şi D'- B', se determină componentele încărcărilor de pe longeroni în dreptul antretoazelor: P_A, P_C^s (panoul A-C), P_C^d, P_D^s (panoul C-D) şi P_D^d, P_B (panoul D-B). Forţele concentrate totale care acţionează asupra grinzii principale sînt P_A, $P_C = P_C^s + P_C^d$, $P_D = P_D^s + P_D^d$ şi P_B.

Reacţiunile V_A şi V_B se determină cu ajutorul paralelei dusă din polul O la linia de închidere A'- B' şi apoi se trasează prin translarea sarcinilor din poligonul de forţe diagrama de forţe tăietoare.

Ordonatele din poligonul funicular, măsurate faţă de linia de închidere A'- B' şi multiplicate cu distanţa polară H reprezintă - ţinînd cont de scările alese - momentele încovoietoare în secţiunile grinzii principale.

Pentru comparaţie, s-au trasat punctat şi diagramele de eforturi pentru cazul în care sarcinile s-ar fi aplicat direct pe grinda principală.

Rezultă aceleaşi observaţii obţinute şi din calculul analitic, din care trebuieso reţinute în mod special următoarele, pentru cazul transmiterii indirecte a sarcinilor:

- forţa tăietoare este constată pe fiecare panou;

-în secţiunile din dreptul antretoazelor momentele încovoietoare au aceleaşi valori ca şi în cazul acţiunii directe a sarcinilor, iar în celelalte secţiuni sînt mai mici decît în

cazul că sarcinile ar acționa direct pe grinda principală.

- porțiunile care se scad din diagrama de momente încovoietoare, sînt diagramele corespunzătoare fiecărui longeron considerat ca grindă simplu rezemată pe două antretoaze și încărcat cu sarcinile aferente.

II.2. Utilizarea principiului deplasărilor virtuale

II.2.1. Considerații generale.

Așa cum se cunoaște din Mecanică, una din posibilitățile de exprimare a echilibrului static este utilizarea principiului deplasărilor virtuale, care se enunță astfel: condiția necesară și suficientă pentru ca un ansamblu de forțe care acționează asupra unui sistem material să fie în echilibru, este ca pentru orice deplasări virtuale infinit mici, compatibile cu legăturile sistemului, lucrul mecanic total să fie egal cu zero. Acest lucru mecanic produs de un sistem de forțe cu niște deplasări virtuale ale punctelor lor de aplicație, se numește lucru mecanic virtual, iar condiția de echilibru se scrie simbolic astfel:

$$(L.m.v) = 0 \qquad (II.90)$$

Pentru înțelegerea modului de utilizare a acestui principiu, este necesară precizarea cîtorva elemente și anume:

1. Lucru mecanic.

Mărimea lucrului mecanic efectuat de o acțiune (forță sau moment), al cărei punct de aplicație suferă o deplasare (deplasare liniară sau rotire), se determină ca produs scalar între vectorul acțiune și vectorul deplasare corespunzător.

Considerînd un ansamblu de forțe și momente, lucrul mecanic total are expresia:

$$L = \sum \pm (\bar{F}_i \cdot \bar{\delta}_i) + \sum \pm (\bar{M}_i \cdot \bar{\theta}_i) \qquad \text{(II.91.a)}$$

sau:

$$L = \sum \pm [F_i \cdot \delta \cdot \cos(\bar{F}_i, \bar{\delta}_i)] + \sum \pm [M_i \cdot \theta_i \cdot \cos(\bar{M}_i, \bar{\theta}_i)] \qquad \text{(II.91.b)}$$

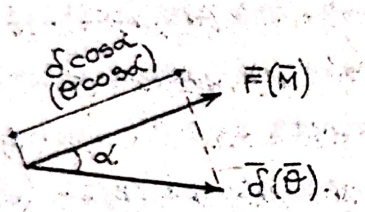


Fig. II-40

Deci, mărimea lucrului mecanic se calculează ca produs între acţiuni şi proiecţiile deplasărilor pe direcţia acţiunilor (fig.II.40).

Semnul lucrului mecanic este plus atunci cînd acţiunea şi deplasarea au acelaşi sens şi minus în caz contrar. In cazul curent al forţelor cuprinse în acelaşi plan cu axa barei, atît vectorul moment încovoietor cît şi vectorul rotire sînt perpendiculari pe planul forţelor, deci $\cos(\bar{M}_i, \bar{F}_i) = 1$ şi mărimea lucrului mecanic al momentelor se calculează ca produs direct între aceste momente şi rotirilor corespunzătoare.

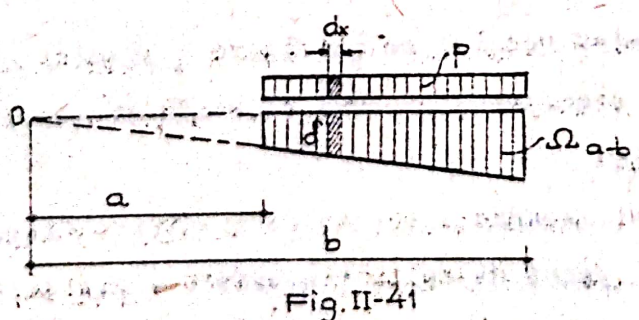


Fig. II-41

Pentru forţe, mărimea lucrului mecanic se calculează ca produs între aceste forţe şi deplasările punctelor de aplicaţii pe direcţia forţelor respective.

In cazul unei sarcini distribuite uniform (fig.II.41), lucrul mecanic total va avea mărimea:

$$L = \int_a^b p\,dx\,\delta = p\int_a^b \delta\,dx = p\,\Omega_{a-b} \qquad \text{(II.92)}$$

adică mărimea lucrului mecanic se calculează ca produs între intensitatea încărcării și aria suprafeței cuprinsă între poziția nedeplasată și poziția deplasată a sistemului de pe porțiunea pe care este distribuită încărcarea.

2. Deplasări virtuale, lucru mecanic virtual.

O structură este un sistem cu legături complete, care nu are deci deplasări reale. Pentru aplicarea principiului deplasărilor virtuale, se suprimă una sau mai multe legături exterioare sau interioare, dar pentru ca sistemul să rămînă echivalent cu sistemul real, în locul legăturilor suprimate se introduc forțele sau eforturile corespunzătoare. Astfel, la grinda simplu rezemată din fig.II.42, suprimînd rezemul simplu din B, se introduce în loc reacțiunea V_A, astfel că deplasarea reală din B rămîne zero.

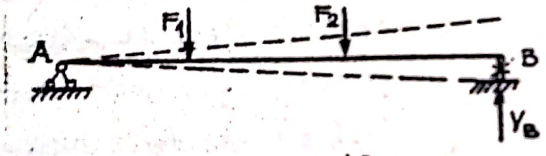


Fig.II-42

Pe acest sistem echivalent, care din punct de vedere al legăturilor este un sistem cinematic (labil) - dar care nu are nici el deplasări reale-se pot imagina niște deplasări independente de acțiunile exterioare, dar compatibile cu legăturile rămase. In cazul grinzii din fig.II.42, această deplasare poate fi o rotire în jurul articulației A, în sens orar sau antiorar.

Aceste deplasări, de mărime infinit mică și care duc sistemul într-o poziție deplasată imaginară, se numesc deplasări virtuale, iar lucrul mecanic calculat cu aceste depla-

sări se numeşte lucru mecanic virtual. Intrucît deplasările virtuale sînt infinit mici, lucrul mecanic virtual este un lucru mecanic elementar:

$$dL = \Sigma \pm \left(\bar{F}_i \cdot d\bar{\delta}_i\right) + \Sigma \pm \left(\bar{M}_i \cdot d\bar{\theta}_i\right) \qquad \text{(II.93)}$$

Pentru simplitatea exprimării, deplasările virtuale se vor nota totuşi cu δ şi θ iar lucrul mecanic cu L, subînţelegînd că lucrăm de fapt cu mărimi infinit mici.

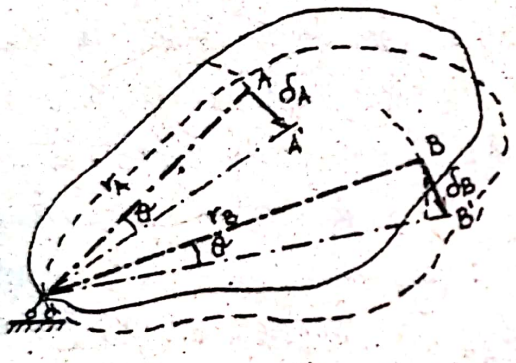


Fig.II-43

Din modul de definire a deplasărilor virtuale, rezultă şi caracteristicile acestora:

a) O deplasare virtuală poate fi considerată ca infinitul mic al începutului unei mişcări, deci direcţia ei va coincide cu direcţia vitezei punctului respectiv, adică va fi perpendiculară pe raza vectoare a punctului (dreapta care uneşte centrul de rotaţie al sistemului, cu punctul respectiv). Astfel pentru corpul din fig.II.43:

$$\left.\begin{aligned} \delta_A &\perp r_A \\ \delta_B &\perp r_B \end{aligned}\right\} \quad \text{s.a.m.d.} \qquad \text{(II.94)}$$

b) Mărimea deplasărilor virtuale se calculează astfel (fig.II.43):

$$\left.\begin{aligned} \delta_A &= r_A \cdot tg\theta = r_A \cdot \theta \\ \delta_B &= r_B \cdot tg\theta = r_B \cdot \theta \end{aligned}\right\} \quad \text{s.a.m.d.} \qquad \text{(II.95)}$$

adică deplasările virtuale sînt proporţionale cu razele vectoare ale punctelor respective, coeficientul de proporţionalitate fiind rotirea θ care se produce în jurul centrului de rotaţie al corpului.

La o structură static determinată, scoaterea unei legături exterioare sau interioare transformă structura într-un sistem cinematic pentru deplasări virtuale. Acest sistem cinematic cu un singur grad de libertate (o singură posibilitate de deplasare), se numeşte <u>mecanism.</u>

II.2.2. <u>Determinarea reacţiunilor şi a eforturilor folosind principiul deplasărilor virtuale.</u>

Principial, pentru calculul unei reacţiuni sau a unui efort secţional, se procedează astfel:

- se suprimă legătura corespunzătoare reacţiunii sau efortului secţional pe care dorim să-l determinăm şi se înlocuieşte această legătură cu forţa de legătură sau cu perechea de eforturi respective;

- se consideră o deplasare virtuală a mecanismului obţinut, compatibilă cu legăturile rămase;

- se scrie condiţia de echilibru prin lucru mecanic virtual a sistemului de forţe (acţiuni, reacţiuni, eforturi), din care rezultă mărimea căutată.

a) <u>Calculul reacţiunilor.</u>

Pentru determinarea reacţiunii V_B la grinda simplu rezemată din fig.II.44.a, se suprimă reazemul simplu şi se înlocuieşte cu forţa de legătură corespunzătoare (fig.II.44.b).

Considerînd deplasarea virtuală posibilă (rotire în jurul articulaţiei A), acţiunile F_1 şi F_2 şi reacţiunea V_B vor efectua cîte un lucru mecanic. Condiţia de echilibru a sistemului de forţe (F_1, F_2, V_A, V_B) este:

$$F_1 \delta_1 + F_2 \delta_2 - V_B \cdot \delta_B = 0$$

Cele trei deplasări se pot exprima în funcție de unghiul de rotire θ

$$\delta_1 = a_1 \theta \; ; \quad \delta_2 = a_2 \theta \; ; \quad \delta_B = \ell \theta$$

deci:

$$F_1 a_1 \theta + F_2 a_2 \theta - V_B \ell \theta = 0$$

de unde (simplificînd parametrul θ al deplasării), rezultă:

$$V_B = \frac{F_1 a_1 + F_2 a_2}{\ell} = \frac{\sum M_{(A)}}{\ell}$$

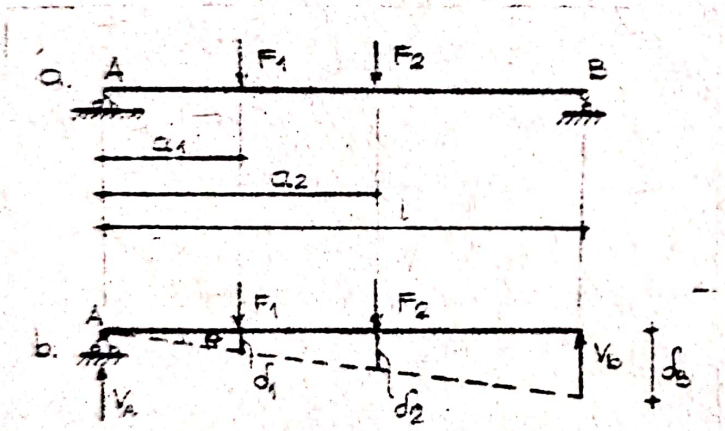


Fig. II-44

expresie care, evident, se poate obține și din ecuația de momente față de articulația A.

In mod similar se poate determina reacțiunea V_A.

b) <u>Calculul eforturilor</u>.

Fiecare secțiune a unei bare poate fi considerată ca o legătură completă între două porțiuni ale barei, deci alcătuită din trei legături simple care împiedică deplasarea relativă în lungul axei barei, deplasarea relativă normală pe axa barei și rotirea relativă între fețele secțiunii (fig.II.45.a), asigurînd continuitatea în punctul respectiv.

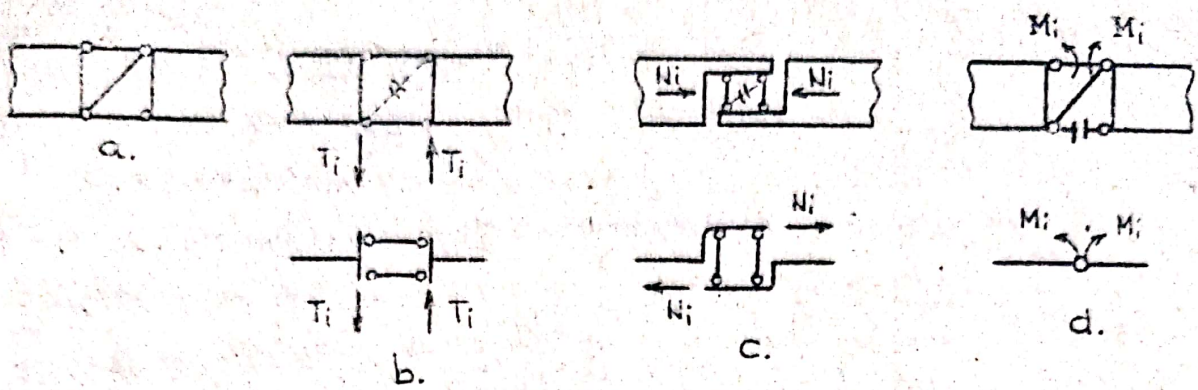


Fig. II-45

Pentru determinarea unuia din cele trei eforturi(T,N,M) se face o secţiune incompletă, prin suprimarea legăturii simple corespunzătoare, care se înlocuieşte cu perechea de eforturi respective.

Astfel:

- pentru forţa tăietoare, se suprimă legătura care împiedică deplasarea relativă normală pe axa barei, deci pendulul diagonal (fig.II.45.b);

- pentru forţa axială se suprimă legătura care împiedică deplasarea relativă după direcţia axei barei (fig.II.45.c);

- pentru momentul încovoietor se suprimă legătura care împiedică rotirea, în secţiunea respectivă rămînînd deci o articulaţie şi perechea de momente M_i (fig.II.45.d).

In fig.II.45 este indicat şi modul simplificat de reprezentare a secţiunilor incomplete în cele trei cazuri de înlocuire a unor legături simple cu eforturi secţionale, în vederea obţinerii unor mecanisme pentru deplasări virtuale şi a aplicării principiului lucrului mecanic virtual.

După stabilirea mecanismului, se procedează în mod similar ca la determinarea reacţiunilor, din condiţia de echilibru scrisă prin lucru mecanic virtual rezultînd efortul căutat.

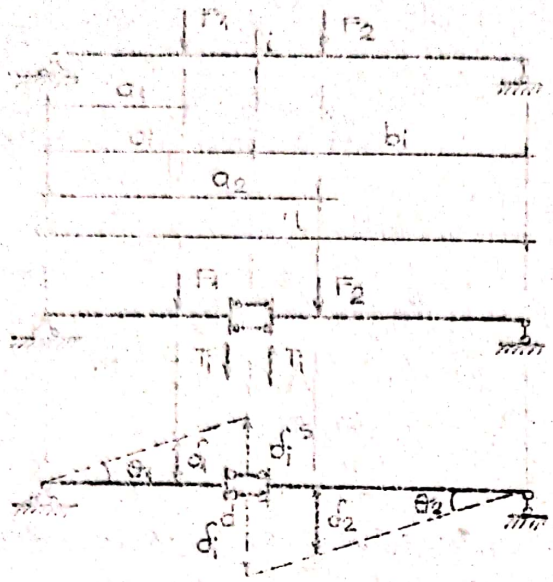


Fig. II-46

Astfel, dacă se consideră grinda din fig.II.46.a, pentru determinarea forţei tăietoare din secţiunea i se va opera pe mecanismul din fig.II.46.b. La acest mecanism, deplasările virtuale posibile ale celor două porţiuni de grindă din stînga şi din dreapta secţiunii i, sînt rotiri în jurul punctelor de rezemare. Cele două legături simple din secţiune, paralele între ele, vor face ca porţiunile de grindă să se deplaseze paralel una faţă de cealaltă, adică $\theta_1 = \theta_2$ (fig.II.46.c).

Ţinînd seama de semnele termenilor de lucru mecanic, relaţia de echilibru a sistemului de forţe şi eforturi va avea forma:

$$-F_1 \delta_1 - T_i \cdot \delta_i^s - T_i \delta_i^d + F_2 \cdot \delta_2 = 0$$

sau:

$$-F_1 \delta_1 - T_i (\delta_i^s + \delta_i^d) + F_2 \cdot \delta_2 = 0$$

de unde:

$$T_i = \frac{F_1 \delta_1 - F_2 \delta_2}{\delta_i^s + \delta_i^d}$$

Deplasările din ultima relaţie se pot exprima în funcţie de rotirile $\theta_1 = \theta_2$:

$$\delta_1 = a_1 \cdot \theta_1$$

$$\delta_2 = (\ell - a_2) \cdot \theta_2 = (\ell - a_2) \cdot \theta_1$$

$$\delta_i^s = a_i \cdot \theta_1$$

$$\delta_i^d = (\ell - a_i) \theta_2 = (\ell - a_i) \theta_1$$

Dacă se înlocuiesc aceste deplasări în expresia lui T_1, parametrul O_1 se simplifică și se obține în final:

$$T_1 = - \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{\ell} + P_2 = - V_B + P_2$$

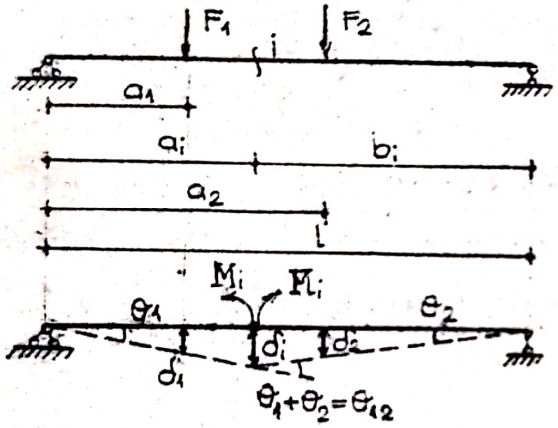


Fig. II-47

adică, evident, aceeași expresie ca în cazul determinării obișnuite a forței tăietoare.

Pentru a determina momentul încovoietor din secțiunea i la aceeași grindă (fig.II.47.a), se folosește mecanismul din fig.II.47.b, la care deplasările virtuale posibile sînt rotiri în jurul reazemelor.

Relația de echilibru scrisă prin lucru mecanic virtual are în acest caz forma:

$$F_1 \cdot \delta_1 + F_2 \cdot \delta_2 - M_i \cdot \theta_1 - M_i \cdot \theta_2 = 0$$

sau:

$$F_1 \cdot \delta_1 + F_2 \cdot \delta_2 - M_i (\theta_1 + \theta_2) = 0$$

de unde:

$$M_i = \frac{F_1 \cdot \delta_1 + F_2 \cdot \delta_2}{\theta_1 + \theta_2}$$

Intre cele două rotiri θ_1 și θ_2, se poate stabili o relație astfel:

$$\delta_i = a_i \cdot \theta_1 = b_i \cdot \theta_2$$

deci:

$$\theta_2 = \frac{a_i}{b_i}\,\theta_1$$

In acest fel, se poate scrie:

$$\delta_1 = a_1 \cdot \theta_1$$

$$\delta_2 = (\ell - a_2)\,\theta_2 = (\ell - a_2)\cdot \frac{a_i}{b_i}\,\theta_1$$

$$\theta_1 + \theta_2 = \theta_1 + \frac{a_i}{b_i}\cdot\theta_1 = \left(1 + \frac{a_i}{b_i}\right)\cdot\theta_1 = \frac{\ell}{b_i}\cdot\theta_1$$

Inlocuind aceste date în expresia lui M_i, parametrul θ_1 al deplasării se simplifică și se obține în final aceeași relație ca și la determinarea obișnuită a momentului din secțiunea i și anume:

$$M_i = \frac{F_1(\ell - a_1) + F_2(\ell - a_2)}{\ell}\,a_i - F_1(a_i - a_1) = V_A \cdot a_i = F_1(a_i - a_1)$$

De reținut avantajul metodei, care constă în aceea că reacțiunea sau efortul căutat se determină direct, dintr-o relație totdeauna cu o singură necunoscută.

Pentru structuri mai complexe ca alcătuire, ca și pentru încărcări mai complicate, aplicarea principiului deplasărilor virtuale necesită cunoașterea mai aprofundată a unor elemente legate de cinematica mecanismelor, elemente care sînt dezvoltate în subcapitolul următor.

II.2.3. Analiza cinematică a sistemelor plane alcătuite din bare.

II.2.3.1. Centre instantanee. Teorema colinearităţii centrelor instantanee.

Orice mişcare a unui corp în plan la un moment dat, poate fi considerat ca o rotire în jurul unui punct fix, numit centru instantaneu absolut de rotaţie sau pol absolut.

Sistemele cinematice cu un singur grad de libertate (mecanismele) care intervin în calculul reacţiunilor sau eforturilor pe baza principiului deplasărilor virtuale, pot fi alcătuite din unul sau mai multe elemente (corpuri) şi stabilirea deplasărilor necesare în acest caz impune ca o primă etapă determinarea poziţiei centrelor instantanee de rotaţie.

a) Dacă mecanismul este alcătuit dintr-un singur corp (fig.II.48), determinarea centrului instantaneu absolut de rotaţie se poate face dacă se cunosc direcţiile de deplasare a două puncte. Stiind că deplasările se produc perpendicular pe razele vectoare, se duc din punctele A şi B drepte normale pe δ_A şi δ_B şi la intersecţia acestora se găseşte polul absolut al corpului. Notaţia utilizată frecvent pentru aceşti poli este (1,T), (2,T) etc., primul indice arătînd denumirea corpului (I,II etc.), iar al doilea referindu-se la suportul pe care se găseşte punctul fix de rotaţie. Cum acest suport este de obicei terenul, se foloseşte indicele T, chiar în cazul cînd centrul de rotaţie nu se află pe teren, ci pe un alt corp fix, sau chiar într-un punct oarecare din plan.

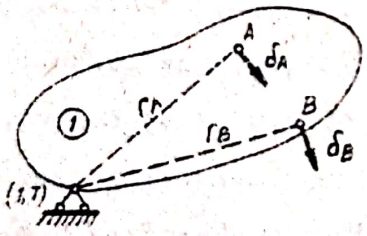


Fig. II.48.

Centrele instantanee absolute de rotaţie pot fi interpre-

tate de asemenea şi de centre relative de rotaţie, adică puncte de rotire relativă a unui corp faţă de alt corp considerat fix. In cazul polilor absoluţi, cele două corpuri sînt elementul la care ne referim (I,II etc.) şi terenul.

b) Cazul unui mecanism alcătuit din două corpuri avînd legăturile indicate în fig.II.49. Pentru corpul I, polul absolut (1,T) este, evident, articulaţia A.

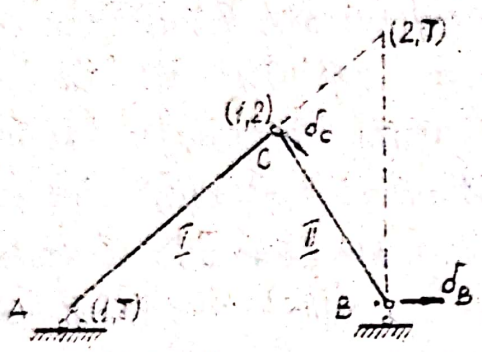


Fig. II-49

Articulaţia C de legătură între corpurile I şi II reprezintă polul relativ(1,2) de rotaţie al celor două corpuri. Determinarea polului absolut (2,T) este simplă, deoarece se cunosc direcţiile de deplasare a două puncte ale sale: punctul C, comun corpurilor I şi II se deplasează perpendicular pe raza vectoare A-C, iar punctul B se deplasează paralel cu suprafaţa de rezemare a reazemului simplu. Intersecţia perpendicularelor duse pe aceste două direcţii, care sînt de fapt prelungirea barei A-C şi direcţia reazemului simplu, determină polul absolut (2,T).

Acest caz ilustrează una din formele teoremei coliniarităţii (Aronhold): pentru două corpuri I şi II care fac parte dintr-un mecanism, la o deplasare relativă infinit mică, polii absoluţi (1,T), (2,T) şi polul relativ (1,2) corespunzător, se găsesc pe aceeaşi dreaptă.

c) Cazul unui mecanism alcătuit din trei corpuri (fig.II.50).

Articulaţiile A şi B reprezintă polii absoluţi ai corpurilor I şi III, iar articulaţiile interioare C şi D sînt polii

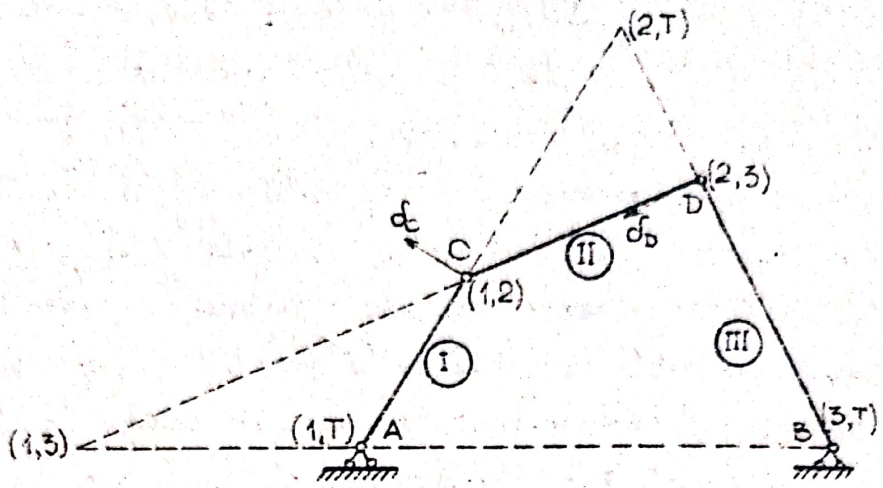


Fig. II-50

relativ (1,2) şi respectiv (2,3).

Pentru determinarea polului absolut al corpului II, se cunosc direcţiile de deplasare ale articulaţiilor C şi D, care sînt comune corpurilor I,II, respectiv corpurilor III, II; deci (2,T) se găseşte la intersecţia perpendicularelor duse pe direcţiile acestor deplasări, adică la intersecţia direcţiilor A-C şi B-D. Sau, folosindu-ne de teorema coliniarităţii amintită anterior, polul (2,T) trebuie să se găsească pe dreapta (1,T) - (1,2) şi respectiv pe dreapta (2,T) - (2,3), adică la intersecţia acestor două direcţii.

La acest sistem se mai poate determina şi polul relativ (1,3) astfel:

- din teorema coliniarităţii aplicată pentru corpurile I şi II, polul relativ (1,3) trebuie să se găsească pe dreapta (1,T) - (3,T);

- considerînd corpul II fix, polii (1,2) şi (2,3) devin poli absoluţi ai corpurilor I şi III şi aplicînd din nou teorema coliniarităţii pentru corpurile I şi III, pe dreapta (1,2) - (2,3) trebuie să se găsească şi polul relativ (1,3).

Deci, polul relativ (1,3) se găseşte la intersecţia dreptelor (A-B) şi (C-D) şi rezultă următoarea formă a teoremei coliniarităţii: pentru trei corpuri I, II, III, care fac parte dintr-un mecanism de o deplasare relativă infinit mică, polii relativi (1,2), (2,3) şi (1,3) sînt coliniari.

De fapt, aceasta este forma generală a teoremei coliniarităţii centrelor instantanee de rotaţie, prima formă enunţată anterior referindu-se la un caz particular, în care cele trei corpuri ale mecanismului sînt I, II şi terenul ,iar polii relativi corespunzători sînt (1,T), (2,T) şi (1,2).

d) <u>Cazul unui mecanism alcătuit din patru corpuri (fig.II.51)</u>

La acest sistem, se cunosc direct: polul absolut (1,T) şi polii relativi (1,4), (1,2), (2,3) şi (3,4). Ceilalţi poli se determină pe baza celor analizate la cazurile precedente, în următoarea ordine:

- polul relativ (1,3) - la intersecţia direcţiei (1,2)-(2,3) cu direcţia (1,4) - (3,4);

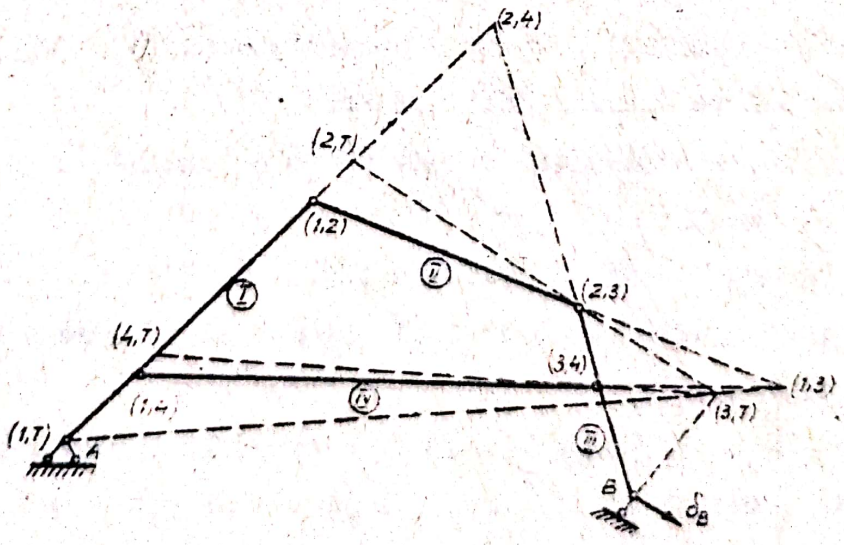


Fig. II.51

- polul absolut (3,T) - la intersecţia direcţiei (1,T) - (1,3) cu direcţia reazemului simplu din B (perpendiculara pe direcţia de deplasare a punctului B, care se produce paralel cu suprafaţa de rezemare);

- polul absolut (2,T) - la intersecţia direcţiilor (1,T) - (1,2) şi (3,T) - (2,3);

- polul absolut (4,T) - la intersecţia direcţiilor (1,T) - (1,4) şi (3,T) - (3,4);

- polul relativ (2,4) - la intersecţia direcţiilor (1,4) - (1,2) şi (3,4) - (2,3).

De reţinut faptul că dacă într-un mecanism două corpuri I şi III sînt legate prin două bare II şi IV articulate la capete, polul relativ (1,3) al celor două corpuri se găseşte la intersecţia celor două bare de legătură. Acest rezultat va fi utilizat la determinarea directă a unor poli relativi într-o serie de probleme din cadrul capitolelor următoare.

In cazul mecanismului din fig.II.46.b de exemplu, polul relativ al celor două porţiuni de grindă din stînga şi dreapta secţiunii i, legate cu cei doi penduli paraleli, se găseşte la infinit, ceea ce justifică faptul că porţiunile de grindă se deplasează paralel una faţă de calaltă.

II.2.3.2. <u>Diagrame şi epure de deplasări</u>.

<u>Pîrghia Jukovski</u>.

Pentru determinarea deplasării diferitelor puncte ale unui sistem atunci cînd acestuia i se dă o deplasare virtuală, se folosesc două tipuri de construcţii grafice:

a) <u>diagrame de deplasări</u> - care ne dau deplasările tuturor punctelor sistemului pe anumite direcţii;

b) <u>epure de deplasări (diagrame polare)</u>, cu ajutorul cărora se stabilesc deplasările unor anumite puncte ale sistemu-

lui, de obicei ale punctelor de aplicare a sarcinilor, în vederea scrierii relaţiei de echilibru prin lucru mecanic virtual.

a) Diagrame de deplasări.

La o deplasare virtuală a unui mecanism, fiecare punct al sistemului se deplasează pe o anumită direcţie şi anume perpendicular pe raza lui vectoare. Ceea ce ne interesează sînt însă nu deplasările punctelor pe aceste direcţii, ci proiecţiile deplasărilor pe anumite direcţii paralele cu direcţiile de acţionare a forţelor, în vederea scrierii relaţiilor de echilibru prin lucru mecanic virtual. Totalitatea proiecţiilor deplasărilor punctelor unui sistem pe o anumită direcţie, poartă denumirea de diagramă a deplasărilor pe direcţia respectivă.

Cum orice sistem de forţe plane se poate descompune pe două direcţii (de obicei pe verticală şi pe orizontală), rezultă că va fi necesar în general să construim diagramele de deplasări pe cele două direcţii şi acestea ne vor pune la dispoziţie toate elementele necesare pentru scrierea condiţiei de echilibru prin lucru mecanic virtual. In aceste diagrame de deplasări vom găsi şi unghiurile de rotire ale diferitelor corpuri ce alcătuiesc mecanismul, necesare scrierii lucrului mecanic al eventualelor momente (acţiuni sau eforturi) ce se găsesc pe sistem.

Principiul de construire a diagramelor de deplasări rezultă din fig.II.52, în care este reprezentat un corp oarecare I, care face parte dintr-un mecanism şi are centrul instantaneu absolut de rotaţie (1,T).

Deplasarea unui punct oarecare A al corpului I are mărimea:

$$\delta_A = r_A \cdot \theta \qquad \text{(II.96)}$$

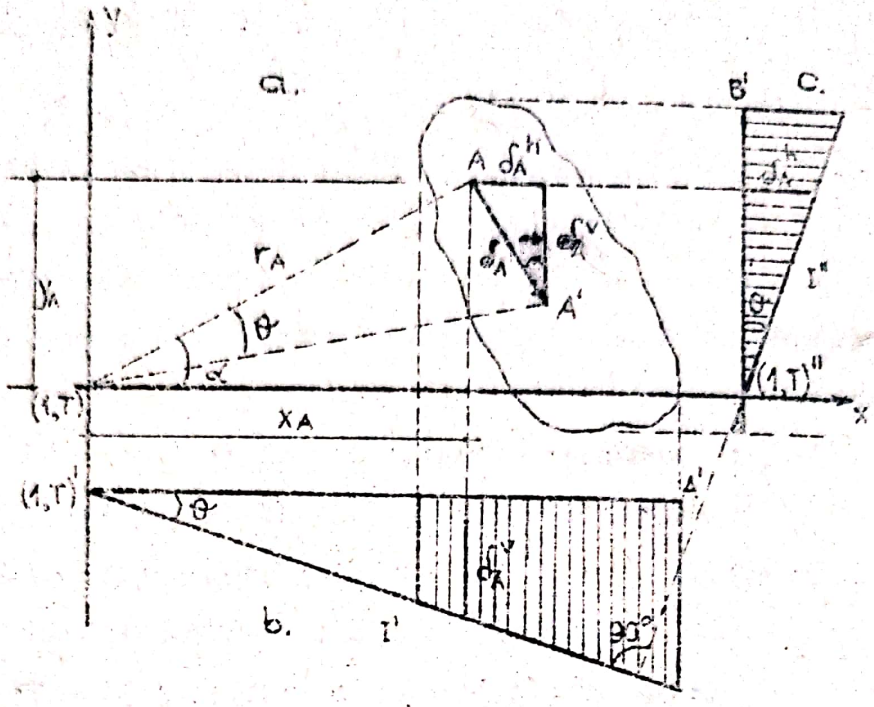


Fig. I-52

unde r_A reprezintă raza vectoare a punctului A, iar θ unghiul (infinit mic) cu care se rotește corpul I la o deplasare virtuală a mecanismului din care face parte.

Proiecțiile acestei deplasări pe direcție verticală și pe direcție orizontală au expresiile:

$$\delta_A^v = \delta_A \cdot \cos\alpha = r_A \cdot \theta \cdot \cos\alpha$$

$$\delta_A^h = \delta_A \cdot \sin\alpha = r_A \cdot \theta \cdot \sin\alpha$$

Considerînd un sistem de axe de coordonate cu originea în (1,T), se vede din fig.II.52.a că:

$$r_A \cdot \cos\alpha = x_A$$

$$r_A \cdot \sin\alpha = y_A$$

deci:

$$\delta_A^v = x_A \cdot \theta \qquad \text{(II.97.a)}$$

$$\delta_A^b = r_A \cdot \theta \qquad \text{(II.97.b)}$$

Ultimele două relaţii arată că proiecţiile deplasărilor pe direcţie verticală sînt proporţionale cu abscisele punctelor, iar proiecţiile deplasărilor pe direcţie orizontală sînt proporţionale cu ordonatele punctelor, atît abscisele cît şi ordonatele măsurîndu-se faţă de centrul instantaneu absolut de rotaţie.

Pe baza acestor constatări, diagrama deplasărilor pe verticală este cea din fig.II.52.b, adică o dreaptă I'înclinată cu unghiul θ şi cu linia de referinţă orizontală (1,T)'-A', iar diagrama deplasărilor pe orizontală este cea din fig. II.52.c, cu linia de referinţă verticală (1,T)" - R" şi cu aceeaşi înclinare θ faţă de această linie de referinţă.

Intrucît liniile de referinţă ale celor două diagrame sînt perpendiculare una pe alta, iar unghiul de rotire θ este acelaşi, rezultă că dreptele I'şi I" care delimitează cele două diagrame formează între ele un unghi drept. Această observaţie serveşte şi ca o posibilitate de verificare a unor diagrame de deplasări la sisteme mai complicate.

Pentru sistemul din fig.II.53, alcătuit din trei bare, prima operaţiune în vederea determinării diagramelor de deplasări este stabilirea centrelor instantanee absolute şi relative de rotaţie, după regulile analizate în subcapitolul precedent.

Apoi, se iau liniile de referinţă pentru cele două diagrame de deplasări, pe care se proiectează centrele instantanee absolute de rotaţie (1,T), (2,T), (3,T), (în dreptul acestor proiecţii deplasările vor fi nule). Se face şi convenţia - utilizată de altfel şi în fig.II.52 - de a nota cu "prim" tot ce se referă la diagrama deplasărilor pe verticală şi cu "second" tot ce se referă la diagrama deplasărilor pe orizontală.

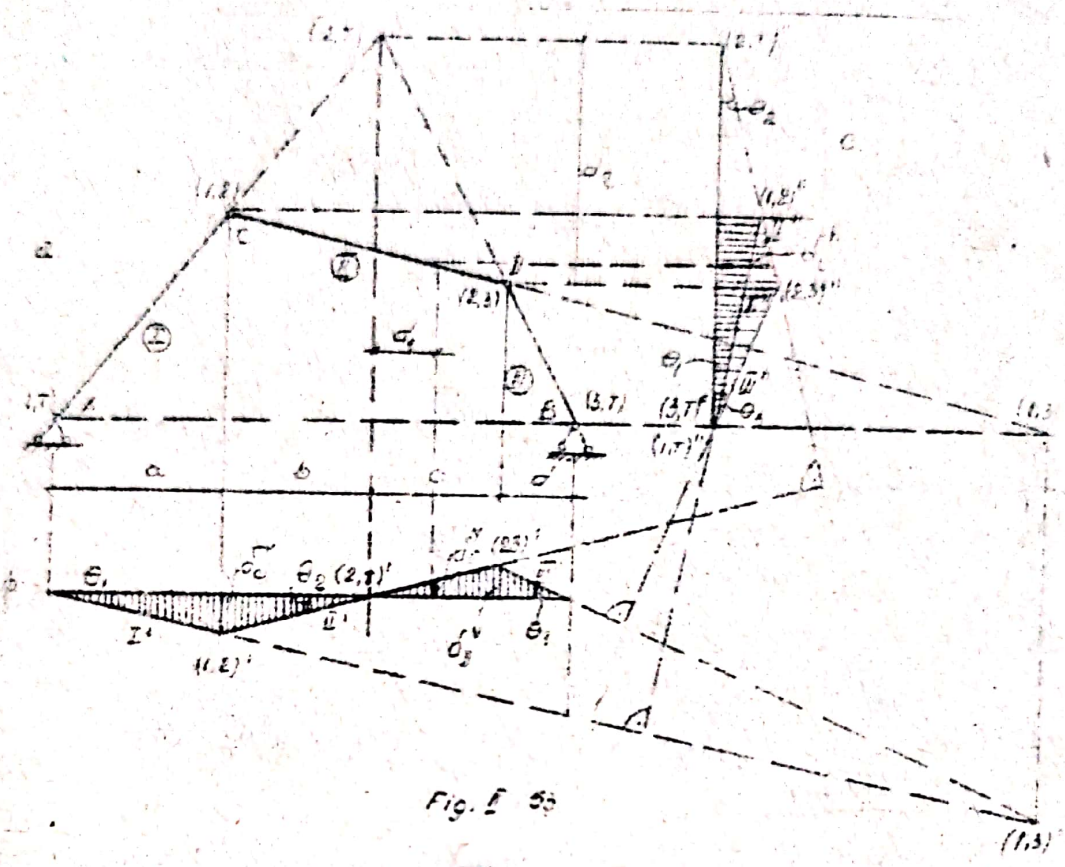


Fig. 5

Pentru construirea diagramei de deplasări pe verticală, se începe de exemplu cu corpul I, căruia i se dă o rotire arbitrară θ_1, rezultînd diagrama I; în continuare, cunoscînd poziția (1,2)'a polului relativ (1,2) și proiecția (2,T)'a polului absolut (2,T), se construiește diagrama II'a corpului II și în mod similar - folosindu-se de punctul comun (2,3)'și de (3,T)'- se construiește diagrama III'.

Diagrama deplasărilor pe orizontală se construiește în mod asemănător și știind în plus că I" trebuie să fie perpendicular pe I; II" trebuie să fie perpendicular pe II; iar III" trebuie să fie perpendicular pe III', ceea ce înseamnă de fapt păstrarea acelorași unghiuri θ_1, θ_2, θ_3 din diagrama deplasărilor pe verticală și în diagrama deplasărilor pe orizontală.

O verificare suplimentară pe care o putem face aici este că în dreptul polului relativ (1,3), corpurile I și III, tre-

buie să aibă aceeaşi deplasare absolută (deplasarea relativă dintre ele să fie nulă), ceea ce înseamnă că dreptele I' şi III' trebuie să se intersecteze în dreptul proiecţiei (1,3)'a polului (1,3).

Intrucît sistemul are un singur grad de libertate, toate deplasările şi rotirile se pot exprima în funcţie de un singur parametru. Alegînd de exemplu ca parametru rotirea θ_1, celelalte două rotiri se exprimă în funcţie de aceasta, pe baza egalităţilor (fig.II.53.b):

$$\delta_c^v = a \cdot \theta_1 = b \cdot \theta_2 \quad \text{deci:} \quad \theta_2 = \frac{a}{b}\theta_1$$

$$\delta_D^v = c \cdot \theta_2 = d \cdot \theta_3 \quad \text{deci:} \quad \theta_3 = \frac{c}{d}\theta_2 = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}\theta_1$$

Deplasările pe verticală şi pe orizontală ale unui punct oarecare i, se pot scrie de asemenea în funcţie de acest parametru:

$$\delta_i^v = d_1 \cdot \theta_2 = d_1 \cdot \frac{a}{b} \cdot \theta_1$$

$$\delta_i^h = d_2 \cdot \theta_2 = d_2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \theta_1$$

Toate distanţele care intră în relaţiile scrise (a, b, c, d, d_1, d_2) sînt caracteristici geometrice cunoscute ale sistemului, iar parametrul θ_1 se va simplifica din ecuaţia de lucru mecanic virtual.

Reamintim că atît rotirile θ_k, cît şi deplasările δ_i sînt mărimi infinit mici, dar ele se consideră amplificate cu un acelaşi coeficient arbitrar oricît de mare, astfel că se pot reprezenta la o scară de dimensiuni finite, coeficientul arbitrar de multiplicare simplificîndu-se din relaţia de lucru mecanic virtual odată cu parametrul deplasării.

b) Epure de deplasări (diagrame polare).

La sisteme mai complicate, la care determinarea centrelor instantanee de rotație este dificilă, sau în cazul cînd ne interesează numai deplasările unor anumite puncte ale unui sistem, se poate construi o epură de deplasări. Această construcție grafică constă în determinarea din aproape în aproape a deplasărilor punctelor caracteristice ale unui mecanism în raport cu un pol, fapt pentru care construcția grafică se mai numește și diagramă polară.

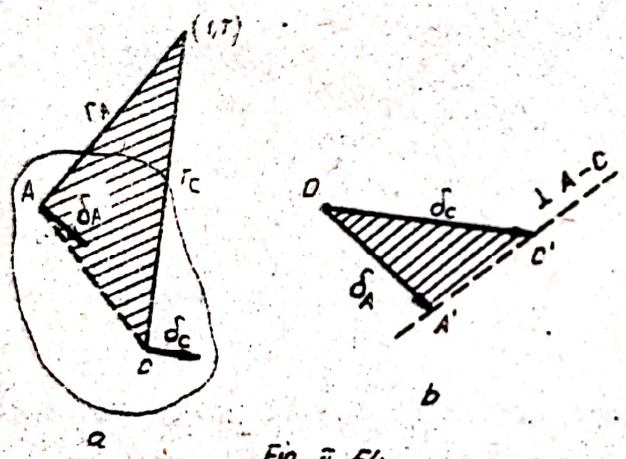


Fig. II 54

In principiu, la determinarea deplasării unui punct pot exista două situații:

1. Se urmărește determinarea deplasării unui punct C, cunoscînd-se direcția deplasării acestui punct și deplasarea δ_A a altui punct A care face parte din același corp cu punctul C. Considerînd corpul din fig.II.54.a și punctele A și C care au razele vectoare r_A și r_C se știe că δ_A este perpendicular pe r_A, δ_C este perpendicular pe r_C și de asemenea, că:

$$\delta_A = r_A \cdot \theta$$

$$\delta_C = r_C \cdot \theta$$

Pe baza acestor date și reprezentînd la o anumită scară vectorii δ_A și δ_C față de un pol O, rezultă că dreapta A'C' din triunghiul OA'C' este perpendiculară pe dreapta A-C din

triunghiul (1,T)AC, deoarece Δ OA'C' $\sim$ Δ (1,T)AC.

In consecinţă, cunoscînd deplasarea δ_A măsurată din polul O şi direcţia deplasării punctului C, punctul C' în diagrama polară se găseşte la intersecţia unei paralele la direcţia deplasării punctului C dusă prin polul O, cu o perpendiculară pe A-C (dreapta care uneşte cele două puncte) dusă prin A'. Deplasarea punctului C va fi astfel vectorul $\overrightarrow{O-C'}$.

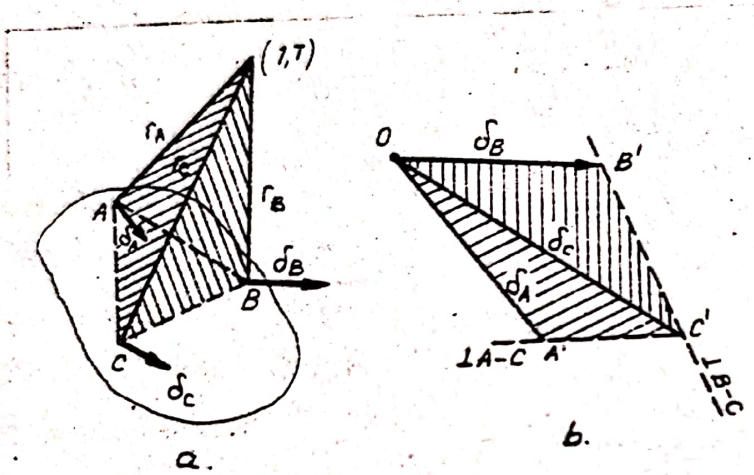


Fig. II.55.

2. Se urmăreşte determinarea deplasării unui punct C, cînd se cunosc deplasările δ_A şi δ_B ale altor două puncte A şi B din acelaşi corp cu punctul C (fig. II.55.a).

In acest caz, pe baza aceloraşi considerente din cazul precedent şi ducînd vectorii δ_A , δ_B , δ_C din polul O (fig.II.55.b), rezultă că:

- dreapta A'- C' din triunghiul O A'C' este perpendiculară pe dreapta A-C din triunghiul (1,T) AC, întrucît Δ OA'C' $\sim$ Δ (1,T) AC;

- dreapta B'- C' din triunghiul OB'C' este perpendiculară pe dreapta B-C din triunghiul (1,T) BC, întrucît OB'C' $\sim$ Δ (1,T)BC.

In consecinţă, cunoscînd deplasările δ_A şi δ_B , deci vectorii $\overrightarrow{O-A'}$ şi $\overrightarrow{O-B'}$ în diagrama polară, punctul C' se determină la intersecţia perpendicularei pe A-C dusă din A' cu perpendiculara pe B-C dusă din B', iar deplasarea punctului C este

vectorul $\overrightarrow{O-C}$.

Se consideră de exemplu sistemul din fig.II.56, la care, pentru calculul reacţiunii H_6, este necesară determinarea deplasărilor punctelor de aplicaţie ale forţelor, adică 2,4 şi 6.

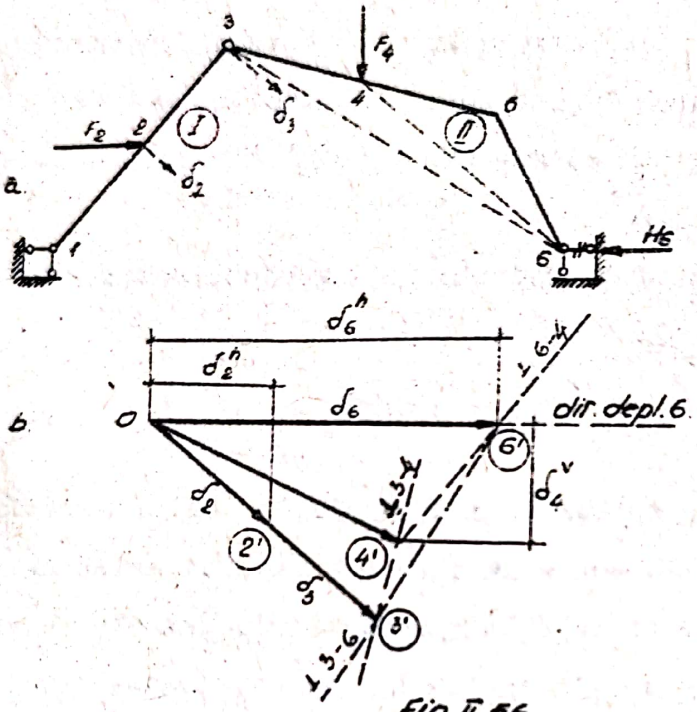


Fig II.56

Deplasarea punctului 2 se produce perpendicular pe raza vectoare 1-2 şi este proporţională cu această distanţă, deci din polul O se duce vectorul $\overrightarrow{O-2'}$ paralel cu direcţia de deplasare a acestui punct şi de mărime arbitrară, această mărime constituind parametrul deplasării mecanismului.

Pentru a trece la determinarea deplasărilor punctelor 4 şi 6 care se găsesc pe corpul II, este necesar să se cunoască deplasarea punctului 3, comun celor două corpuri. Această deplasare este perpendiculară pe 1-3 şi proporţională cu această distanţă, deci în epura deplasărilor vectorului $\overrightarrow{O-3'}$ se suprapune peste $\overrightarrow{O-2'}$ şi mărimea sa rezultă din proporţionalitatea:

$$\frac{\overrightarrow{O-3'}}{\overrightarrow{O-2'}} = \frac{\overline{1-3}}{\overline{1-2}} \quad \text{deci:} \quad \overrightarrow{O-3'} = \frac{\overline{1-3}}{\overline{1-2}}\ \overrightarrow{O-2'}$$

Se poate trece apoi la determinarea deplasării punctului 6, cunoscînd direcţia deplasării acestuia - paralelă cu supra-

fața de rezemare și deplasarea punctului 3 care face parte din același corp cu 6 (cazul 1). Punctul 6' în epura deplasărilor se determină deci la intersecția direcției de deplasare a punctului 6 (orizontală) dusă din polul O cu perpendiculara pe 3–6 dusă din 3', iar deplasarea lui 6 este vectorul $\overrightarrow{0-6'}$. In sfîrșit, pentru a determina deplasarea lui 4, se duce o perpendiculară pe 3–4 din punctul 3' și o perpendiculară pe 6–4 din 6' (cazul 2). In felul acesta se găsește punctul 4', iar deplasarea lui 4 este vectorul $\overrightarrow{0-4'}$.

Cu deplasările astfel determinate, se poate scrie ecuația de lucru mecanic virtual:

$$F_2 \cdot \delta_2' + F_4 \cdot \delta_4' - H_6 \delta_6' = 0 \qquad \text{(II.98)}$$

din care se deduce H_6, deplasările din relația scrisă măsurîndu-se direct în epură la scara la care s-a măsurat prima deplasare (δ_2), sau putînd fi calculate analitic în funcție de caracteristicile geometrice ale sistemului și de mărimea lui δ_2

O aplicație a folosirii epurei deplasărilor este așa numita "pîrghie a lui Jukovski", bazată pe principiul expus de savantul rus N.E.Jukovski în lucrarea "Reducerea problemelor de mișcare ale lanțului cinematic la problemele pîrghiei", publicată în anul 1909 și anume:

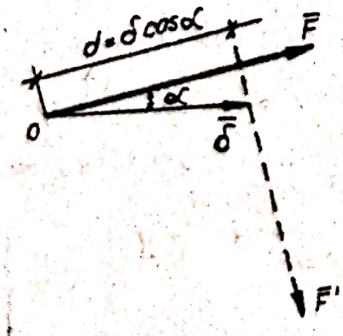


Fig. II.57

Lucrul mecanic al unei forțe $\bar{F}$ la o deplasare $\bar{\delta}$ a punctului său de aplicație are expresia (fig. II.57):

$$L_{(\bar{F})} = \bar{F} \cdot \bar{\delta} = F \cdot \delta \cos \alpha \qquad \text{(II.99)}$$

Dacă în extremitatea deplasării se aplică vectorul $\bar{F}' = \bar{F}$ rotit cu 90^0 față de direcția lui F și

se scrie momentul acestuia în raport cu originea O a vectorului deplasare, se obţine:

$$M_{(\bar{F}')} = F' \, d = F \, \delta \cos\alpha \qquad \text{(II.100)}$$

deci:

$$L_{(\bar{F})} = M_{(\bar{F}')} \qquad \text{(II.101)}$$

Această egalitate arată că relaţia de lucru mecanic virtual este echivalentă cu o relaţie de momente faţă de polul O, ale forţelor rotite cu 90^0 şi aplicate în extremităţile deplasărilor.

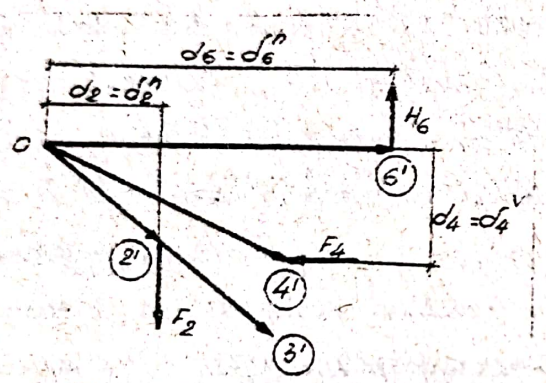


Fig II.58

Astfel, dacă reluăm epura deplasărilor de la exemplul precedent şi aplicăm cele trei forţe F_2, F_4 şi H_6 în punctele 2', 4' şi respectiv 6', rotite toate în acelaşi sens cu 90^0, se obţine pîrghia din fig.II.58, a cărei condiţie de echilibru scrisă prin ecuaţia de momente faţă de polul O are forma:

$$F_2 \cdot d_2 + F_4 \cdot d_4 - H_6 \cdot d_6 = 0 \qquad \text{(II.102)}$$

Cum însă $d_3 = \delta_2^h$, $d_4 = \delta_4^v$ şi $d_6 = \delta_6^h$ această relaţie este evident echivalentă cu ecuaţia de lucru mecanic virtual (II.98).

II.3.Calculul la sarcini mobile.

II.3.1. Consideraţii generale.

In afara încărcărilor cu poziţie fixă şi care sînt în general sarcini permanente, asupra construcţiilor acţionează de multe ori şi sarcini utile care-şi modifică poziţia la intervale scurte de timp. Acestea se numesc sarcini mobile şi situaţiile cele mai frecvente sînt cele ale deplasării podurilor rulante în halele industriale şi ale deplasării convoaielor de vehicule auto sau de cale ferată pe poduri.

In acest caz, eforturile secţionale care apar în structură nu mai au valori constante, ci îşi modifică continuu mărimea, odată cu schimbarea poziţiei încărcărilor. Pentru dimensionarea corectă a elementelor structurii, este necesară determinarea eforturilor maxime posibile ale eforturilor secţionale, deci cunoaşterea poziţiei celei mai defavorabile a convoiului de sarcini mobile, care va fi diferită pentru diverse elemente ale structurii şi pentru diverse secţiuni, sau eforturi secţionale din aceeaşi secţiune.

Intrucît rezolvarea problemei calculului la sarcini mobile prin considerarea situaţiilor reale de încărcare cu convoaie de sarcini este complicată, se recurge la studiul variaţiei eforturilor secţionale în vederea determinării eforturilor maxime, cu ajutorul unui instrument foarte general şi în acelaşi timp foarte practic şi anume liniile de influenţă.

II.3.2. Linii de influenţă.

II.3.2.1. Definirea liniei de influenţă.

Dacă pe un sistem acţionează mai multe sarcini $F_1, F_2, \ldots, F_n$ (fig.II.59), valoarea unui efort dintr-o secţiune oarecare i

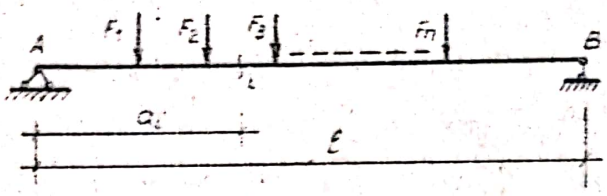


Fig. II.59

se poate scrie prin suprapunere de efecte:

$$S_i = S_i^{(F_1)} + S_i^{(F_2)} + \ldots + S_i^{(F_n)} \qquad \text{(II.103)}$$

Sau, dacă se notează cu s_{ik} valoarea efortului din secţiunea i produsă de o forţă unitară care acţionează în dreptul forţei F_k, relaţia (II.103) se mai poate scrie:

$$S_i = s_{i1} F_1 + s_{i2} F_2 + \ldots + s_{in} F_n \qquad \text{(II.104.a)}$$

sau:

$$S_i = \sum_{k=1}^{n} s_{ik} F_k \qquad \text{(II.104.b)}$$

Mărimile s_{ik} a căror semnificaţie este deci aceea de efort într-o anumită secţiune i a sistemului produs de o sarcină unitară care acţionează în diferite puncte k ale structurii, poartă denumirea de <u>coeficienţi de influenţă</u>. De reţinut că în notarea unui coeficient de influenţă, primul indice se referă la secţiunea în care se produce efortul iar al doilea indice arată locul unde acţionează sarcina unitară.

Eforturile secţionale exprimate cu ajutorul coeficienţilor de influenţă se vor scrie deci sub forma:

$$N_i = n_{i1}F_1 + n_{i2}F_2 + \ldots + n_{in}F_n = \sum_{k=1}^{n} n_{ik}F_k \qquad \text{(II.105.a)}$$

$$T_i = t_{i1}F_1 + t_{i2}F_2 + \ldots + t_{in}F_n = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}F_k \qquad \text{(II.105.b)}$$

$$M_i = m_{i1}F_1 + m_{i2}F_2 + \ldots + m_{in}F_n = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}F_k \qquad \text{(II.105.c)}$$

In mod asemănător se poate exprima şi o reacţiune:

$$V_i = v_{i1}F_1 + v_{i2}F_2 + \ldots + v_{in}F_n = \sum_{k=1}^{n} v_{ik}F_k \qquad \text{(II.105.d)}$$

Rezultă că orice efort secţional sau forţă de legătură se poate exprima printr-o relaţie liniară în funcţie de încărcările care acţionează asupra structurii şi de coeficienţii de influenţă corespunzători. Aceşti coeficienţi de influenţă, reprezentînd efecte ale unei sarcini unitare care acţionează cu diferite secţiuni ale unei structuri date, pot fi determinaţi independent de sistemul real de sarcini mobile, valorile lor depinzînd numai de caracteristicile structurii.

Cunoscînd coeficienţii de influenţă pentru un anumit efort secţional dintr-o secţiune a structurii, diferitele valeri pe care le ia acest efort atunci cînd convoiul real de sarcini ocupă diverse poziţii pe structură se vor determina simplu prin suprapunere de efecte - relaţiile (II.105). Alegerea valorii maxime a acestui efort se va face apoi pe baza unor criterii care vor fi dezvoltate într-un paragraf separat.

Prima etapă a stabilirii unui anumit efort maxim produs de acţiunea unui convoi de sarcini mobile este prin urmare determinarea coeficienţilor de influenţă. Întrucît poate exista o infinitate de poziţii posibile ale unui convoi de sarcini pe o anumită structură, este necesară determinarea tuturor valorilor posibile ale coeficienţilor de influenţă. Aceasta revine la a considera că asupra structurii acţionează o sarcină unitară care se deplasează pe porţiunea pe care urmează să se deplaseze convoiul de sarcini mobile, ocupînd succesiv toate poziţiile po-

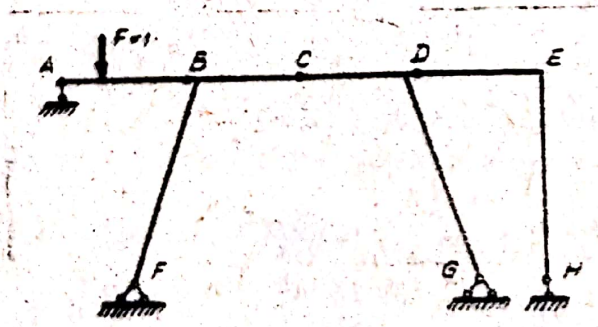


Fig. II 60

sibile pe această porţiune care se mai numeşte şi "linia de încărcare". La structura din fig.II.60 de exemplu, linia de încărcare este porţiunea A-B-C-D-E.

Representarea grafică a tuturor acestor valori s_{ik} ales coeficienţilor de influenţă pentru un efort S_i dintr-o anumită secţiune a unei structuri date, poartă denumirea de "linie de influenţă" a efortului respectiv.

Cu alte cuvinte linia de influenţă a unui efort S_i reprezintă graficul de variaţii a efortului respectiv, atunci cînd o sarcină unitară se deplasează pe linia de încărcare a structurii. Sau linia de influenţă o mai putem defini ca fiind locul geometric al valorilor unui efort secţional (sau reacţiune), provocate de o sarcină unitară care se deplasează pe linia de încărcare a structurii.

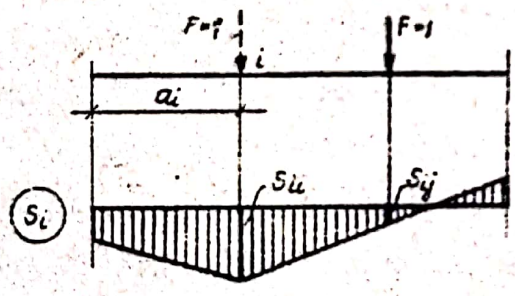


Fig. II.61

Considerînd o porţiune dintr-o structură şi linia de influenţă a unui efort oarecare S_i (fig.II.61), fiecare ordonată din această linie de influenţă reprezintă valoarea efortului respectiv S_i, pentru situaţia cînd F_2, se află în secţiunea k, adică chiar în dreptul ordonatei s_{ik} la care ne referim. Ordonata s_{ii} reprezintă deci valoarea efortului S_i în ipoteza că sarcina F = 1 acţionează chiar în secţiunea i şi aşa mai departe.

Pe baza acestor precizări, rezultă deosebirea netă care există între o diagramă de eforturi secţionale şi o linie de influenţă:

- Diagrama de eforturi reprezintă graficul valorilor

unui efort secţional (N, T, M), în diferitele secţiuni ale unei structuri, produs de un sistem de sarcini care ocupă o poziţie fixă pe structură. Fiecare ordonată din diagramă reprezintă deci valoarea efortului din secţiunea respectivă, pentru o ipoteză de încărcare cu sarcini reale în poziţie fixă.

- Linia de influenţă reprezintă graficul valorilor pe care le ia un efort secţional (sau o reacţiune) S_i dintr-o anumită secţiune i a structurii, atunci cînd o sarcină F = 1 se deplasează în lungul liniei de încărcare. Fiecare ordonată dintr-o anumită linie de influenţă reprezintă deci acelaşi efort S_i pentru cazul cînd sarcina unitară se află în secţiunea din dreptul ordonatei respective.

In plus, mai trebuie subliniat că în timp ce diagramele de eforturi ne oferă direct valorile maxime ale eforturilor şi secţiunile în care se produc acestea în ipoteza de încărcare cu sarcini reale pentru care au fost trasate, liniile de influenţă sînt doar un instrument cu ajutorul căruia putem efectua studiul variaţiei eforturilor din diverse secţiuni ale structurii produse de convoaie de sarcini mobile, scopul final fiind de asemenea stabilirea valorilor maxime ale acestor eforturi.

II.3.2.2. <u>Căile de determinare a liniilor de influenţă.</u>

Pentru trasarea liniilor de influenţă ale reacţiunilor sau ale eforturilor secţionale la sistemele static determinate, se pot utiliza două căi:

a) <u>Calea analitică</u>: se scriu expresiile reacţiunii sau efortului secţional studiat, considerînd sarcina unitară mobilă acţionînd pe diferite porţiuni caracteristice ale structurii şi se reprezintă grafic aceste expresii.

Ca exemplu simplu, se prezintă determinarea liniei de

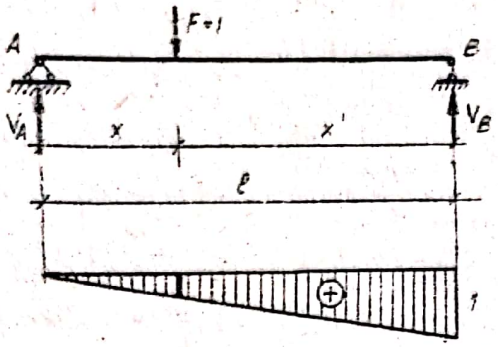


Fig. II.62

influenţă pentru reacţiunea V_B la grinda simplu rezemată din fig. II.62. Expresia reacţiunii V_B, în funcţie de poziţia variabilă a forţei unitare pe grindă, este unică şi are forma:

$$V_B = \frac{1 \cdot x}{\ell} \qquad \text{(II.106)}$$

ceea ce ne arată că atunci cînd pe grindă se deplasează o forţă unitară, reacţiunea din reazemul B are o lege de variaţie liniară.

Pentru poziţiile extreme ale forţei unitare, se obţine:

$x = 0$ (F = 1 se găseşte în A): $V_B = 0$

$x = \ell$ (F = 1 se găseşte în B): $V_B = 1$

deci reprezentarea grafică a expresiei (II.106) este cea din fig.II.62.b şi aceasta constituie linia de influenţă a reacţiunii V_B.

Ca regulă de aşezare, vom conveni să dispunem liniile de influenţă pozitive sub linia de referinţă (cazul de faţă) şi cele negative deasupra acestei linii.

b) <u>Calea cinematică</u>, bazată pe utilizarea principiului deplasărilor virtuale, ale cărei etape de aplicare sînt exemplificate prin determinarea liniei de influenţă a reacţiunii V_B la grinda din fig.II.63, care a fost trasată şi pe cale analitică.

Aceste etape sînt următoarele:

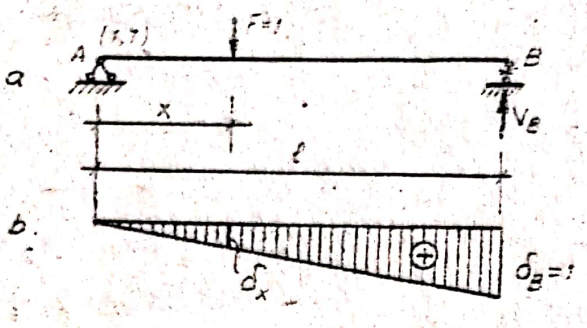


Fig. II.63

- se suprimă legătura corespunzătoare reacţiunii sau efortului pentru care dorim să trasăm linia de influenţă şi se înlocuieşte cu forţa de legătură sau efortul secţional respectiv, aşa cum s-a discutat în subcapitolul II.2.2.

- Se consideră o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile rămase ale mecanismului obţinut şi se construieşte diagrama deplasărilor pe direcţia de acţionare a forţei unitare mobile, deci pe direcţie verticală. Evident că la sisteme mai complicate, această etapă este precedată de stabilirea centrelor instantanee de rotaţie absolute şi relative, necesare construirii corecte a diagramei de deplasări. În legătură cu sensul deplasării el poate fi oricare, dar vom conveni - pentru unitate şi pentru a stabili o regulă de obţinere directă a semnelor pentru liniile de influenţă identică cu cea fixată anterior - să dăm totdeauna deplasarea în sens invers forţei de legătură sau perechii de eforturi secţionale introduse în locul legăturii secţionate.

- Se scrie ecuaţia de echilibru prin lucru mecanic virtual, care în acest caz are forma:

$$1 \cdot \delta_x - V_B \cdot \delta_B = 0 \qquad \text{(II.107.a)}$$

sau, în general, pentru o reacţiune sau un efort oarecare S_i şi o deplasare virtuală corespunzătoare

$$1 \cdot \delta_x - S_i \cdot \Delta_i = 0 \qquad \text{(II.107.b)}$$

de unde:

$$S_i = \frac{\delta x}{\Delta_i} \qquad \text{(II.108)}$$

Pentru ca ordonatele δx din diagrama deplasărilor să reprezinte valorile efortului S_i, deci să devină ordonate ale liniei de influenţă, este necesar ca:

$$\Delta_i = 1 \qquad \text{(II.109)}$$

Aceasta ne arată că folosind calea cinematică, linia de influenţă este dată de diagrama deplasărilor pe direcţia forţei mobile unitare, dacă se ia deplasarea pe direcţia reacţiunii sau efortului secţional considerat egală cu unitatea.

In cazul particular al reacţiunii V_B, trebuie deci să luăm $\delta_B = 1$, ceea ce ne conduce la aceeaşi linie de influenţă obţinută şi pe cale analitică.

In rezumat, elementele unei linii de influenţă determinate pe baza principiului deplasărilor virtuale se stabilesc astfel:

- alura liniei de influenţă este dată de diagrama deplasărilor pe direcţia forţei unitare mobile (diagrama deplasărilor pe verticală), a mecanismului obţinut prin suprimarea legăturii corespunzătoare reacţiunii sau efortului secţional considerat;

- scara liniei de influenţă se obţine prin considerarea deplasării corespunzătoare reacţiunii sau efortului secţional respectiv, egală cu unitatea ($\Delta_i = 1$) ;

- semnele liniei de influenţă rezultă direct şi anume: în cazul cînd deplasarea virtuală a mecanismului se dă în sens invers reacţiunii sau perechii de eforturi secţionale pozitive introduse în locul legăturii suprimate, ordonatele de sub linia de referinţă au semnul plus (cazul liniei de influenţă a

reacţiunii V_B analizate), iar cele de deasupra au semnul minus.

In cele ce urmează, se analizează trasarea liniilor de influenţă pentru reacţiuni şi eforturi secţionale la sistemele static determinate pentru care a fost prezentat anterior calculul la acţiunea sarcinilor fixe, în vederea determinării eforturilor maxime produse de convoaiele de sarcini mobile.

II.3.3. Determinarea liniilor de influenţă pe cale analitică.

II.3.3.1. Grinda simplu rezemată.

a) Linii de influenţă pentru reacţiuni.

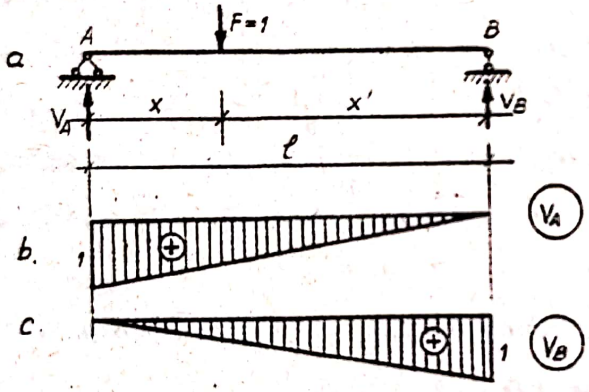


Fig. II.64.

Linia de influenţă a reacţiunii V_B a fost determinată anterior şi este trasată în fig.II.64.a.

Pentru a determina linia de influenţă a reacţiunii V_A, se scrie expresia acestei reacţiuni în funcţie de poziţia variabilă a forţei unitare, adică:

$$V_A = \frac{1 \cdot x'}{\ell} \qquad \text{(II.110)}$$

Considerînd poziţiile extreme ale forţei unitare:

$x' = \ell$ (F = 1 în A): $V_A = 1$

$x' = 0$ (F = 1 în B): $V_A = 0$

se obţine linia de influenţă din fig.II.64.b.

b) Linii de influenţă pentru eforturi secţionale.

b.1.) Linia de influenţă a forţei tăietoare dintr-o secţiune oarecare.

Considerînd grinda din fig.II.55.a, forţa tăietoare din secţiunea i are două expresii distinc , după cum forţă unitară se găseşte în stînga sau în dreapta secţiunii:

F = 1 în stînga secţiunii:

$$T_i = V_A - 1 = \frac{1.x'}{\ell} - 1 = \frac{x'-\ell}{\ell} = -\frac{x}{\ell} \qquad \text{(II.111.a)}$$

Pentru valorile extreme ale lui x, se obţine:

x = 0 (F = 1 în A): $T_i = 0$

$x = a_i$ (F = 1 într-o secţiune infinit vecină secţiunii i): $T_i = -\frac{a_i}{\ell}$

Cu aceste date se trasează ramura liniei de influenţă din stînga secţiunii (valorile pe care le ia forţa tăietoare T_i atunci cînd forţa unitară se deplasează la stînga secţiunii, adică din A pînă în secţiunea i).

F = 1 în dreapta secţiunii:

$$T_i = V_A = \frac{1.x'}{\ell} \qquad \text{(II.111.b)}$$

Pentru valorile extreme ale lui x', se obţine:

$x' = b_i$ (F = 1 într-o secţiune infinit vecină secţiunii i): $T_i = \frac{b_i}{\ell}$

x' = 0 (F = 1 în B): $T_i = 0$

Astfel se trasează ramura din dreapta a liniei de influenţă a forţei tăietoare (valorile pe care le ia forţa tăietoare T_i cînd forţa unitară se deplasează din secţiune pînă pe

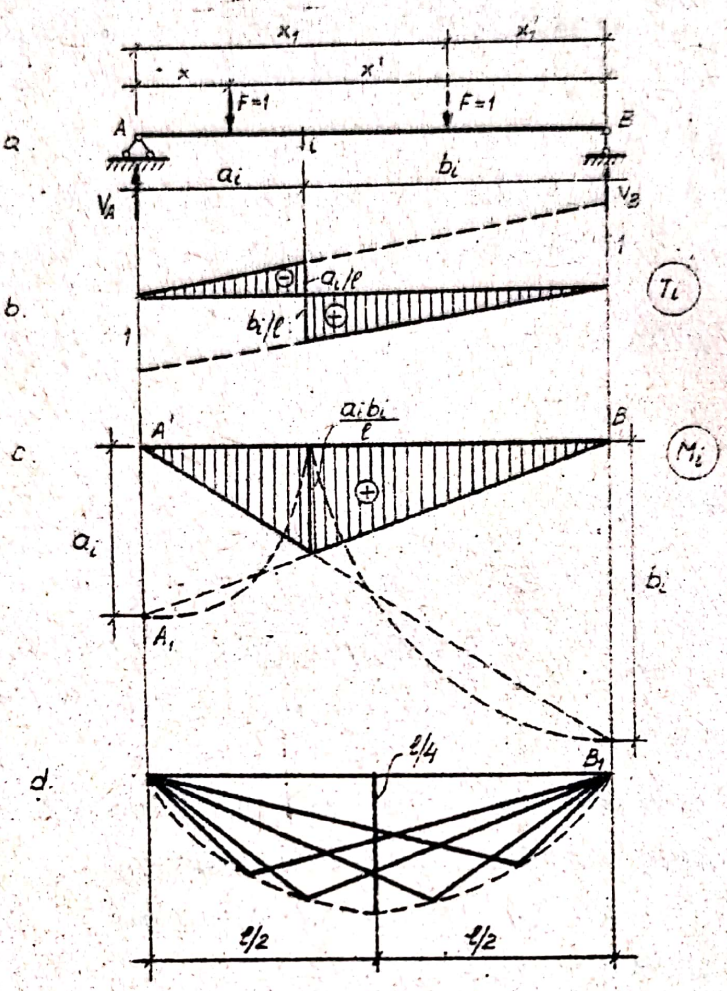


Fig. II.65

reazemul B).

Se constată că cele două ramuri sînt paralele între ele, deoarece dreptele care corespund expresiilor (II.111.a) şi (II.111.b) au aceeaşi pantă $1/\ell$, iar distanţa dintre cele două ramuri este:

$$\frac{a_i}{\ell} + \frac{b_i}{\ell} = \frac{\ell}{\ell} = 1$$

In concluzie, linia de influenţă a forţei tăietoare dintr-o secţiune a unei grinzi simplu rezemate se compune din două drepte paralele la distanţă egală cu 1 şi cu salt în drep-

tul secţiunii (fig.II.65.b). Cu cele două drepte paralele, se pot obţine deci liniile de influenţă ale forţelor tăietoare din toate secţiunile grinzii, saltul producîndu-se de fiecare dată în dreptul secţiunii la care ne referim.

b.2.) Linia de influenţă a momentului încovoietor dintr-o secţiune oarecare.

Se consideră din nou cele două poziţii distincte ale forţei unitare:

F = 1 în stînga secţiunii:

$$M_i = V_B \cdot b_i = \frac{1.x}{\ell} b_i \qquad \text{(II.112.a)}$$

Pentru valorile extreme ale lui x se obţine:

$x = 0$: $M_i = 0$

$x = a_i$: $M_i = \frac{a_i b_i}{\ell}$

trasîndu-se astfel ramura din stînga a liniei de influenţă (fig.II.65.c).

F = 1 în dreapta secţiunii:

$$M_i = V_A a_i = \frac{1.x'}{\ell} a_i \qquad \text{(II.112.b)}$$

Pentru valorile extreme ale lui x' se obţine:

$x' = b_i$: $M_i = \frac{a_i b_i}{\ell}$ (aceeaşi valoare)

$x' = 0$: $M_i = 0$

trasîndu-se astfel ramura din dreapta a liniei de influenţă (fig.II.65.c).

Dacă se determină tăieturile celor două ramuri pe reazeme, se obţine:

- pentru $x = \ell$ în expresia (II.112.a):

$$y_B \Big| = b_1 \qquad \text{(II.113.a)}$$

- pentru $x' = a_1$ în expresia (II.112.b):

$$y_A \Big| = a_1 \qquad \text{(II.113.b)}$$

ceea ce ne arată că linia de influenţă a momentului încovoietor se poate obţine la grinda simplu rezemată prin rabaterea pe verticalele reazemelor a distanţelor a_1 şi respectiv b_1 şi unirea punctelor A_1 şi B_1 astfel obţinute, cu punctele B' şi respectiv A' de pe linia de referinţă (fig.II.65.c).

In concluzie, linia de influenţă a momentului încovoietor dintr-o secţiune i a unei grinzi simplu rezemate este un triunghi cu vîrful în dreptul secţiunii, cu ordonata maximă egală cu $a_1 b_1 / \ell$ şi cu tăieturile celor două ramuri pe verticalele reazemelor, egale cu b_1 şi respectiv a_1.

Dacă se reprezintă liniile de influenţă ale momentelor încovoietoare din toate secţiunile grinzii, se obţine o infinitate de triunghiuri, ale căror ordonate maxime variază după o parabolă cu ecuaţia $a_1 b_1 / \ell$, deci vîrfurile triunghiurilor respective descriu această parabolă (fig.II.65.d). Ordonata maximă a parabolei corespunde secţiunii din mijlocul grinzii ($a_1 = b_1 = \ell/2$) şi are valoarea:

$$\frac{1}{\ell} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{4}$$

II.3.3.2. Grinda încastrată

Pentru acest tip de grindă, liniile de influenţă ale reacţiunilor reprezintă cazuri particulare ale liniilor de influenţă ale eforturilor într-o secţiune oarecare, aşa cum se va vedea în continuare.

a) Linia de influenţă a forţei tăietoare dintr-o secţiune oarecare.

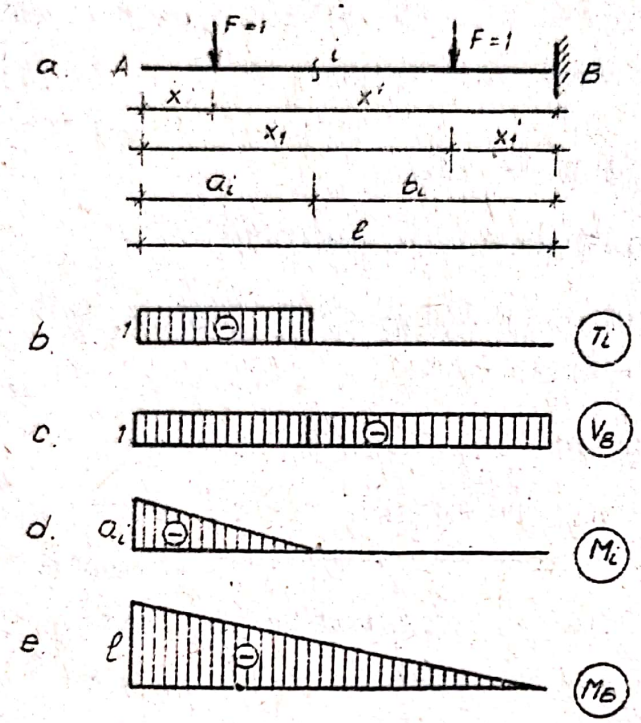


Fig. II.66

Considerînd cele două poziţii distincte ale forţei unitare:

F=1 în stînga secţiunii:

$$\overline{T_i} = -1 \qquad \text{(II.114.a)}$$

deci cînd forţa unitară se deplasează din capătul liber al consolei pînă în secţiune, T_i rămîne constantă (fig.II.66.b)

F = 1 în dreapta secţiunii:

$$\overline{T_i} = 0 \qquad \text{(II.114.b)}$$

deci cînd forţa unitară se deplasează din secţiune pînă în încastrare, forţa tăietoare T_i este nulă.

Linia de influenţă a reacţiunii din B, se obţine ca linie de influenţă a forţei tăietoare dintr-o secţiune infinit vecină încastrării B ($a_i = \ell$), deci are forma din fig.II.66.e.

b) Linia de influenţă a momentului încovoietor dintr-o secţiune oarecare.

F = 1 în stînga secţiunii:

$$M_i = -1\,(a_i - x) \qquad \text{(II.115.a)}$$

- pentru x = 0 (F = 1 în A): $M_i = -a_i$
- pentru $x = a_i$ (F = 1 în secţiune): $M_i = 0$

F = 1 în dreapta secţiunii:

$$M_i = 0 \qquad \text{(II.115.b)}$$

Se obţine astfel linia de influenţă din fig.II.66.d,iar pentru cazul particular $a_1 = \ell$ se obţine linia de influenţă pentru momentul încovoietor din încastrarea M_B - fig.II.66.e.

II.3.3.3. Grinda cu console.

a) Linii de influenţă pentru reacţiuni.

Considerînd grinda din fig.II.67.a, liniile de influenţă pentru V_A şi V_B se obţin astfel:

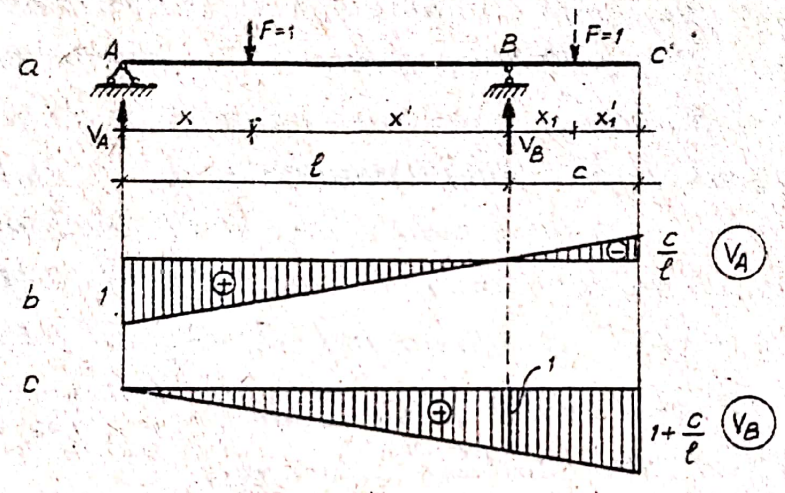


Fig. II.67

- Linia de influenţă pentru V_A.

Forţa unitară poate avea două poziţii caracteristice şi anume:

F = 1 pe deschidere:

$$V_A = \frac{1 \cdot x'}{\ell} \qquad \text{(II.116.a)}$$

- pentru $x' = \ell$ (F = 1 în A): $V_A = 1$

- pentru $x' = 0$ (F = 1 în B): $V_A = 0$

F = 1 pe consolă:

$$V_A = -\frac{1 \cdot x_1}{\ell} \qquad \text{(II.116.b)}$$

- pentru $x_1 = 0$ ($f = 1$ în B): $V_A = 0$

- pentru $x_1 = c$ ($f = 1$ în C): $V_A = -\frac{e}{\ell}$

Cu aceste date se obţine linia de influenţă din fig.II. 67.b.

Se vede uşor că pantele dreptelor date de relaţiile (II. 116.a) şi (II.116.b) sînt aceleaşi, deci cele două ramuri sînt în prelungire.

- <u>Linia de influenţă pentru V_B:</u>

$F = 1$ pe deschidere:

$$V_B = \frac{1 \cdot x}{\ell} \qquad \text{(II.117.a)}$$

- pentru $x = 0$ ($F = 1$ în A): $V_B = 0$

- pentru $x = \ell$ ($F = 1$ în B): $V_B = 1$

$F = 1$ pe consolă:

$$V_B = \frac{(\ell + x_1)}{\ell} \qquad \text{(II.117.b)}$$

- pentru $x_1 = e$ ($F = 1$ în B): $V_B = 1$

- pentru $x_1 = c$ ($F = 1$ în C): $V_B = \frac{\ell + e}{\ell} = 1 + \frac{e}{\ell}$

Cu aceste date se trasează linia de influenţă din fig.II. 67.e, cu cele două drepte în prelungire.

b) <u>Linii de influenţă pentru eforturile secţionale dintr-o secţiune de pe deschidere</u>

- <u>Linia de influenţă a forţei tăietoare T_1.</u>

Cînd forţa unitară se găseşte pe deschidere, expresiile forţei tăietoare sînt aceleaşi ca în cazul grinzii simplu rezemate fără consele - relaţiile (II.111.a) şi (II.111.b) - deci linia de influenţă pe această porţiune este aceeaşi (fig. II.68.b). Pentru poziţia suplimentară a forţei unitare pe consolă, se obţine:

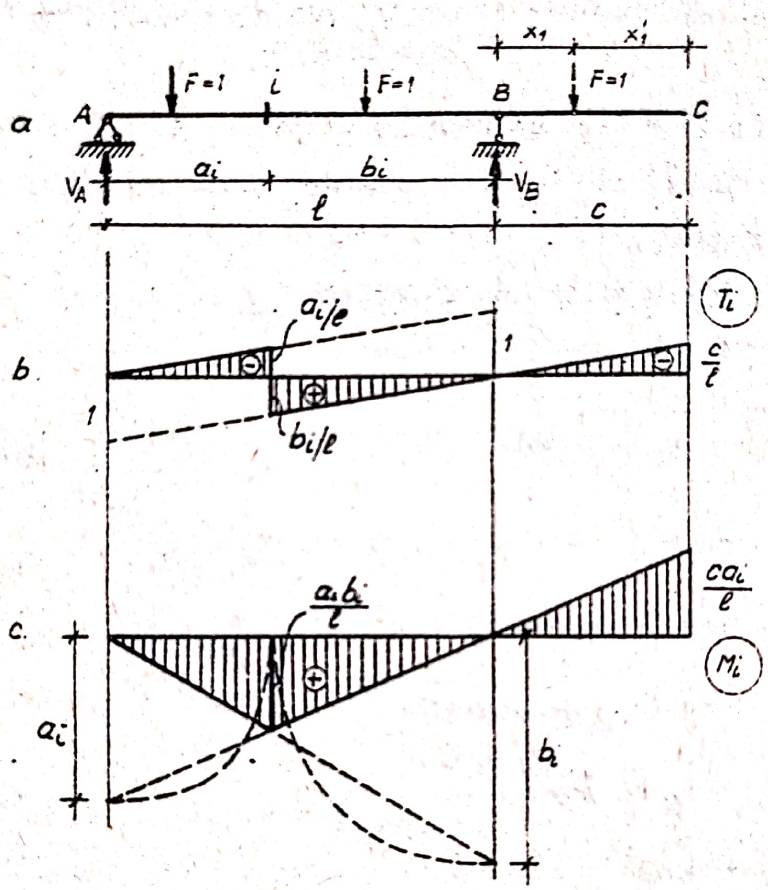


Fig. II. 68

$$T_i = V_A = -\frac{1 \cdot x_1}{\ell} \qquad \text{(II.118)}$$

- pentru $x_1 = 0$ (F = 1 în B): $T_i = 0$

- pentru $x_1 = a$ (F = 1 în C): $T_i = -\frac{a}{\ell}$

Deci, linia de influenţă are pe consolă aceeaşi pantă $1/\ell$ cu dreptele paralele de pe deschidere şi se obţine astfel linia de influenţă din fig.II.68.b.

- <u>Linia de influenţă a momentului încovoietor</u> M_i.

Pentru cazul forţei unitare deplasându-se pe deschidere, linia de influenţă este dată de relaţiile (II.112.a) şi (II.112.b), deci rămîne aceeaşi ca la grinda simplu rezemată fără consolă. Pentru poziţia suplimentară a forţei unitare pe consolă, se obţine:

$$M_i = V_A \cdot a_i = -\frac{1 \cdot x_1}{\ell} \cdot a_i \qquad \text{(II.119)}$$

- pentru $x_1 = 0$ ($F = 1$ în B): $M_i = 0$

- pentru $x_1 = c$ ($F = 1$ în C): $M_i = -\frac{c \cdot a_i}{\ell}$

Dreapta corespunzătoare expresiei (II.119) are aceeaşi pantă cu ramura de dreapta a liniei de influenţă de la grinda simplu rezemată fără consolă, deci este în prelungirea acesteia şi astfel se obţine linia de influenţă din fig.II.68.c.

Se poate concluda deci că liniile de influenţă ale reacţiunilor şi ale eforturilor dintr-o secţiune de pe deschidere la grinda simplu rezemată cu consolă, se obţin din cele trasate la grinda simplu rezemată fără consolă, prelungind ramurile corespunzătoare pe lungimea consolei. Concluzia este valabilă şi pentru grinda cu două console.

c) <u>Linii de influenţă pentru eforturile secţionale dintr-o secţiune de pe consolă</u>.

- <u>Linia de influenţă a forţei tăietoare</u> T_i.

$F = 1$ în dreapta secţiunii:

$$T_i = 1 \qquad \text{(II.120.a)}$$

$F = 1$ în stînga secţiunii (pe consolă sau pe deschi-

dere):

$$T_1 = 0 \qquad \text{(II.120.b)}$$

Linia de influenţă este trasată în fig.II.69.b.

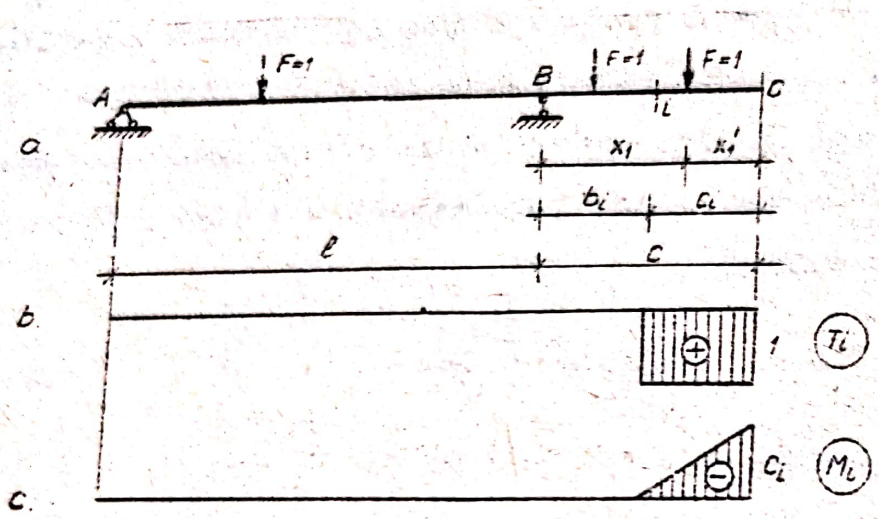


Fig. II 69

- <u>Linia de influenţă pentru momentul încovoietor M_i</u>:

F = 1 în dreapta secţiunii:

$$M_i = -1\,(c_i - x_1') \qquad \text{(II.121.a)}$$

- pentru $x_1' = c_i$ (F = 1 în secţiune): $M_i = 0$

- pentru $x_1' = 0$ (F = 1 în C): $M_i = -c_i$

F = 1 în stînga secţiunii (pe consolă sau pe deschidere): $M_i = 0$.

Se obţine astfel linia de influenţă din fig.II.69.c

Se vede că liniile de influenţă ale eforturilor secţionale dintr-o secţiune de pe consolă sînt identice cu cele ale eforturilor de la grinda în consolă.

Calea analitică poate fi utilizată şi pentru determinarea liniilor de influenţă ale reacţiunilor şi eforturilor secţionale la structuri static determinate alcătuite din bare (grinzi cu

console şi articulaţii, grinzi cotite, cadre static determinate), dar necesită de obicei un volum mai mare de calcule, datorită numărului mare de poziţii distincte ale forţei unitare. In plus, la sistemele Gerber, dacă se trasează linia de influenţă a unei reacţiuni sau a unui efort secţional de pe un sistem principal dar forţa unitară se găseşte pe un sistem secundar, determinarea expresiei reacţiunii sau efortului respectiv necesită rezolvarea unuia sau a mai multor sisteme secundare şi a sistemului principal şi aceasta de mai multe ori, datorită poziţiilor diferite distincte ale forţei unitare.

La aceste categorii de structuri, calea cinematică este în general mai simplă şi va fi prezentată ca posibilitate practică de trasare a liniilor de influenţă în paragraful II.3.4.

II.3.3.4. Cazul sarcinilor transmise indirect.

Se consideră grinda simplu rezemată din fig.II.70, la care convoiul de sarcini mobile urmează să se deplaseze pe longeroni, deci pentru trasarea liniilor de influenţă se va lua ca acţiune forţa unitară care se deplasează de asemenea pe longeroni.

Liniile de influenţă ale reacţiunilor rămîn, evident, nemodificate faţă de cazul transmiterii directe a sarcinilor, întrucît acţiunea forţei unitare de pe longeroni se transmite asupra grinzii principale prin cîte două componente echivalente, fără nu modifică forţele de legătură.

In legătură cu eforturile, afirmaţia de mai sus rămîne valabilă atîta timp cît forţa unitară se găseşte pe longeronii din stînga sau dreapta celui de deasupra secţiunii considerate, i.

Pentru $F = 1$ pe longeronul de deasupra secţiunii i, aceasta se transmite pe grinda principală prin componentele V_2 şi

V_3 (fig.II.70 b şi c) şi forţa tăietoare din secţiunea i are expresia:

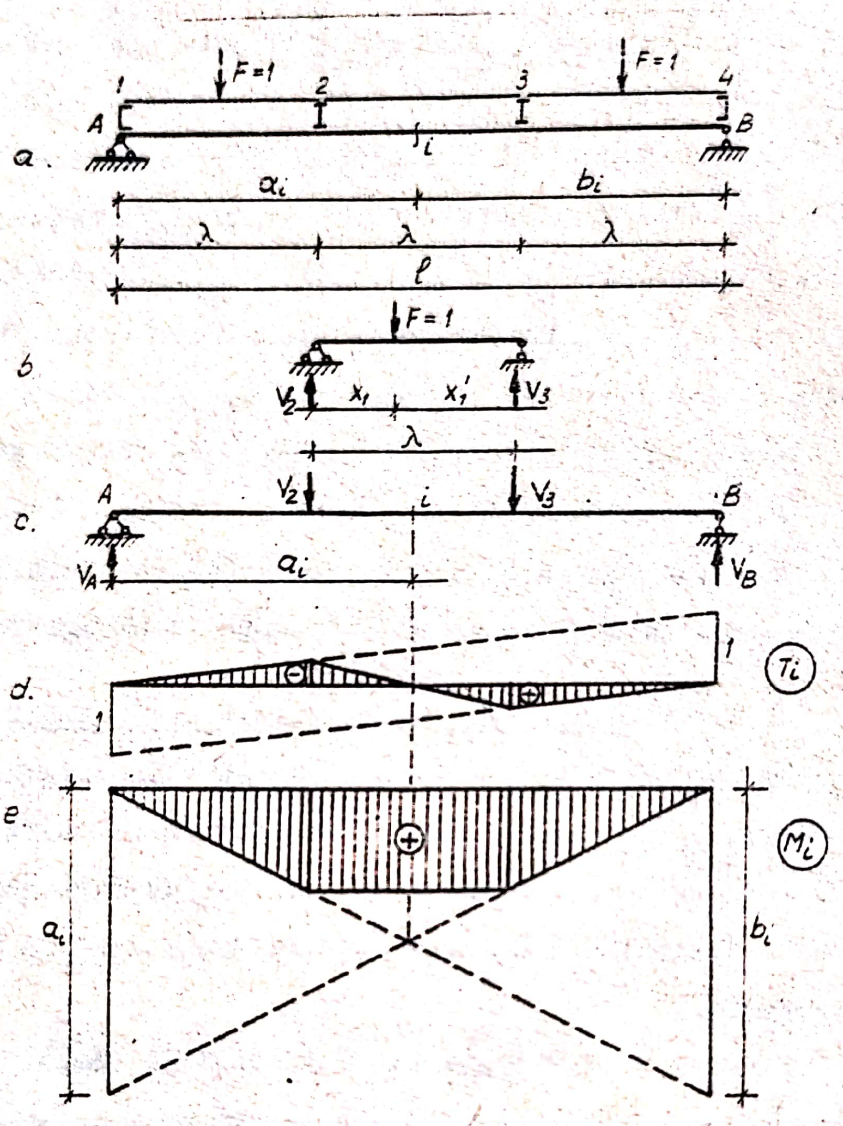


Fig II 70

$$T_i = V_A - V_2 = V_A - \frac{1 \cdot x_1'}{\lambda} \qquad \text{(II.122)}$$

- pentru $x_1' = \lambda$ (F = 1 în 2): $T_i = V_A - 1$

- pentru $x_1' = 0$ (F = 1 în 3): $T_i = V_A$

Deci, pentru forţa unitară călcînd în dreptul antretrezelor 2 şi 3, forţa tăietoare din secţiunea i este aceeaşi ca

în cazul transmiterii directe a sarcinii, iar cînd forţa unitară se deplasează pe longeronul 2-3, forţa tăietoare din secţiunea i variază liniar.

Pe baza acestei concluzii, rezultă că linia de influenţă a forţei tăietoare se obţine păstrînd în linie de influenţă trasată pentru cazul transmiterii directe a sarcinii pe porţiunile din stînga şi din dreapta panoului cu secţiunea i şi unind liniar ordonatele din dreptul antretrazelor care mărginesc panoul cu secţiunea i (fig.II.70.d).

Se constată astfel că pentru oricare secţiune de pe panoul 2-3, linia de influenţă a forţei tăietoare este aceeaşi, ceea ce va face ca - în cazul sarcinilor transmise indirect - să studiem nu viariaţia forţei tăietoare dintr-o secţiune, ci de pe un panou întreg.

Pentru momentul încovoietor din secţiunea i, linia de influenţă este de asemenea aceeaşi ca în cazul sarcinii transmise direct atunci cînd forţa unitară se deplasează pe longeronii din stînga şi din dreapta panoului cu secţiunea i, iar pentru situaţia cînd forţa unitară se află pe longeronul de deasupra secţiunii, momentul încovoietor are expresia:

$$M_i = V_A a_i - V_2(a_i - \lambda) = V_A \cdot a_i - \frac{1 \cdot x_i'}{\lambda}(a_i - \lambda) \qquad (II.123)$$

- pentru $x_i' = \lambda$ (F = 1 în 2): $M_i = V_A \cdot a_i - 1(a_i - \lambda)$

- pentru $x_i' = 0$ (F = 1 în 3): $M_i = V_A \cdot a_i$

Se constată şi în acest caz că pentru forţa unitară acţionînd în dreptul antretoazelor 2 şi 3, momentul încovoietor din secţiunea i este acelaşi ca în cazul transmiterii directe a sarcinii şi că atunci cînd forţa unitară se deplasează pe longeronul 2-3, momentul încovoietor variază liniar - relaţia

(II.123). In consecinţă, linia de influenţă pentru M_i se obţine din cea trasată pentru forţa acţionînd direct, unind liniar ordonatele din dreptul antretoazelor care mărginesc panoul pe care se găseşte secţiunea i (fig.II.70.e).

II.3.4. Determinarea liniilor de influenţă pe cale cinematică.

II.3.4.1. Grinda simplu rezemată.

a) Linii de influenţă pentru reacţiuni.

Linia de influenţă pentru reacţiunea V_B (fig.II.63) a fost determinată la prezentarea principiului general de trasare a liniilor de influenţă pe această cale.

Pentru determinarea liniei de influenţă a reacţiunii V_A, se suprimă

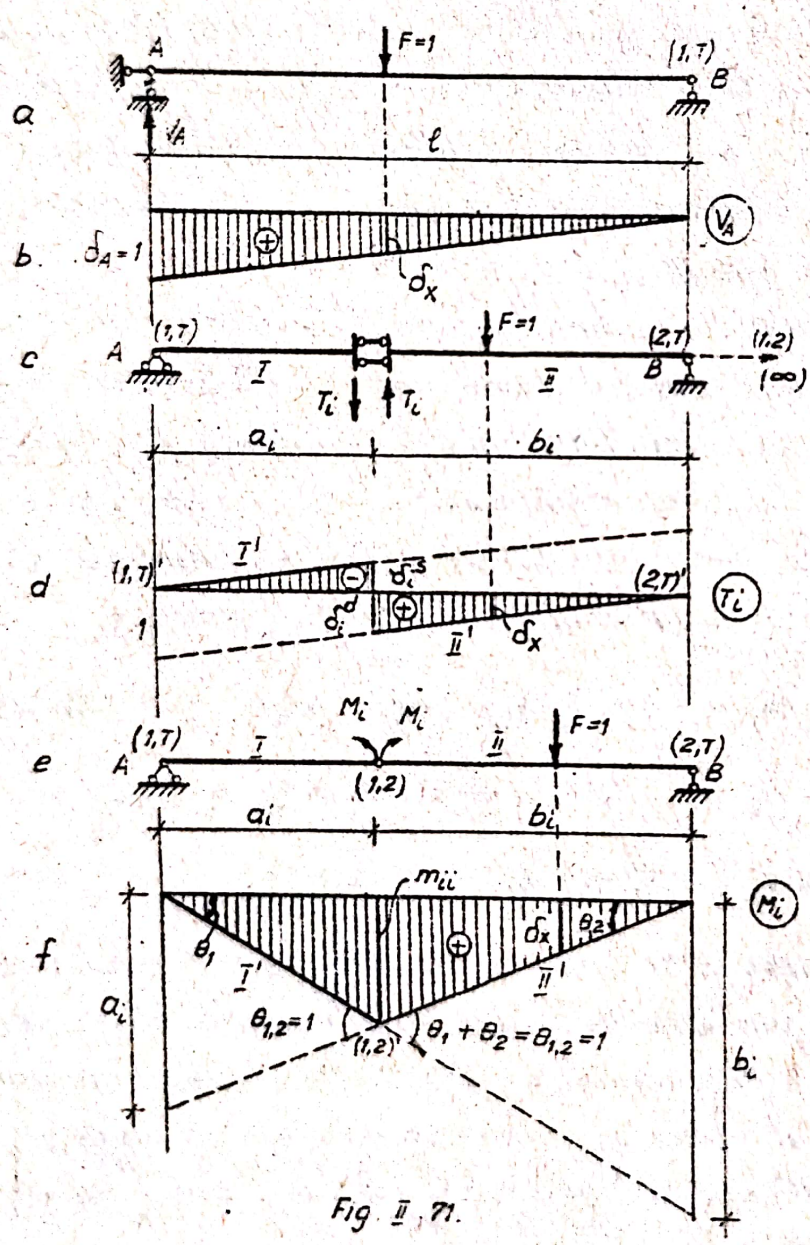


Fig. II.71.

reazemul simplu vertical din fig.II.71.a. Mecanismul rezultat are centrul instantaneu absolut de rotaţie la intersecţia celor două reazeme simple rămase, deci în reazemul B.

Diagrama deplasărilor pe verticală este cea din fig.II.71.b, iar relaţia de echilibru scrisă prin lucru mecanic virtual este:

$$1 \cdot \delta_x - V_A \cdot \delta_A = 0 \qquad \text{(II.124.a)}$$

de unde:

$$V_A = \frac{\delta_x}{\delta_A} \qquad \text{(II.124.b)}$$

scara liniei de influenţă rezultînd din condiţia $\delta_A = 1$.

b) Linii de influenţă pentru eforturi:

- Linia de influenţă a forţei tăietoare din secţiunea i se obţine transformînd sistemul în mecanism pentru deplasări virtuale, prin scoaterea legăturii corespunzătoare acestui efort, aşa cum s-a precizat în paragraful II.2.2 (fig.II.71.c).

Centrul instantaneu absolut al corpului I se găseşte în articulaţia A, iar pentru corpul II centrul instantaneu absolut (2,T) se determină ca intersecţie între direcţia reazemului simplu din B şi direcţia (1,T) - (1,2), centrul relativ (1,2) găsindu-se la intersecţia celor două bare care leagă corpurile I şi II, deci la infinit pe direcţia orizontală. Astfel rezultă diagrama de deplasări pe verticală din fig.II.71.d. Relaţia de lucru mecanic virtual are în acest caz forma:

$$1 \cdot \delta_x - T_i \cdot \delta_i^s - T_i \cdot \delta_i^d = 0 \qquad \text{(II.125.a)}$$

de unde:

$$T_i = \frac{\delta_x}{\delta_i^s + \delta_i^d} \qquad \text{(II.125.b)}$$

Pentru obţinerea scării, este necesar să considerăm:

$\delta_i^{\alpha} + \delta_i^{\beta} = 1$ (cînd $T_i = \delta x$, deci ordonatele din diagrama deplasărilor devin valori ale forţei tăietoare produse de $F = 1$).

Obţinem astfel linia de influenţă determinată şi pe cale analitică, alcătuită din două drepte paralele la distanţă unitară şi cu salt în dreptul secţiunii.

- Pentru linia de influenţă a momentului încovoietor din secţiunea i, se introduce în această secţiune o articulaţie şi se înlocuieşte legătura suprimată cu o pereche de momente (vezi paragraful II.2.2) - fig.II.71.e.

Pe baza celor cunoscute în legătură cu determinarea centrelor instantanee de rotaţie, acestea se găsesc în articulaţia A - (1,T) şi în reazemul B - (2,T), la intersecţia direcţiei reazemului simplu cu direcţia (1,T) - (1,2).

Construind diagrama deplasărilor pe verticală din fig. II.71.f, relaţia de lucru mecanic virtual este:

$$1 \cdot \delta x - M_i \cdot \theta_1 - M_i \cdot \theta_2 = 0 \qquad \text{(II.126.a)}$$

de unde:

$$M_i = \frac{\delta x}{\theta_1 + \theta_2} \qquad \text{(II.126.b)}$$

Scara liniei de influenţă este dată de:

$$\theta_1 + \theta_2 = 1$$

Suma celor două retiri este egală cu retirea relativă $\theta_{1,2}$ dintre cele două corpuri şi aceasta se ia deci unitară.

Tăieturile celor două ramuri ale liniei de influenţă se determină simplu, ţinînd cont că lucrăm cu deplasări virtuale infinit mici:

$$y_A = \theta_{1,2} \cdot a_i = a_i$$

$$y_B = \theta_{1,2} \cdot b_i = b_i$$

Din relaţii de asemănare a triunghiurilor, rezultă şi ordonata maximă m_{ii} a liniei de influenţă:

$$\frac{a_i}{\ell} = \frac{m_{ii}}{b_i}$$

de unde: $$m_{ii} = \frac{a_i \cdot b_i}{\ell}$$

regăsindu-se astfel toate caracteristicile liniei de influenţă a momentului încovoietor, determinată anterior pe cale analitică.

II.3.4.2. <u>Grinda încastrată</u>

a) <u>Linia de influenţă a forţei tăietoare</u>.

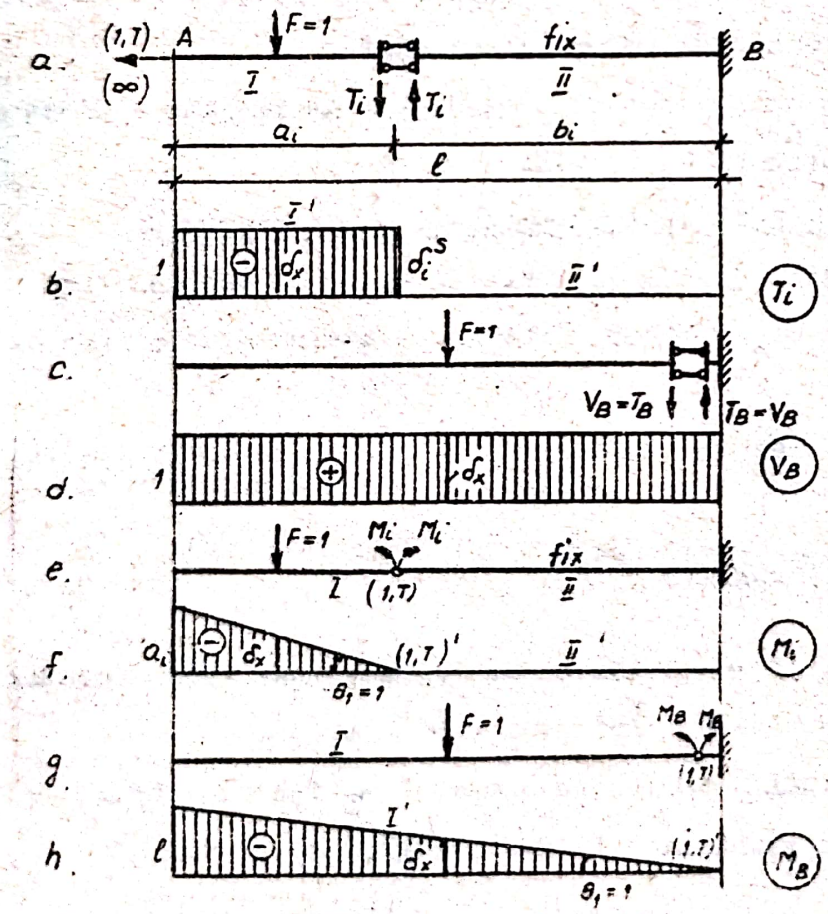


Fig. II.72

Introducînd legătura specifică pentru forţa tăietoare (fig.II.72. a), se obţin două corpuri legate cu două bare paralele. Corpul II fiind fix şi rămînînd deci orizontal, cer-

pul II se va deplasa paralel cu acesta, adică păstrîndu-şi poziţia orizontală.

Intr-adevăr, deoarece corpul II este fix, centrul instantaneu relativ (1,2) este în acelaşi timp şi centru instantaneu absolut al corpului I, şi găsindu-se la infinit pe direcţie orizontală, rezultă că deplasîndu-se, corpul I rămîne paralel cu poziţia sa iniţială, adică orizontal (fig.II.72.b).

Relaţia de lucru mecanic virtual este:

$$1 \cdot \delta x - T_1 \cdot \delta_i^s = 0 \qquad \text{(II.127.a)}$$

de unde:

$$T_i = - \frac{\delta x}{\delta_i^s} \qquad \text{(II.127.b)}$$

Scara se obţine pentru $\delta_i^s = 1$, iar semnul minus confirmă că linia de influenţă este negativă pe porţiunile pe care deplasările mecanismului se produc în sus.

In mod similar se obţine - ca un caz particular - linia de influenţă a reacţiunii V_B (fig.II.72.c şi d).

b) <u>Linia de influenţă a momentului încovoietor M_i</u>.

Cu mecanismul din fig.II.72.e şi diagrama deplasărilor pe verticală din fig.II:72.f, relaţia de lucru mecanic virtual este:

$$-1 \cdot \delta x - M_1 \cdot \theta_1 = 0 \qquad \text{(II.128.a)}$$

de unde:

$$M_1 = - \frac{\delta x}{\theta_1} \qquad \text{(II.128.b)}$$

ceea ce ne arată că scara liniei de influenţă se obţine pentru $\theta_1 = 1$, ordonata maximă fiind deci $a_i \theta_1 = a_i$.

Linia de influenţă pentru momentul M_B din încastrare, se obţine ca în cazul particular (fig.II.72.g şi h).

Se regăsesc astfel liniile de influență trasate și pe cale analitică, cu caracteristicile respective.

II.3.4.3. Grinda cu console.

Liniile de influență pentru reacțiuni și eforturi sînt trasate în fig.II.73 și nu necesită explicații suplimentare. Se vor scrie de aceea numai relațiile de lucru mecanic virtual, din care rezultă scara pentru fiecare linie de influență.

- Linia de influență a reacțiunii V_A: (fig.II.73.a și b):

$$1 \cdot \delta x - V_A \cdot \delta_A = 0 \qquad \text{(II.129.a)}$$

de unde: $$V_A = \frac{\delta x}{\delta_A} \qquad \text{(II.129.b)}$$

deci se ia $\delta_A = 1$

- Linia de influență a reacțiunii V_B (fig.II.73.c și d):

$$1 \cdot \delta x - V_B \cdot \delta_B = 0 \qquad \text{(II.130.a)}$$

de unde: $$V_B = \frac{\delta x}{\delta_B} \qquad \text{(II.130.b)}$$

deci se ia $\delta_B = 1$.

- Linia de influență a forței tăietoare T_1.

(fig.II.73 e și f):

$$1 \cdot \delta x - T_1 \cdot \delta_i^s - T_1 \cdot \delta_i^d = 0 \qquad \text{(II.131)}$$

de unde:

$$T_1 = \frac{\delta_x}{\delta_i^s + \delta_i^d}, \text{ deci}$$

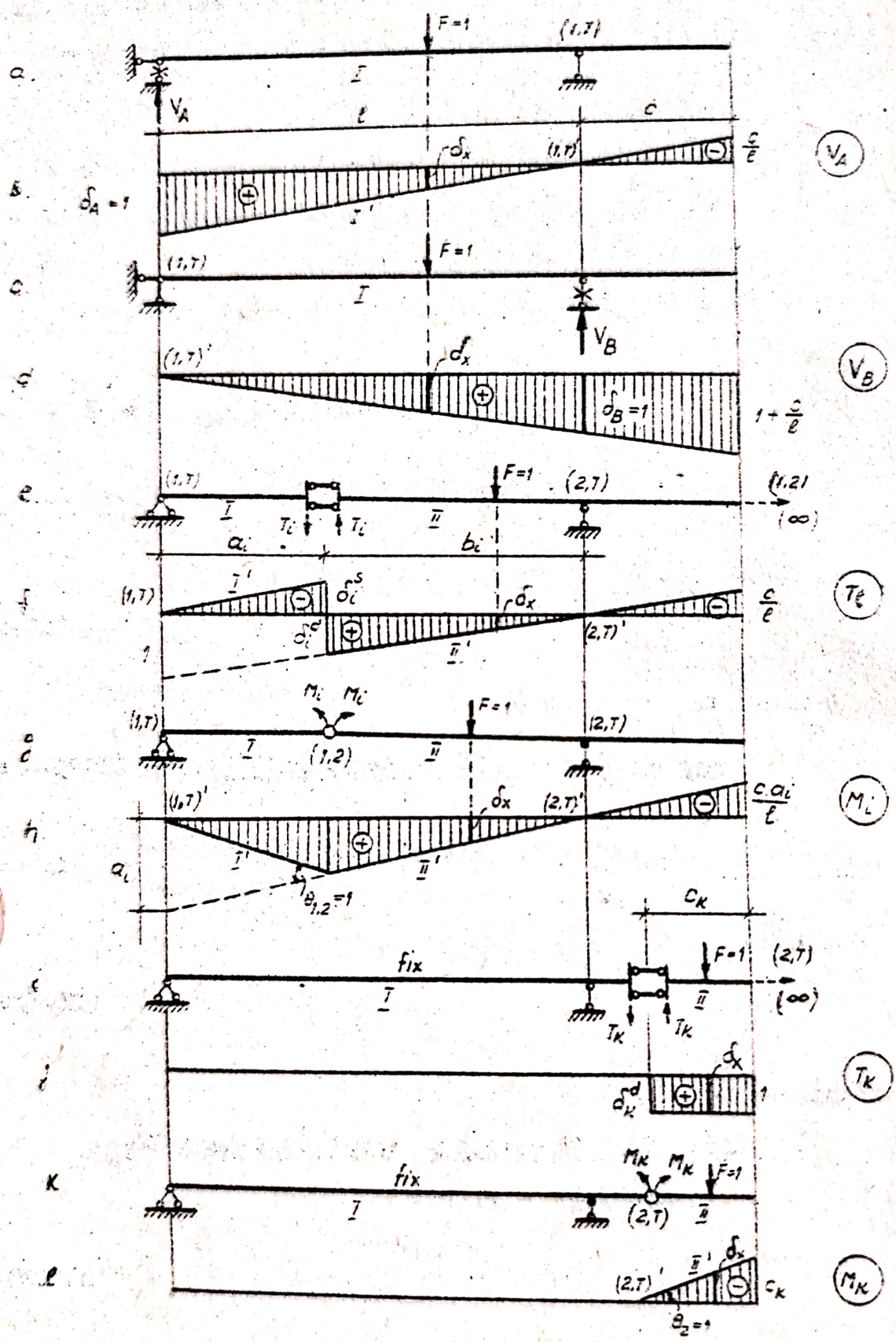

a.
F=1
(1,T)
I
V_A
ℓ
c
b.
$\delta_A=1$
δ_x
$\frac{c}{\ell}$
V_A
c.
F=1
V_B
d.
$\delta_B=1$
$1+\frac{c}{\ell}$
V_B
e.
(2,T)
(1,2)
T_i
a_i
b_i
II
(∞)
f.
δ_i^s
δ_i^c
$\frac{c}{\ell}$
T_ℓ
g.
M_i
h.
$\frac{c\,a_i}{\ell}$
M_i
$\vartheta_{1,2}=1$
i.
fix
c_K
T_K
k.
δ_K^d
M_K
ℓ.
$\vartheta_2=1$
c_K
M_K

Fig II 73

- Linia de influenţă a momentului încovoietor M_1 (fig.II.73.g şi h):

$$1 \cdot \delta x - M_1 \cdot \theta_1 - M_1 \cdot \theta_2 = 0 \qquad \text{(II.132)}$$

de unde: $M_1 = \dfrac{\delta x}{\theta_1 + \theta_2}$, deci $\theta_1 + \theta_2 = \theta_{1,2} = 1$

- Linia de influenţă a forţei tăietoare T_k (fig.II.73.i şi j):

$$1 \cdot \delta x - T_k \cdot \delta_k^d = 0 \qquad \text{(II.133)}$$

de unde: $T_k = \dfrac{\delta x}{\delta_k^d}$, deci $\delta_k^d = 1$

- Linia de influenţă a momentului încovoietor M_k (fig. II.73.k şi l):

$$-1 \cdot \delta x - M_k \cdot \theta_2 = 0 \qquad \text{(II.134)}$$

de unde: $M_k = -\dfrac{\delta x}{\theta_2}$, deci $\theta_2 = 1$

Se obţin, evident, linii de influenţă identice cu cele determinate pe cale analitică.

II.3.4.4. Grinzi cu console şi articulaţii.

Se consideră ca exemplu grinda Gerber din fig.II.74.a,a cărei schemă statică de alcătuire este cea din fig.II.74.b şi se trasează liniile de influenţă pentru o serie de reacţiuni şi eforturi, după procedeul general utilizat şi la sistemele simple.

După ce se trasează diagramele de deplasare virtuale pe verticală ale mecanismelor obţinute prin scoaterea legăturii corespunzătoare reacţiunii sau efortului secţional studiat, scara fiecărei linii de influenţă rezultă folosind ecuaţia de

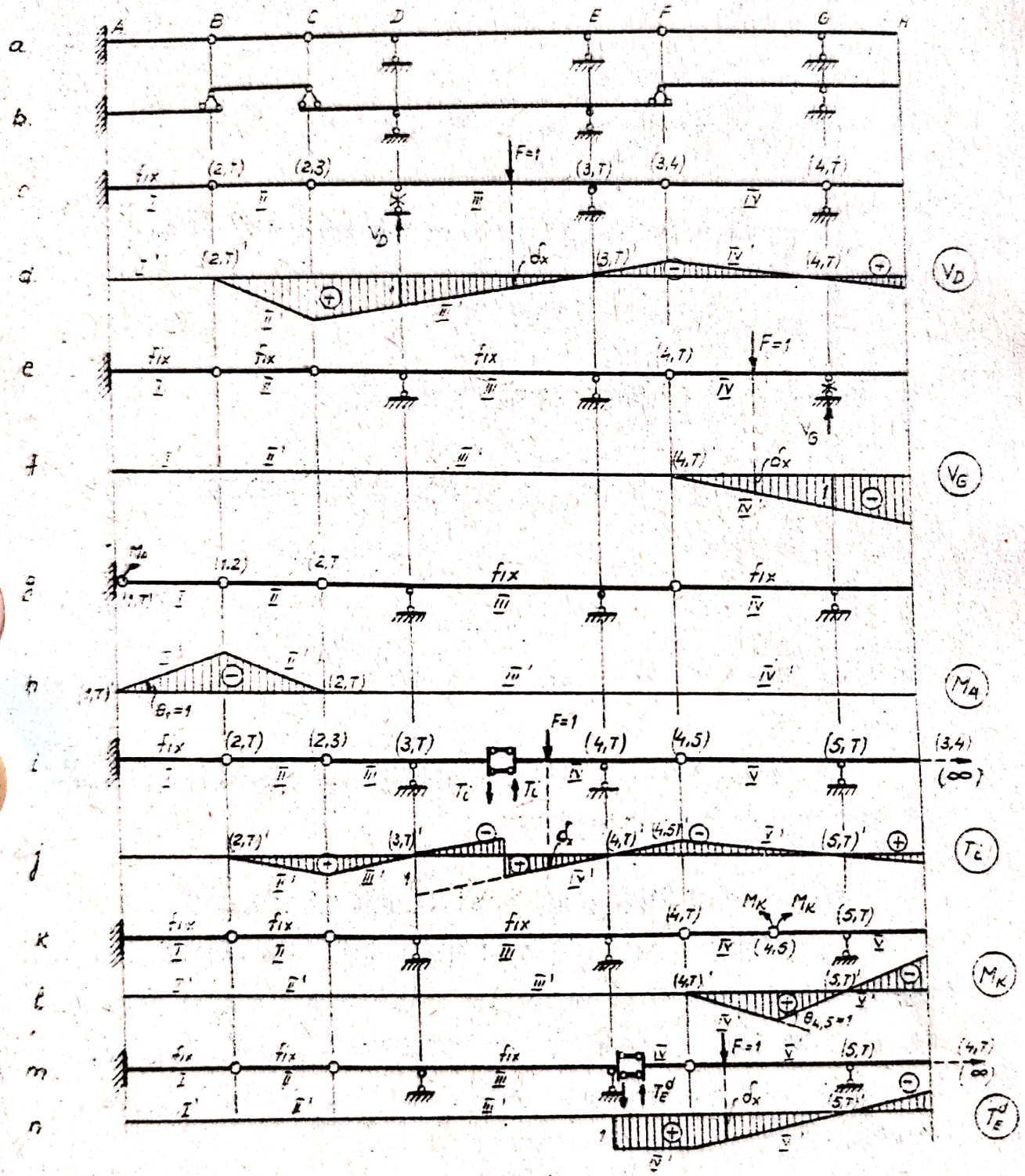

a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
l
m
n
A
B
C
D
E
F
G
H
F=1
fix
(2,T)
(2,3)
(3,T)
(3,4)
(4,T)
(4,5)
(5,T)
(1,2)
(1,T)
V_D
V_G
M_A
T_i
M_K
T_E^d
$\theta_1=1$
$\theta_{4,5}=1$
δ_x
(3,4)
(∞)

Fig. II 74

echilibru scrisă prin lucru mecanic virtual, ceea ce revine în general - pe baza relaţiei (II.108) - la a considera:

- pentru reacţiuni: $\delta v = 1$ (IIX135.a)
- pentru forţe tăietoare: $\delta_i^s + \delta_i^d = \delta_i^{rel} = 1$ (II.135.b)
- pentru momente încovoietoare: $\theta_i^s + \theta_i^d = \theta_i^{rel} = 1$ (II.135.c)

Analizînd liniile de influenţă trasate în fig.II.74 d÷ II.74.n, se pot face o serie de observaţii care confirmă de fapt cele discutate în legătură cu calculul sistemelor cu console şi articulaţii la sarcini fixe şi anume:

a) Liniile de influenţă ale reacţiunilor şi eforturilor secţionale din sistemele principale au ordonate diferite de zero atît pe domeniul sistemului principal respectiv, cît şi pe cele ale lungimea sistemului care se descarcă pe această. Aceasta ne arată că un sistem principal este solicitat atît de încărcările care acţionează direct asupra lui, cît şi de cele care se găsesc pe sistemele secundare adiacente. Deci,cu cît linia de influenţă a unei reacţiuni sau a unui efort secţional are o întindere mai mare, mărimea acestuia este influenţată de sarcinile de pe o porţiune mai mare a structurii.

b) Liniile de influenţă ale reacţiunilor şi eforturilor secţionale de pe sistemele secundare au ordonate diferite de zero atît pe lungimea sistemului respectiv, cît şi a sistemelor secundare care se descarcă pe aceasta.

Rezultă din aceste observaţii că pentru a nu exista în structură porţiuni care să fie prea puternic solicitate, este necesar ca numărul de sisteme principale să fie mare, respectiv numărul de sisteme secundare care transmit încărcările la sistemele pe care se reazemă să fie cît mai mic, concluzie menţionată şi în paragraful referitor la calculul grinzilor Gerber la acţiunea sarcinilor fixe.

II.3.4.5. Bare cotite, cadre static determinate.

Aplicarea căii cinematice la trasarea liniilor de influenţă ale reacţiunilor şi eforturilor secţionale la aceste structuri este exemplificată pentru sistemul din fig.II.75, la care s-a determinat linia de influenţă a reacţiunii H_B şi cea a momentului M_{EF}.

Aceasta necesită determinarea - pentru fiecare mecanism obţinut prin scoaterea legăturii respective - a centrelor instantanee de rotaţie şi construirea diagramei de deplasări pe verticală a căii pe care se deplasează convoiul de sarcini mobile.

Pentru stabilirea scării, se procedează în felul următor:

- Linia de influenţă a reacţiunii H_B(fig.II.75.b):

Ecuaţia de echilibru prin lucru mecanic virtual este:

$$1 \cdot \delta_x - H_B \cdot \delta_B^h = 0 \qquad \text{(II.136)}$$

de unde:

$$H_B = \frac{\delta_x}{\delta_B^h} \quad \text{deci} \quad \delta_B^h = 1$$

δ_B^h reprezintă deplasarea pe orizontală a punctului B de aplicaţie a reacţiunii H_B. Această deplasare nu apare în diagrama construită, dar se poate exprima în funcţie de rotirea corpului II pe care se găseşte punctul B şi de raza vectoare d a punctului B, măsurată faţă de centrul instantaneu de rotaţie (2,T):

$$\delta_B^h = \theta_2 \cdot d = \theta_2 \cdot 4a \cdot \operatorname{tg}\alpha = \theta_4 \cdot 4a \frac{h}{2a} = \theta_2 \cdot 2h$$

Din condiţia:

$$\delta_B^h = \theta_2 \cdot 2h = 1$$

rezultă:

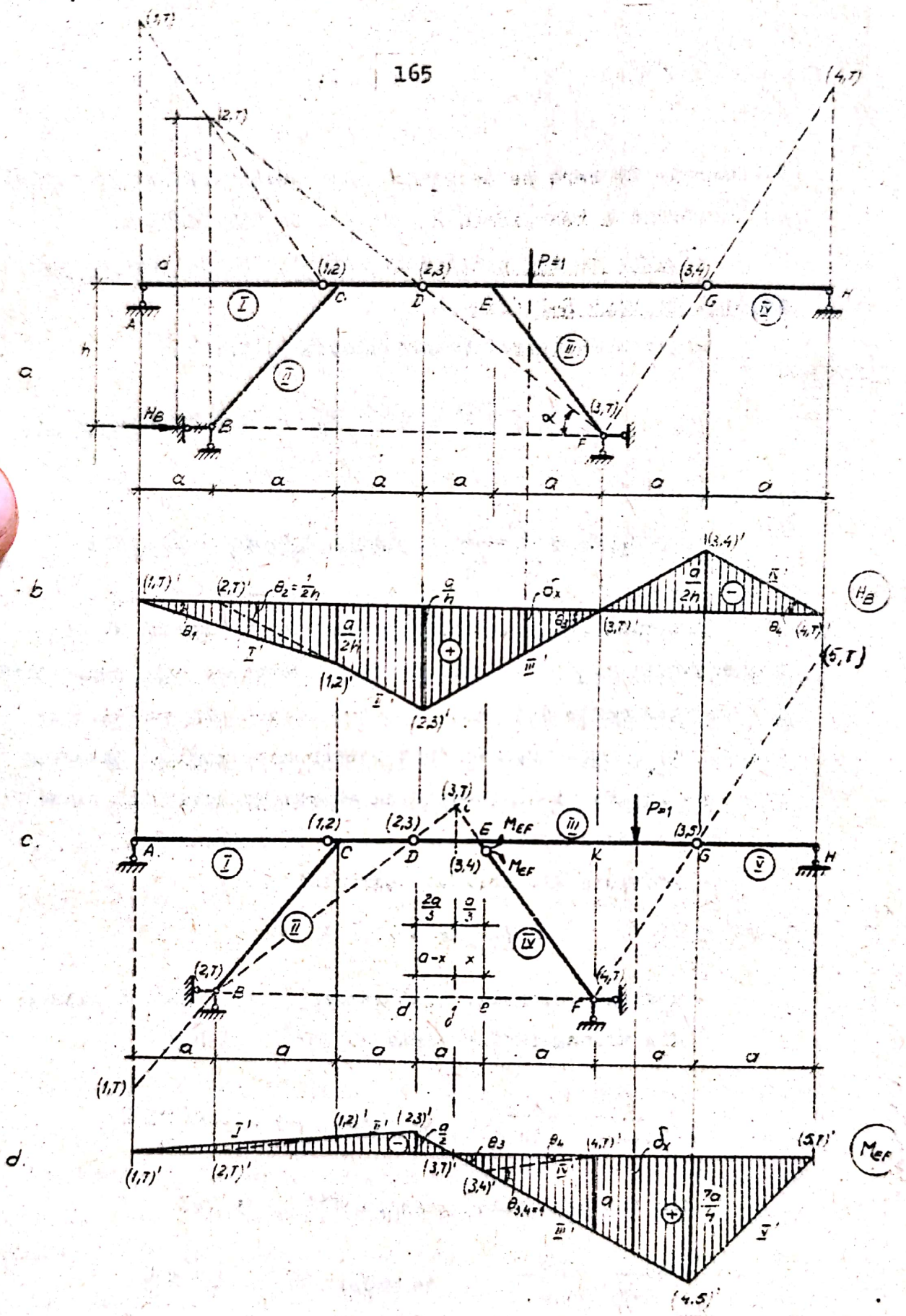

a
b
c.
d.
P=1
H_B
M_{EF}
(1,T)
(2,T)
(3,T)
(4,T)
(5,T)
(1,2)
(2,3)
(3,4)
(3,5)
(1,T)'
(2,T)'
(3,T)'
(4,T)'
(5,T)'
(1,2)'
(2,3)'
(3,4)'
(4,5)'
$\theta_2 = \frac{1}{2h}$
$\frac{a}{h}$
$\frac{a}{2h}$
δ_x
$\frac{2a}{3}$
$\frac{a}{3}$
a-x
x
$\frac{a}{2}$
$\frac{7a}{4}$
$\theta_{3,4=1}$
θ_1
θ_3
θ_4
a
h
d
e
f
I
II
III
IV
V

Fig. II. 75

$$\theta_2 = \frac{1}{2h}$$

în funcţie de care se determină apoi toate ordonatele liniei de influenţă a reacţiunii H_B, notate în fig.II.75.b.

- <u>Linia de influenţă a momentului încovoietor de pe capătul de bară E-F</u> (fig.II.75.d).

Ecuaţia de lucru mecanic virtual este:

$$1 \cdot \delta_x - M_{EF} \cdot \theta_3 - M_{EF} \cdot \theta_4 = 0 \qquad \text{(II.137)}$$

de unde:

$$M_{EF} = \frac{\delta_x}{\theta_3 + \theta_4} \qquad \text{deci: } \theta_3 + \theta_4 = \theta_{3,4} = 1$$

Diagrama deplasărilor punctelor de pe corpul IV este reprezentată punctat în fig.II.75.d, deoarece bara respectivă E-F nu face parte din linia de încărcare a structurii, iar unghiul $\theta_{3,4}$ care trebuie luat unitar este unghiul exterior notat pe figură şi în funcţie de acesta se determină toate ordonatele caracteristice ale liniei de influenţă:

- ordonata din dreptul punctului K:

$$\delta_K = \theta_{2,4} \cdot a = a$$

- poziţia centrului instantaneu (3,T), rezultă astfel:

din triunghiurile asemenea Bji şi BdD:

$$\frac{\overline{i-j}}{3a-x} = \frac{h}{2a} \qquad \text{de unde: } \overline{i-j} = \frac{(3a-x)h}{2a}$$

din triunghiurile asemenea Fji şi FeE

$$\frac{\overline{i-j}}{a+x} = \frac{h}{a} \qquad \text{de unde: } \overline{i-j} = \frac{(a+x)h}{a}$$

şi egalînd cele două valori ale lui $\overline{i-j}$ se obţine $x = a/3$

- unghiul θ_3 are deci valoarea:

$$\theta_3 = \frac{\delta_K}{a + \frac{a}{3}} = \frac{3}{4}$$

- ordonata din dreptul punctului G:

$$\delta_G = \theta_3 (2a + \frac{a}{3}) = \frac{7a}{4}$$

- ordonata din dreptul punctului D:

$$\delta_D = \theta_3 \cdot \frac{2a}{3} = \frac{a}{2}$$

II.3.4.6. <u>Cazul sarcinilor transmise indirect</u>.

Se consideră ca exemplu grinda simplu rezemată din fig. II.76.a la care, pentru a determina linia de influenţă a forţei tăietoare din secţiunea i a grinzii principale, se introduce legătura corespunzătoare acestui efort secţional şi apoi se dă deplasarea virtuală compatibilă cu legăturile rămase.

Scriind relaţia de echilibru prin lucru mecanic virtual, se obţine:

$$1 \cdot \delta_x - T_i (\delta_i^s + \delta_i^d) = 0 \qquad \text{(II.138)}$$

de unde: $T_i = \frac{\delta_x}{\delta_i^s + \delta_i^d}$

deci este necesar să se ia $\delta_i^s + \delta_i^d = 1$, pentru ca diagrama deplasărilor δ_x să reprezinte linia de influenţă a forţei tăietoare T_i. Această diagramă reprezintă deplasările pe verticală ale longeronilor şi se vede din fig.II.76.b că aceştia rămîn continui, întrucît secţiunea parţială s-a făcut în grinda principală; diagrama corespunzătoare este deci cea din fig. II.76.c, obţinută de fapt din diagrama deplasărilor trasată -

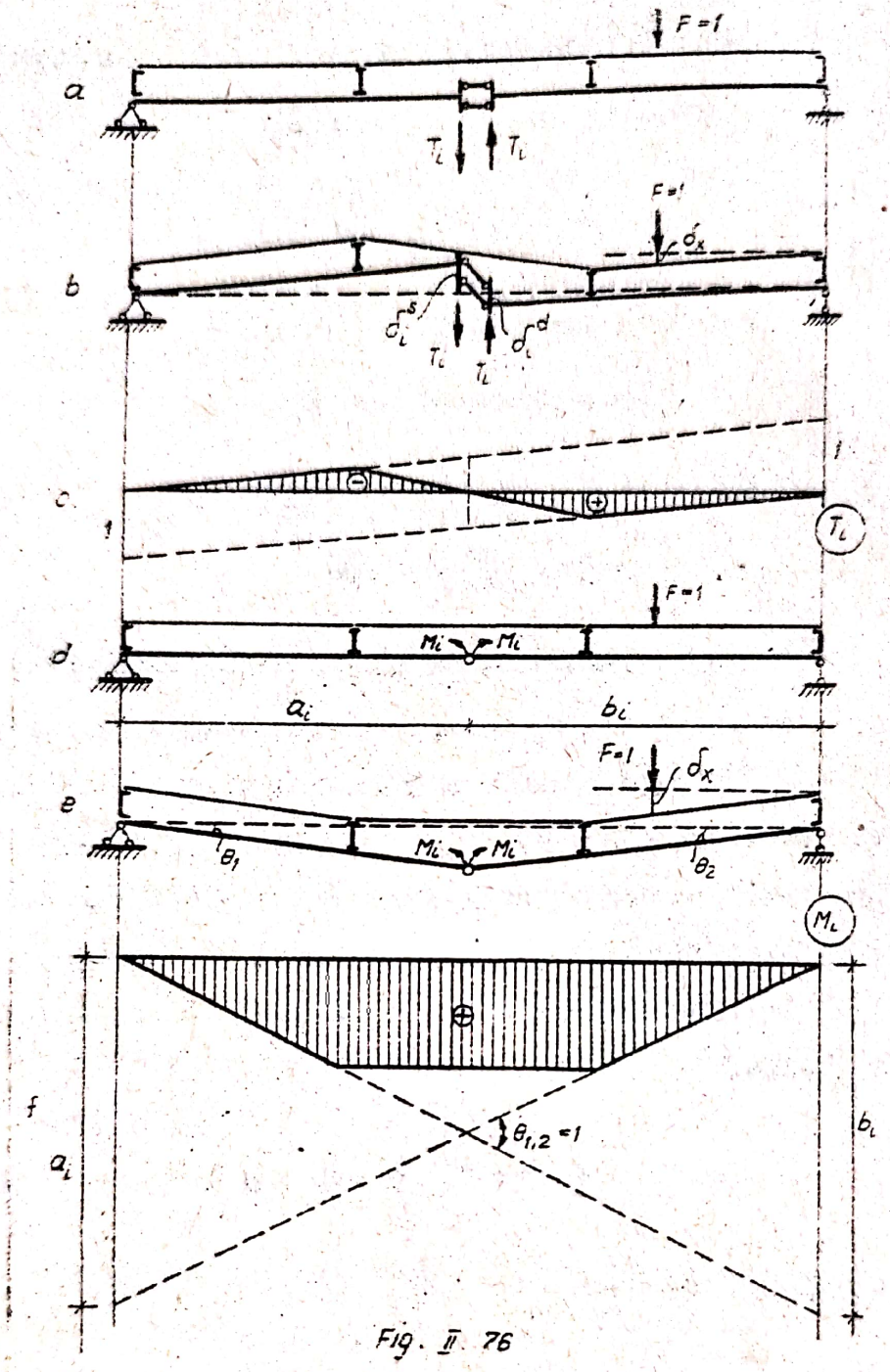


Fig. II 76

punctat - pentru cazul transmiterii directe a sarcinii unitare, care se corectează apoi păstrînd ordonatele din dreptul antretezelor şi unind liniar aceste ordonate.

Se obţine în felul acesta diagrama deplasărilor pe verticală a liniei de încărcare, alcătuită în cazul acesta din lengereni, care rămîn continui, indiferent de legăturile suprimate

în grinda principală.

Scara liniei de influenţă se determină luînd deplasarea unitară pe direcţia reacţiunii sau efortului secţional studiat în diagrama deplasărilor necorectată, deoarece deplasarea respectivă corespunde grinzii principale, de unde s-a scos legătura.

Aceste concluzii se confirmă şi pentru linia de influenţă a momentului încovoietor M_1, pentru care este reprezentat în fig.II.76.e modul de deplasare al grinzii principale şi al longeronilor, iar în fig.II.76,f este trasată diagrama deplasărilor pentru longeroni.

Ecuaţia de lucru mecanic este în acest caz:

$$1 \cdot \delta x - M_1(\theta_1 + \theta_2) = 0 \qquad \text{(II.139)}$$

din care rezultă:

$$M_1 = \frac{\delta x}{\theta_1 + \theta_2}$$

ceea ce arată că trebuie să luăm $\theta_1 + \theta_2 = \theta_{1,2} = 1$ în diagrama necorectată, pentru ca ordonatele δx din diagrama corectată să reprezinte variaţia momentului încovoietor M_1.

In consecinţă, liniile de influenţă în cazul transmiterii indirecte a sarcinilor se determină astfel:

- se trasează alura diagramei deplasărilor pentru sarcini transmise direct;
- se stabileşte scara liniei de influenţă în diagrama necorectată;
- se corectează linia de influenţă, păstrînd ordonatele din dreptul antretoazelor şi unind liniar între aceste ordonate.

Ca exemple se prezintă liniile de influenţă ale reacţiunii V_A şi momentului încovoietor M_{E-D} la cadrul static de-

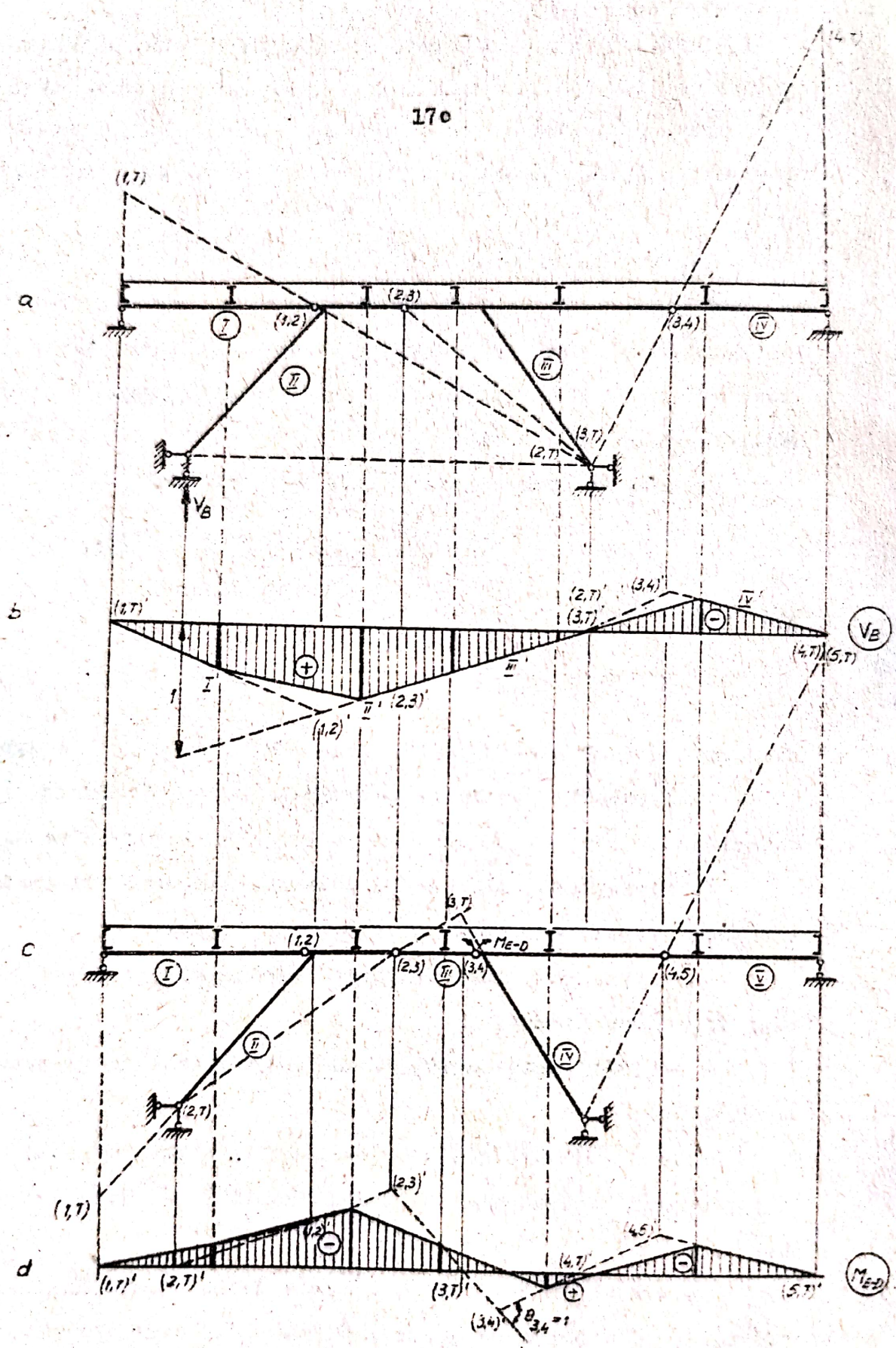

a
b
c
d
(1,T)
(1,2)
(2,3)
(3,4)
(3,T)
(2,T)
V_B
(1,T)'
(2,T)'
(3,4)'
(3,T)'
(4,T)
(5,T)
(1,2)'
(2,3)'
M_{E-D}
(4,5)
(4,5)'
(4,T)'
(5,T)'
$\theta_{3,4}=1$

Fig. II.77.

terminat din fig.II.77.

II.3.5. Derivatele parțiale ale funcțiilor de influență.

In cele prezentate anterior s-a considerat că acțiunea pentru care se trasează liniile de influență este o forță unitară mobilă. Acțiunea poate fi însă și un moment unitar mobil, pentru cazul cînd pe sistem ar urma să se deplaseze un convoi de momente concentrate.

Se consideră expresia generală a efortului dintr-o secțiune oarecare i a unui sistem, în cazul cînd variază - pe lîngă poziția sarcinii unitare - și poziția secțiunii respective. Această expresie, numită **funcție de influență**, are forma:

$$S_{i(F)} = f(x, a_i) \qquad \text{(II.140)}$$

unde:

x = absoisa secțiunii în care se găsește sarcina mobilă;

a_i = absoisa secțiunii în care se scrie expresia efortului S_i.

In mod similar vom putea scrie o funcție de influență pentru acțiunea unui moment unitar, notată cu $S_{i(M)}$.

Se poate arăta că:

a) Derivata funcției de influență $S_{i(F)}$ (produsă de acțiunea sarcinii unitare mobile) în raport cu abscisa x, este egală cu funcția de influență $S_{i(M)}$ (produsă de acțiunea momentului unitar mobil acționînd la aceeași abscisă), adică:

$$\frac{\partial S_{i(F)}}{\partial x_i} = S_{i(M)} \qquad \text{(II.141)}$$

Pentru a dovedi acest lucru, se consideră o funcție de influență oarecare $S_{i(F)}$ - fig.II.78.a,b și acțiunea unui mo-

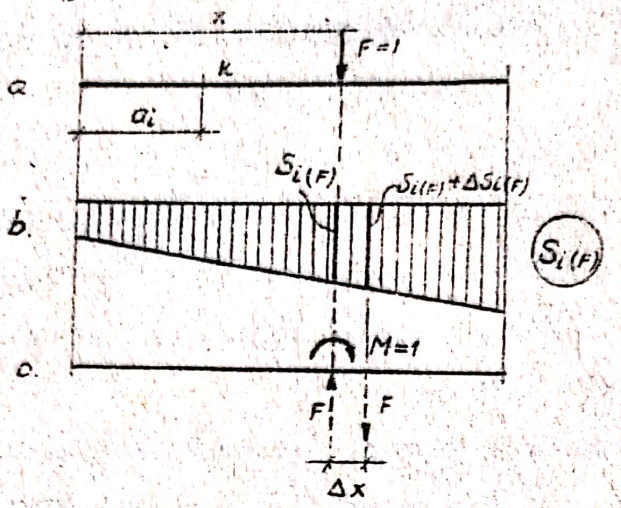


Fig. II.78

ment unitar mobil - fig.II.78.c.

Momentul unitar se poate înlocui printr-un cuplu de două forţe situate la distanţa Δx, deci:

$$M = F \cdot \Delta x = 1 \qquad \text{(II.142)}$$

Folosind ordonatele din funcţia de influenţă $S_{i(F)}$, se poate scrie funcţia $S_{i(M)}$:

$$-F \cdot S_{i(F)} + F \cdot \left[S_{i(F)} + \Delta S_{i(F)} \right] = S_{i(M)}$$

sau, scoţînd factor comun pe F şi înmulţind membrul întîi cu raportul $\Delta x / \Delta x$ se obţine:

$$F \cdot \Delta x \cdot \frac{S_{i(F)} + \Delta S_{i(F)} - S_{i(F)}}{\Delta x} = S_{i(M)}$$

şi ţinînd cont de (II.142), rezultă:

$$M \cdot \frac{\Delta S_{i(F)}}{\Delta x} = S_{i(M)}$$

sau (pentru M = 1):

$$\frac{\Delta S_{i(F)}}{\Delta x} = S_{i(M)}$$

sau, trecînd la limită:

$$\frac{\partial S_{i(F)}}{\partial x} = S_{i(M)}$$

adică relaţia (II.141).

Mai trebuie precizat că semnul funcţiei de influenţă $S_{i(M)}$ depinde de înclinarea dreptei care reprezintă funcţia de influenţă $S_{i(F)}$: plus cînd funcţia $S_{i(F)}$ este coborîtoare de la stînga spre dreapta şi minus în caz contrar.

Folosind relaţia dedusă, se pot determina liniile de influenţă produse de acţiunea unui moment unitar în funcţie de liniile de influenţă produse de o forţă unitară, aşa cum se va proceda pentru grinda simplu rezemată din fig.II.79.

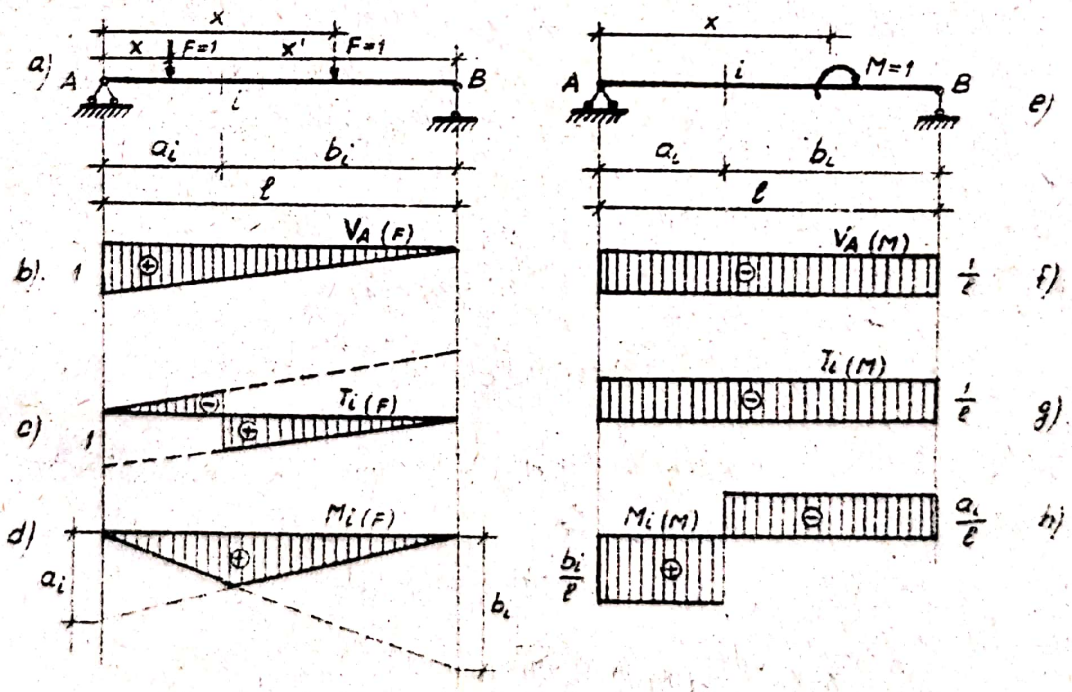


Fig II 79

- Linia de influenţă a reacţiunii V_A.

Expresia reacţiunii V_A produsă de F = 1 este:

$$V_{A(F)} = \frac{1 \cdot x}{\ell}$$

linia de influenţă fiind cea din fig.II.79.b.

Folosind relaţia (II.141), se obţine:

$$\frac{\partial V_{A(F)}}{\partial x} = V_{A(M)} = \frac{1}{\ell}$$

Deci, linia de influenţă a reacţiunii V_A produsă de M = 1 este constantă (fig.II.79.f) şi negativă (datorită faptului că funcţia $V_{A(F)}$ este urcătoare de la stînga spre dreapta).

- Linia de influenţă a forţei tăietoare T_i.

Expresiile forţei tăietoare $T_{i(F)}$ şi ale derivatelor acestei funcţii sînt:

- pentru F = 1 în stînga secţiunii:

$$T_{i(F)} = V_{A(F)} - 1 = \frac{1 \cdot x}{\ell} - 1 = \frac{x - \ell}{\ell}$$

linia de influenţă fiind cea din fig.II.79.b.

Conform relaţiei (II.141), se obţine:

$$\frac{\partial T_{i(F)}}{\partial x} = T_{i(M)} = \frac{1}{\ell}$$

deci linia de influenţă a forţei tăietoare T_i produsă de M = 1 este constantă şi egală cu $1/\ell$

- pentru F = 1 în dreapta secţiunii:

$$T_{i(F)} = V_{A(F)} = \frac{1 \cdot x}{\ell}$$

iar derivata în raport cu x este:

$$\frac{\partial T_{i(F)}}{\partial x} = T_{i(M)} = \frac{1}{\ell}$$

Rezultă astfel linia de influenţă din fig.II.79.g, negativă deoarece ambele ramuri ale liniei de influenţă a forţei tăietoare $T_{i(F)}$ sînt urcătoare de la stînga spre dreapta.

- Linia de influenţă a momentului încovoietor M_i.

Procedînd în mod analog ca în cazul precedent, se obţine:

- pentru F = 1 în stînga secţiunii:

$$\overleftarrow{M_{i(F)}} = V_{B(F)} \cdot b_i = \frac{1 \cdot x'}{\ell} b_i$$

deci:

$$\frac{\partial M_{i(F)}}{\partial x} = M_{i(M)} = \frac{b_i}{\ell}$$

obţinîndu-se astfel ramura din stînga a liniei de influenţă a momentului încovoietor din secţiunea i produs de M = 1 (fig. II.79.h), pozitivă deoarece ramura corespunzătoare în linia de influenţă $M_{i(F)}$ este coborîtoare de la stînga spre dreapta.

- pentru F = 1 în dreapta secţiunii:

$$\overrightarrow{M_{i(F)}} = V_{A(F)} \cdot a_i = \frac{1 \cdot x}{\ell} \cdot a_i$$

deci:

$$\frac{\partial M_{i(F)}}{\partial x} = M_{i(M)} = \frac{a_i}{\ell}$$

obţinîndu-se astfel ramura de dreapta a liniei de influenţă din fig.II.79.h, negativă deoarece ramura corespunzătoare din linia de influenţă $M_{i(F)}$ este urcătoare de la stînga spre dreapta.

b).Derivata funcţiei de influenţă $S_{i(F)}$ în raport cu abscisa secţiunii în care se analizează efortul S_i este egală cu funcţia de influenţă a efortului de grad inferior, ceea ce

se scrie astfel:

$$\frac{\partial S_{i(F)}}{\partial a_i} = \dot{S}_{i(F)} \qquad \text{(II.143)}$$

Astfel, dacă se consideră linia de influenţă a momentului încovoietor (fig.II.79.c) şi se devirează această funcţie, se obţine linia de influenţă a forţei tăietoare (fig.II.79.b):

- pentru F = 1 în stînga secţiunii:

$$M_{i(F)} = V_A \cdot a_i - 1(a_i - x) = \frac{1 \cdot x}{\ell} a_i - (a_i - x)$$

deci: $$\frac{\partial M_{i(F)}}{\partial a_i} = \frac{x}{\ell} - 1$$

adică expresia forţei tăietoare pentru F = 1 în stînga secţiunii, cu care se trasează ramura de stînga a liniei de influenţă $T_{i(F)}$

- pentru F = 1 în dreapta secţiunii:

$$M_{i(F)} = V_A \cdot x_i = \frac{1 \cdot x}{\ell} a_i$$

deci: $$\frac{\partial M_{i(F)}}{\partial a_i} = \frac{x}{\ell}$$

adică expresia forţei tăietoare pentru F =1 în dreapta secţiunii, cu care se trasează ramura de dreapta a liniei de influenţă $T_{i(F)}$.

II.3.6. Determinarea eforturilor maxime.

II.3.6.1. Generalităţi.

Aşa cum s-a subliniat la începutul capitolului de calcul la sarcini mobile, rezolvarea acestei probleme constă în determinarea poziţiilor celor mai defavorabile ale convoiului de sarcini care urmează să se deplaseze pe o anumită structură, în

vederea stabilirii valorilor maxime ale anumitor reacţiuni sau eforturi, necesare unei dimensionări corecte a elementelor structurii respective.

Tipurile de convoaie de sarcini mobile sînt indicate în standardele de proiectare (paragraf I.5 din lucrare) şi se aleg în funcţie de tipul structurii şi destinaţia acesteia, date stabilite prin tema de proiect.

Convoaiele tip de sarcini mobile reprezintă succesiuni de sarcini concentrate aşezate la anumite distanţe, provenind din schematizarea podurilor rulante sau a unor şiruri de vehicule auto sau de cale ferată.

Odată precizat convoiul de sarcini mobile la care urmează să fie calculată o anumită structură, se stabilesc secţiunile în care este necesară determinarea eforturilor maxime, precum şi natura acestor eforturi, în raport cu tipul elementelor ce trebuie dimensionate şi al solicitărilor preponderente care hotărăsc alegerea dimensiunilor acestora.

Astfel, în cazul structurilor alcătuite din bare drepte, analizate în subcapitolele precedente şi la care solicitarea principală este încovoierea, este necesară în general determinarea valorilor maxime ale momentelor încovoietoare şi în anumite situaţii (în special la structurile din beton armat), ale forţelor tăietoare. Este de asemenea necesară cunoaşterea reacţiunilor maxime (pentru dimensionarea aparatelor de rezemare şi a fundaţiilor structurii), precum şi ale forţelor axiale maxime în anumite elemente ale unor structuri, cum sînt stîlpii cadrelor.

In legătură cu secţiunile în care urmează să se determine aceste eforturi maxime, ele se aleg în punctele cele mai solicitate ale elementelor structurii şi anume: în dreptul reazemelor, în capetele barelor din dreptul nodurilor, în dreptul

punctelor de aplicaţie ale sarcinilor concentrate, precum şi în unul sau mai multe puncte de pe deschiderea fiecărei bare.

Instrumentul principal care ne ajută la stabilirea reacţiunilor sau eforturilor maxime sînt liniile de influenţă, al căror mod de determinare a fost analizat în subcapitolele precedente. Folosind liniile de influenţă se pot stabili anumite criterii, care fac ca numărul de încercări pentru găsirea poziţiei celei mai defavorabile a convoiului de sarcini mobile să fie minim.

In general, dacă s-a trasat linia de influenţă pentru o reacţiune sau un efort oarecare S_i, mărimea reacţiunii sau efortului respectiv în ipoteza unei anumite poziţii a convoiului de sarcini mobile (fig.II.80.a) se poate scrie:

$$S_i = s_{i1}F_1 + s_{i2}F_2 + \ldots + s_{in}F_n = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}F_k \quad (II.144)$$

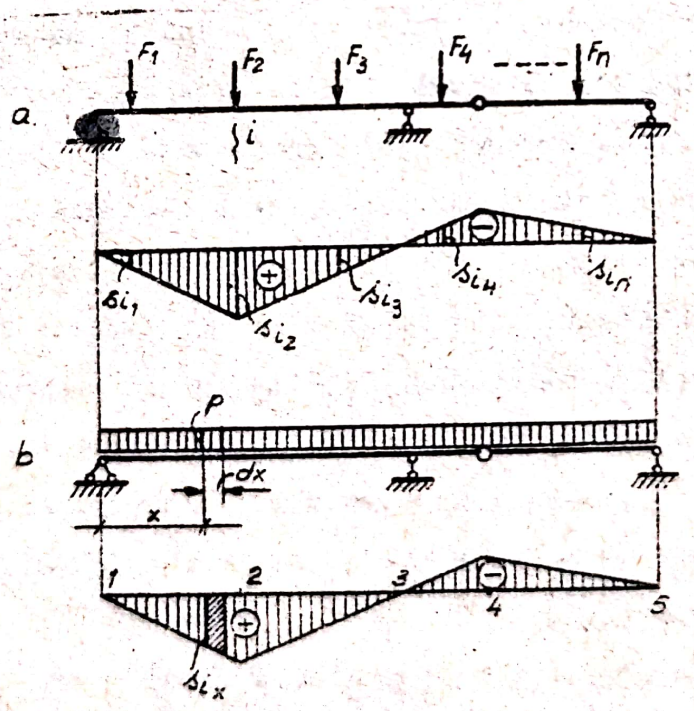


Fig II 80

In relaţia (II.144), s_{ik} reprezintă ordonatele din linia de influenţă din dreptul fiecărei forţe concentrate (coeficienţii de influenţă).

Sau, dacă pe structură se găseşte o încărcare uniform distribuită (sarcina echivalentă - asupra căreia se va reveni mai departe - fig.II.78.b), efortul S_i se poate scrie:

$$S_i = \sum \int_j^k p.dx.s_{ix} = \sum p \int_j^k s_{ix} dx = \sum \pm p.\Omega_{j-k} \qquad (II.145)$$

In relaţia (II.145), Ω_{j-k} reprezintă ariile suprafeţelor din linia de influenţă.

Relaţiile (II.144) şi (II.145) ne dau o serie de indicaţii asupra modului de aşezare a convoiului de sarcini mobile pe structură, pentru a obţine eforturi cît mai mari:

a) Trebuie încărcată zona cu ordonatele cele mai mari, astfel ca produsele $s_{ik}F_k$ - sau $p\Omega_{j-k}$ să fie cît mai mari.

b) Trebuie ca - în cazul forţelor concentrate - forţele din convoi care au valori mari să se găsească în dreptul ordonatelor mari, deci în vîrfurile liniei de influenţă, pentru a obţine produse $s_{ik}F_k$ de asemenea mari.

c) Cînd linia de influenţă are mai multe zone cu semne diferite, trebuie încărcate - dacă este practic posibil - numai zone cu acelaşi semn, pentru ca în sumele din relaţiile (II.144) sau (II.145) să intre numai termeni care se adună.

II.3.6.2. <u>Criteriul general pentru determinarea eforturilor maxime folosind liniile de influenţă</u>.

Se consideră cazul general al unui efort oarecare S_i, a cărui linie de influenţă are o formă poligonală (fig.II.81).

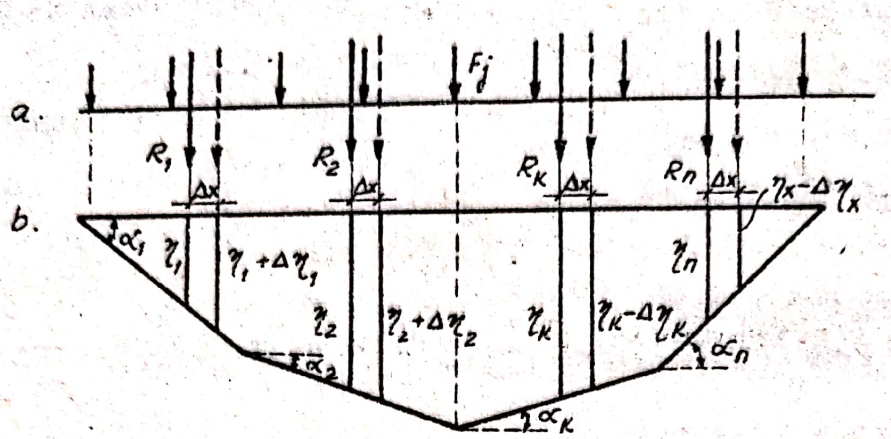


Fig. II.81.

Așa cum s-a stabilit anterior, poziția de efort maxim a convoiului corespunde situației cînd una din forțe (F_j) se găsește în dreptul ordonatei maxime a liniei de influență și presupunem că aceasta este poziția din fig.II.81.a.

Înlocuind grupurile de forțe de pe fiecare porțiune liniar continuă a liniei de influență prin rezultantele corespunzătoare R_1, R_2....R_n, mărimea efortului S_i se poate scrie conform relației (II.144):

$$S_i = R_1 \cdot \eta_1 + R_2 \cdot \eta_2 + \ldots + R_n \cdot \eta_n = \sum_{k=1}^{n} R_k \eta_k \qquad \text{(II.146)}$$

Dacă are loc o deplasare spre dreapta a convoiului de sarcini cu Δx, mărimea efortului considerat, în această nouă poziție, va fi:

$$S_i' = \sum_{k=1}^{n} R_k (\eta_k + \Delta\eta_k) \qquad \text{(II.147)}$$

deci prin această deplasare efortul S_i variază cu mărimea:

$$\Delta S_i = S_i' - S_i = \sum_{k=1}^{n} R_k(\eta_k + \Delta\eta_k) - \sum_{k=1}^{n} R_k \cdot \eta_k$$

sau:

$$\Delta S_i = \sum_{k=1}^{n} R_k \cdot \Delta\eta_k \qquad \text{(II.148)}$$

Din fig.II.81 se vede că:

$$\Delta\eta_k = \Delta x \cdot \operatorname{tg}\alpha_k$$

deci, înlocuind în (II.148):

$$\Delta S_i = \Delta x \sum_{k=1}^{n} R_k \cdot \operatorname{tg}\alpha_k \qquad \text{(II.149)}$$

Evident că dacă S_i este valoarea maximă a efortului, atunci prin mutarea convoiului în poziţia a doua efortul trebuie să scadă deci trebuie ca:

$$\Delta S_i < 0 \qquad \text{(II.150)}$$

Ţinînd cont de faptul că expresia lui ΔS_i este un produs de doi factori - relaţia (II.149) - pot exista două situaţii pentru care este îndeplinită condiţia (II.150):

a) $\Delta x > 0$ - ceea ce înseamnă deplasarea convoiului spre dreapta şi în acest caz trebuie ca al doilea factor să fie negativ, adică:

$$R_k \operatorname{tg}\alpha_k < 0 \qquad \text{(II.151.a)}$$

b) $\Delta x < 0$ - ceea ce înseamnă deplasarea convoiului la stînga şi în acest caz cel de al doilea factor trebuie să fie pozitiv, adică:

$$R_k \operatorname{tg}\alpha_k > 0 \qquad \text{(II.151.b)}$$

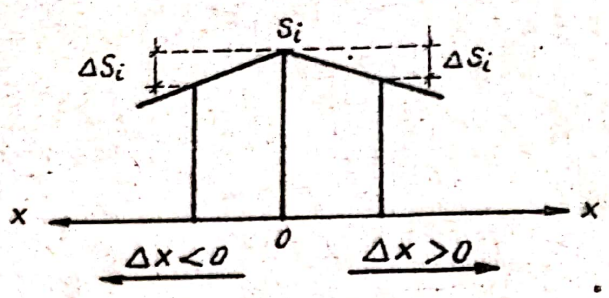


Fig. II.82

Cele două situaţii sînt prezentate schematic în fig.II.82.

Rezultă deci că dacă în situaţiile cărora le corespund relaţiile (II.151.a) şi (II.151.b) (deplasarea convoiului spre dreapta şi respectiv spre stînga) efortul S_i scade, poziţia de efort maxim corespunde situaţiei cînd este satisfăcută relaţia:

$$\sum_{k=1}^{n} R_k \operatorname{tg}\alpha_k = 0 \qquad \text{(II.152)}$$

Acest lucru rezultă şi din relaţia (II.149), care se poate pune sub forma:

$$\frac{\Delta S_i}{\Delta x} = \sum_{k=1}^{n} R_k \operatorname{tg}\alpha_k \qquad \text{(II.153)}$$

şi care - pentru cazul $\sum_{k=1}^{n} R_k \operatorname{tg}\alpha_k = 0$ dat de relaţia (II.152) - indică la limită anularea derivatei, deci nu extremum pentru funcţia S_i.

<u>Cazul particular al liniei de influenţă de formă triunghiulară</u> (fig.II.83).

In acest caz, aşezînd convoiul cu o forţă F_j în dreptul ordonatei maxime a liniei de influenţă şi notînd cu R_s şi R_d cele două rezultante ale forţelor din stînga şi din dreapta forţei F_j, pentru ca S_i să fie maxim este necesar ca:

a) La o deplasare a convoiului spre dreapta să fie satisfăcută relaţia (II.151.a), adică:

$$R_s \operatorname{tg}\alpha_1 - (R_d + F_j) \operatorname{tg}\alpha_2 < 0 \qquad \text{(II.154)}$$

Din fig.II.83 se vede că:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{h}{a_i} \; ; \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{h}{b_i}$$

care, înlocuite în (II.154) conduc la:

$$\frac{R_s}{a_i} - \frac{R_d + F_j}{b_i} < 0$$

sau:

$$\frac{R_s}{a_i} < \frac{R_d + F_j}{b_i} \qquad \text{(II.155.a)}$$

ceea ce se mai poate scrie:

$$p_a < p_b \qquad \text{(II.155.b)}$$

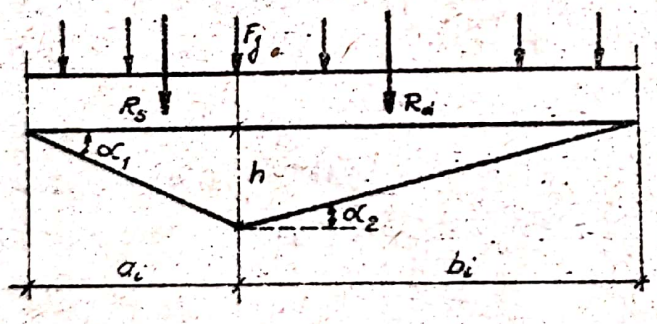


Fig. II.83

b) La o deplasare a convoiului spre stînga să fie satisfăcută relaţia (II.151.b), ceea ce conduce - procedînd în mod asemănător ca în cazul precedent - la:

$$\frac{R_s + F_j}{a_i} > \frac{R_d}{b_i} \qquad \text{(II.156.a)}$$

ceea ce se mai poate scrie:

$$p_a > p_b \qquad \text{(II.156.b)}$$

Rezultă astfel următorul procedeu practic de determinare a poziţiei convoiului de sarcini mobile pentru care se produce efortul maxim S_i a cărui linie de influenţă are o formă triunghiulară:

- Se aşează convoiul pe structură în aşa fel încît una din forţele mari ale convoiului (F_j) să se găsească în secţiunea din dreptul ordonatei maxime a liniei de influenţă.

- Se verifică relaţiile (II.155.b) şi (II.156.b) şi dacă rezultă sensuri contrare ale acestor inegalităţi – ceea ce ar indica necesitatea deplasării concomitente a convoiului atît la stînga cît şi la dreapta – poziţia cu F_j în dreptul ordonatei maxime este poziţia de efort maxim. Dacă inegalităţile au acelaşi sens, convoiul se deplasează în direcţia indicată de "vîrfurile" inegalităţilor.

Plecînd de la aceste considerente generale, se vor analiza în continuare procedeele practice de determinare a eforturilor maxime produse de convoaiele de sarcini mobile la sistemele static determinate alcătuite din bare drepte, urmînd ca şi la celelalte tipuri de structuri tratate în alte capitole, să se prezinte de asemenea modul de calcul la acţiunea sarcinilor mobile.

Se va acorda o atenţie deosebită calculului la sarcini mobile al grinzii simplu rezemate, sistemul static determinat cel mai des întîlnit atît în construcţii industriale (grinzi de pod rulant), cît şi în construcţiile de poduri.

II.3.6.3. Determinarea forţei tăietoare maxime la grinda simplu rezemată.

a. Soluţia analitică.

a.1. Sarcini transmise direct.

Se consideră grinda simplu rezemată din fig.II.84.a, la care este necesară determinarea forţei tăietoare maxime într-o secţiune oarecare i, sub acţiunea unui convoi de sarcini mobile care se deplasează pe grindă

Scriind forţa tăietoare din secţiunea i cu ajutorul coeficienţilor din linia de influenţă reprezentată în fig.II.84.b:

$$T_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}F_k = t_{i1}F_1 + t_{i2}F_2 + \ldots + t_{in}F_n \qquad \text{(II.157)}$$

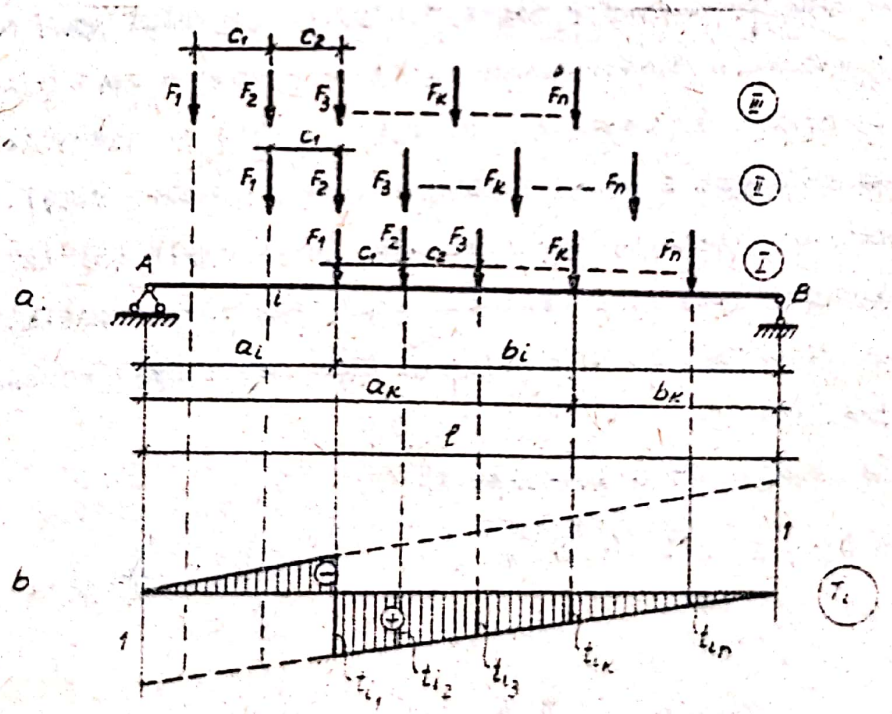


Fig. II.84

se vede că pentru a obține o valoare cît mai mare a forței tăietoare, trebuie ca (pentru prima încercare):

- să se încarce numai porțiunea de grindă corespunzătoare zonei pozitive a liniei de influență (respectiv numai zona negativă, în ipoteza că secțiunea i s-ar găsi în jumătatea din dreapta a grinzii,cînd convoiul de sarcini mobile ar trebui deci considerat înaintînd din A spre B);

- forțele mari să calce în dreptul ordonatelor mari și una din forțe (în acest caz prima) să se afle chiar în secțiune - infinit vecin în dreapta - pentru a se înmulți în relația (II.157) cu ordonata maximă t_{il} a liniei de influență.

In această primă poziție (I) a convoiului, expresia forței tăietoare T_i este:

$$T_i = V_A = \frac{\sum_{K=1}^{n} F_k\, b_k}{\ell} \qquad \text{(II.158)}$$

A doua încercare o facem deplasînd convoiul spre stînga cu c_1 - distanța dintre prima forță și a doua - deci pînă cînd forța F_2 ajunge în secțiune, această poziție a convoiului (II) fiind de asemenea o poziție posibilă de a produce forță tăietoare maximă. Aceasta, deoarece deși în expresia (II.157) F_1 se înmulțește acum cu o ordonată negativă, toate celelalte forțe se înmulțesc cu ordonate mai mari decît cele corespunzătoare poziției I.

In poziția II a convoiului:

$$T_i' = V_A' - F_1 = \frac{\sum_{K=1}^{n} F_k(b_k+c_1)}{\ell} - F_1 = \frac{\sum_{K=1}^{n} F_k b_k}{\ell} + \frac{c_1}{\ell}\sum_{K=1}^{n} F_k - F_1$$

sau:

$$T_i' = T_i + \frac{c_1}{\ell}\sum_{K=1}^{n} F_k - F_1 \qquad \text{(II.159)}$$

Pentru ca T_i' să fie mai mare decît T_1, este necesar ca:

$$\frac{c_1}{\ell}\sum_{k=1}^{n} F_k - F_1 > 0 \quad \text{sau:} \quad \frac{c_1}{\ell}\sum_{k=1}^{n} F_k > F_1$$

ceea ce se mai poate scrie:

$$\frac{F_1}{c_1} < \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{\ell} \qquad \text{(II.160)}$$

Rezultă deci că atunci cînd este satisfăcută relaţia (II.160), convoiul trebuie deplasat din poziţia cu F_1 în secţiune în poziţia cu F_2 în secţiune, forţe tăietoare corespunzătoare celei de a doua poziţii fiind mai mare.

Deplasînd în continuare convoiul spre stînga cu c_2 pînă cînd forţa F_3 ajunge în secţiunea (poziţia III), forţa tăietoare corespunzătoare are expresia:

$$T_i'' = V_A'' - F_1 - F_2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k(b_k+c_1+c_2)}{\ell} - F_1 - F_2$$

sau:

$$T_i'' = \left[\frac{\sum_{k=1}^{n} F_k(b_k+c_1)}{\ell} - F_1\right] + \frac{c_2}{\ell}\sum_{k=1}^{n} F_k - F_2$$

deci:

$$T_i'' = T_i' + \frac{c_2}{\ell}\sum_{k=1}^{n} F_k - F_2 \qquad \text{(II.161)}$$

Pentru ca T_i'' să fie mai mare decît T_i' este necesar ca:

$$\frac{c_2}{\ell}\sum_{k=1}^{n} F_k - F_2 > 0 \text{ sau:} \quad \frac{c_2}{\ell}\sum_{k=1}^{n} F_k > F_2$$

ceea ce se mai poate scrie:

$$\frac{F_2}{c_2} < \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{\ell} \qquad \text{(II.162)}$$

relaţie are indică de asemenea necesitatea mutării convoiului de forţe spre stînga, adică din poziţia cu F_2 în secţiune, în poziţia cu F_3 în secţiune.

Incercările continuă pînă cînd se va ajunge la o inegalitate de forma:

$$\frac{F_j}{c_j} > \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{\ell} \qquad \text{(II.163)}$$

care arată că poziţia convoiului cu F_{j+1} în secţiune nu conduce la o forţă tăietoare mai mare decît poziţia cu F_j în secţiune, aceasta din urmă fiind deci poziţia care corespunde forţei tăietoare maxime.

Se poate deci conchide că încercările se fac analizînd inegalităţi de rapoarte de tipul (II.160), (II.162) etc., pînă cînd se ajunge la inversarea sensului inegalităţilor. Forţa F_j care inversează sensul inegalităţilor, este cea care găsindu-se în secţiune ne dă poziţia convoiului pentru care se obţine forţa tăietoare maximă.

Sînt de reţinut următoarele observaţii:

1. In calculele făcute pentru deducerea criteriilor de determinare a forţei tăietoare maxime, s-a presupus termenul $\sum_{k=1}^{n} F_k$ constant, deci s-a considerat, ipoteza că în timpul deplasării convoiului, un ies şi un intră forţe pe grindă; această restricţie este eliminată în procedeul grafic, prezentat mai departe.

2. In general, numai cînd primele forţe din convoi au valori mici în raport cu celelalte, mai este necesară deplasarea convoiului din poziţia cu prima forţă în secţiune pentru obţinerea forţei tăietoare maxime; de obicei această primă poziţie este cea mai defăforabilă. Oricum numărul de încercări

este în general mic.

a.2. Sarcini transmise indirect.

In acest caz - aşa cum s-a mai arătat - este vorba de determinarea forţei tăiatoare maxime nu dintr-o secţiune,ci dintr-un panou. Se vede de altfel că linia de influenţă din fig.II.85.b este aceeaşi pentru forţa tăietoare din toate secţiunile din panoul II al grinzii principale reprezentată în fig.II.85.a.

Linia de influenţă din fig.II.85.b indică faptul că pentru a obţine forţă tăietoare în panoul II cît mai mare, trebuie să încărcăm numai porţiunea din grindă corespunzătoare zonei pozitive a liniei de influenţă şi că o forţă trebuie să se afle obligator în dreptul antretoazei 3, unde se găseşte ordonata maximă a liniei de influenţă.

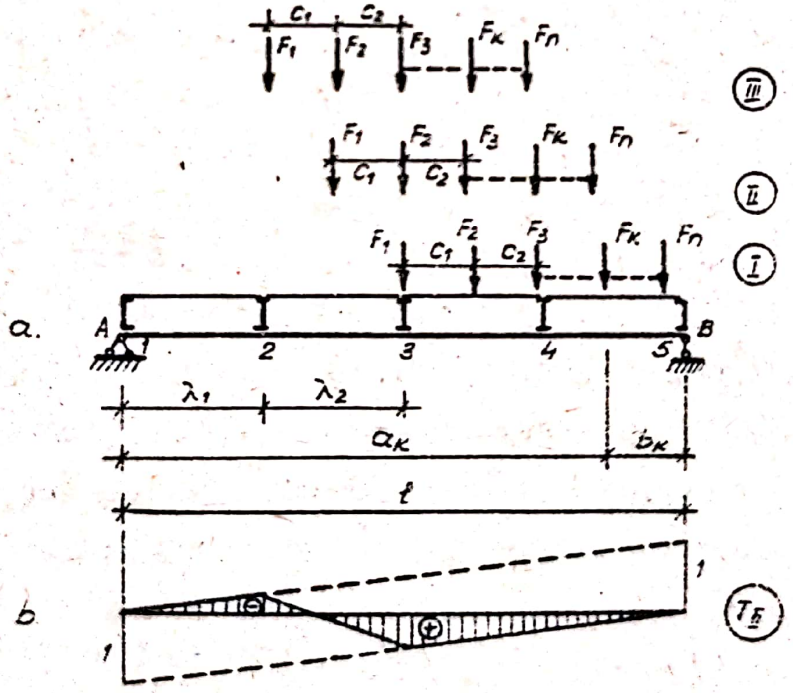


Fig II 85

- Pentru poziţia I (F_1 în dreptul antretoasei 3):

$$T_{II} = V_A = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k b_k}{\ell} \qquad (II.164)$$

- Pentru poziţia II (F_2 în dreptul antretoauei 3, după deplasarea spre stînga a convoiului cu c_1), notînd cu v'_2 componenta din dreptul antretoazei 2 a forţei F_1 care se găseşte pe longeronul 2-3.

$$T'_{II} = V'_A - v'_2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k(b_k+c_1)}{\ell} - \frac{F_1 c_1}{\lambda_2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k b_k}{\ell} + \frac{c_1}{\ell}\sum_{k=1}^{n} F_k - \frac{c_1}{\lambda_2} F_1$$

sau:

$$T'_{II} = T_{II} + c_1\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{\ell} - \frac{F_1}{\lambda}\right] \qquad (II.165)$$

Pentru ca T'_{II} să fie mai mare decît T_{II}, trebuie ca:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{\ell} - \frac{F_1}{\lambda_2} > 0$$

sau:

$$\frac{F_1}{\lambda_2} < \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{\ell} \qquad (II.166)$$

Deci, atunci cînd este satisfăcută relaţia (II.166), convoiul trebuie mutat din poziţia cu F_1 pe antretoaza 3 în poziţia cu F_2 pe antretoaza 3, aceasta din urmă condneînd la o forţă tăietoare mai mare în panoul II al grinzii principale.

- Pentru poziţia III (F_3 în dreptul antretoazei 3):

$$T''_{II} = V''_A - v''_2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k(b_k+c_1+c_2)}{\ell} - \frac{F_1(c_1+c_2)}{\lambda_2}$$

sau: (grupînd altfel termenii):

$$T''_{II} = \left[\frac{\sum_{k=1}^{n} F_k b_k}{\ell} + c_1 \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{\ell} - \frac{F_1}{\lambda_2} \right) \right] + c_2 \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{\ell} - \frac{F_1+F_2}{\lambda_2} \right)$$

deci:

$$T''_{II} = T'_{II} + c_2 \left[\frac{F_k}{\ell} - \frac{F_1+F_2}{\lambda_2} \right] \qquad (II.167)$$

Condiţia $T''_{II} > T'_{II}$, ne conduce la:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{\ell} - \frac{F_1+F_2}{\lambda_2} > 0$$

sau:

$$\frac{F_1 + F_2}{\lambda_2} < \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{\ell} \qquad (II.168)$$

relaţie care indică necesitatea deplasării spre stînga a convoiului, din poziţia cu F_2 pe antretoaza 3 în poziţia cu F_3 pe antretoaza 3.

Încercările se opresc atunci cînd se ajunge la inversarea sensului inegalităţilor, deci cînd se obţine o relaţie de forma:

$$\frac{F_1 + F_2 + \ldots + F_j}{\lambda_2} > \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{\ell} \qquad (II.169)$$

poziţia cu F_j pe antretoaza 3 fiind poziţia convoiului pentru care se produce forţă tăietoare maximă în panoul II al grinzii principale.

Aşa după cum s-a mai subliniat şi în cazul transmiterii directe a sarcinilor, criteriile de determinare a forţei tăietoare maxime au fost deduse în ipoteza că numărul de forţe de pe grindă rămîne nemodificat la deplasările convoiului spre stînga sau spre dreapta. Această restricţie nu mai este necesară în cadrul procedeelor grafice, ceea ce face ca acestea să fie mai generale, aşa cum se va vedea în continuare.

b. Soluţia grafică.

b.1. Sarcini transmise direct.

Aşa cum s-a văzut din procedeul analitic, încercările pentru determinarea forţei tăietoare maxime se fac aşezînd convoiul cu cîte o forţă în secţiune.

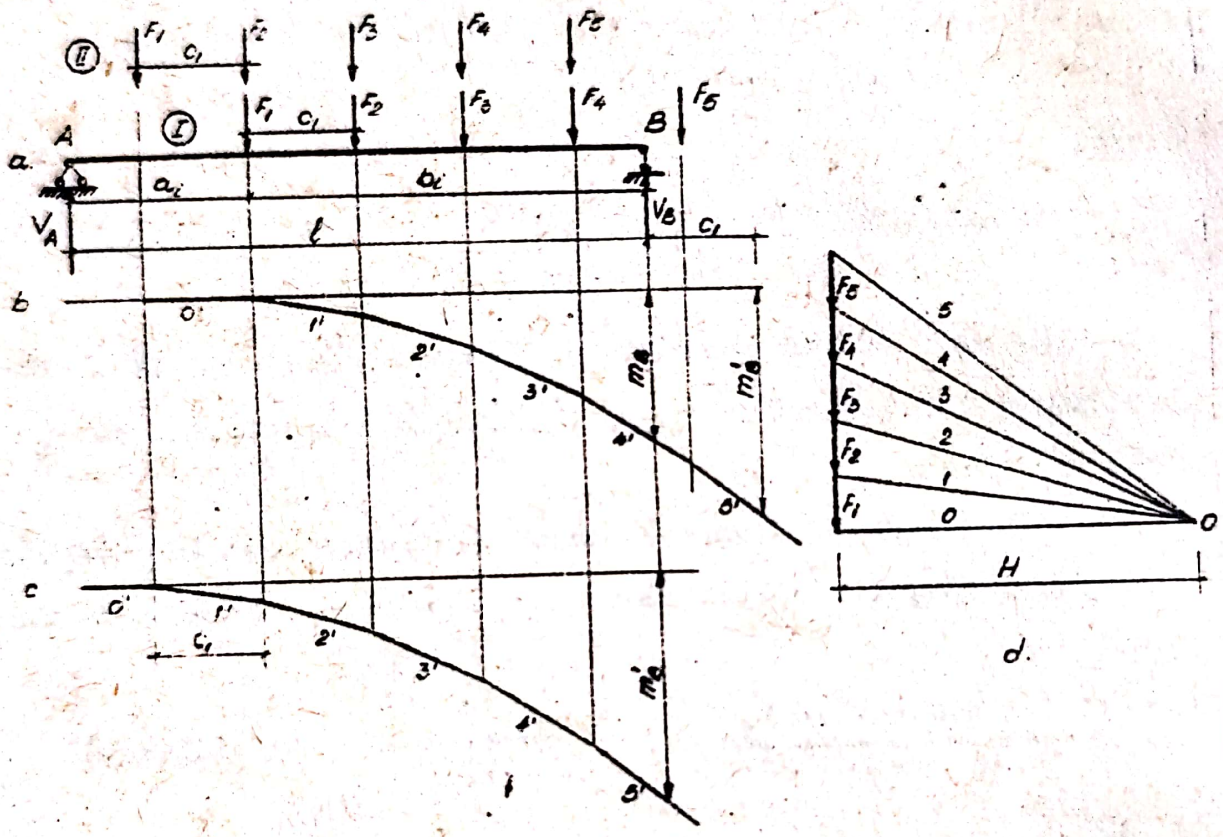


Fig. II. 86.

Considerînd de exemplu convoiul de sarcini mobile în poziţia 1 (fig.II.86.a) forţa tăietoare din secţiunea i are expresia:

$$T_i = V_A = \frac{\sum M_{(B)}}{\ell} \qquad \text{(II.170.a)}$$

Conform relaţiei (II.66), se poate scrie:

$$T_i = \frac{m_B \cdot H}{\ell} \qquad \text{(II.170.b)}$$

m_B fiind segmentul măsurat în dreptul reazemului B între prima și ultima latură corespunzătoare forțelor $F_1 \ldots F_4$ de pe grindă în poligonul funicular din fig.II.86.b, iar H distanța polară a poligonului de forțe din fig.II.86.d.

Deplasînd convoiul spre stînga cu e_1, pînă cînd forța F_2 ajunge în secțiune (poziția II), expresia forței tăietoare devine:

$$T_1' = V_A' - F_1 = \frac{\sum M'_{(B)}}{\ell} - F_1 = \frac{m_B \cdot H}{\ell} - F_1 \quad (II.171)$$

Pentru determinarea segmentului m_B', este necesară construirea unui alt poligon funicular - fig.II.86.c; segmentul respectiv măsurîndu-se între latura 0' și 5', în dreptul reazemului B. Se observă însă că acest poligon, este de fapt poligonul funicular precedent, deplasat cu distanța e_1 spre stînga și completat eventual cu laturile corespunzătoare forțelor care mai intră pe grindă. Segmentul m_B' se poate măsura deci în primul poligon funicular, la distanța e_1 spre dreapta față de reazemul B.

In vederea folosirii unei singure construcții grafice pentru toate încercările de determinare a forței tăietoare maximă dintr-o anumită secțiune, se procedează astfel: (fig.II.87):

- Se construiește un poligon al forțelor cu distanța polară $H = \ell$ (fig.II.87.c), reacțiunea din reazemul A fiind astfel egală direct cu segmentele m din poligonul funicular.

- Poligonul funicular se construiește pentru poziția inversată a convoiului de forțe și anume considerînd prima forță pe reazemul B (fig.II.87.b) Rezultă astfel poligonul funicular inversat din fig.II.87.c, cu vîrful pe reazemul B, segmentele m care reprezintă mărimea reacțiunii V_A măsurîndu-se

de data aceasta la distanţele b_i (poziţia I a convoiului), $b_i + o_1$ (poziţia II) etc. spre stînga faţă de reazemul B, deci totdeauna în dreptul primei forţe.

Segmentele dintre prima latură O' şi poligonul funicular, măsurate în dreptul primei forţe din convoiul în poziţie normală, reprezintă mărimea reacţiunii V_A, construcţia grafică numindu-se de aceea poligonul lui V_A.

Forţele tăietoare vor fi deci

I. F_1 în secţiunea i:

$$T_i = V_A = m_i$$

II. F_2 în secţiunea i:

$$T_i' = V_A' - F_1 = m_i' - F_1$$

Segmentul m_i' se măsoară între latura O' şi poligonul lui V_A şi din el se scade tot grafic forţa F_1.

III F_3 în secţiunea i:

$$T_i'' = V_A'' - F_1 - F_2 = m_i'' - F_1 - F_2$$

IV F_4 în secţiunea i:

In acest caz forţa F_1 părăseşte grinda, ceea ce ar necesita construirea unui alt poligon funicular, cu convoiul aşezat cu forţa F_2 pe reazemul B. Acest nou poligon este însă de fapt poligonul lui V_A deja construit, deplasat cu o_1 spre dreapta (polul O_1 adus în O) şi cu prima latură 1' în loc de O'. Prin această deplasare, toate ordonatele m_i s-ar deplasa cu o_1 spre dreapta şi s-ar măsura în dreptul forţei F_2, care este acuma prima forţă de pe grindă. Practic, se foloseşte acelaşi poligon al lui V_A, cu polul O_1 şi prima latură i, dar forţele tăietoare se măsoară cu o_1 mai spre stînga, adică tot în drep-

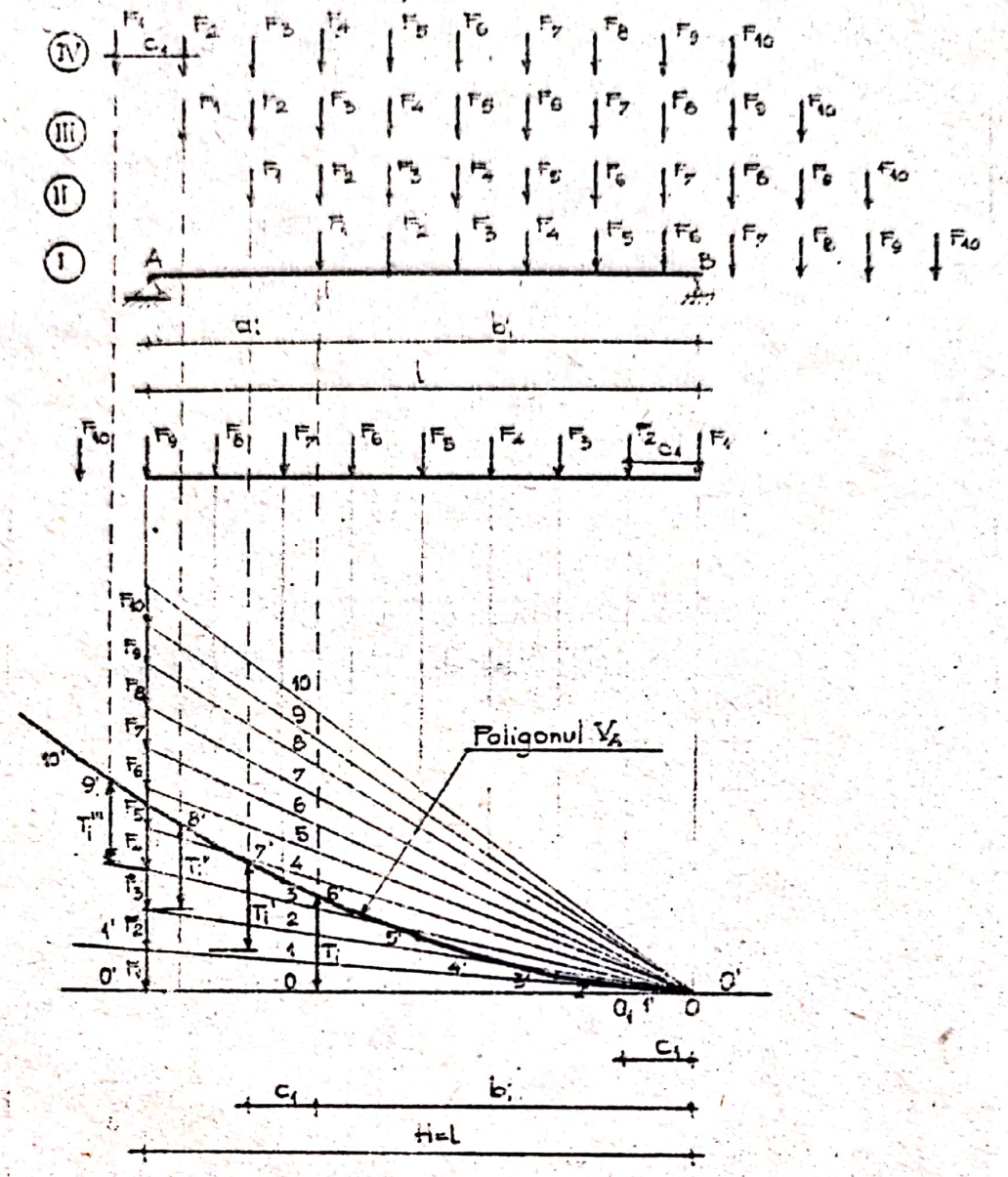


Fig. II-87

tul forței F_1 (această ordonată ar fi venit în dreptul lui F_2 dacă deplasam poligonul cu c_1 spre dreapta).

În această poziție a convoiului:

$$T_i''' = V_A''' - F_2 - F_3 = m_i''' - F_2 - F_3$$

forțele F_2 și F_3 scăzîndu-se grafic printr-o paralelă dusă la latura 1'.

Pe baza acestui raţionament, rezultă că forţele tăietoare se vor măsura totdeauna în dreptul primei forţe a convoiului, prin ieşirea unor forţe de pe grindă modificîndu-se doar prima latură a poligonului funicular, deci linia de referinţă pentru segmentele m_i.

Prin compararea segmentelor T_i, T_i', T_i'' etc., se determină forţa tăietoare maximă.

In cazul cînd convoiul este reprezentat de o sarcină uniform distribuită mobilă (fig.II.88), legea de variaţie a

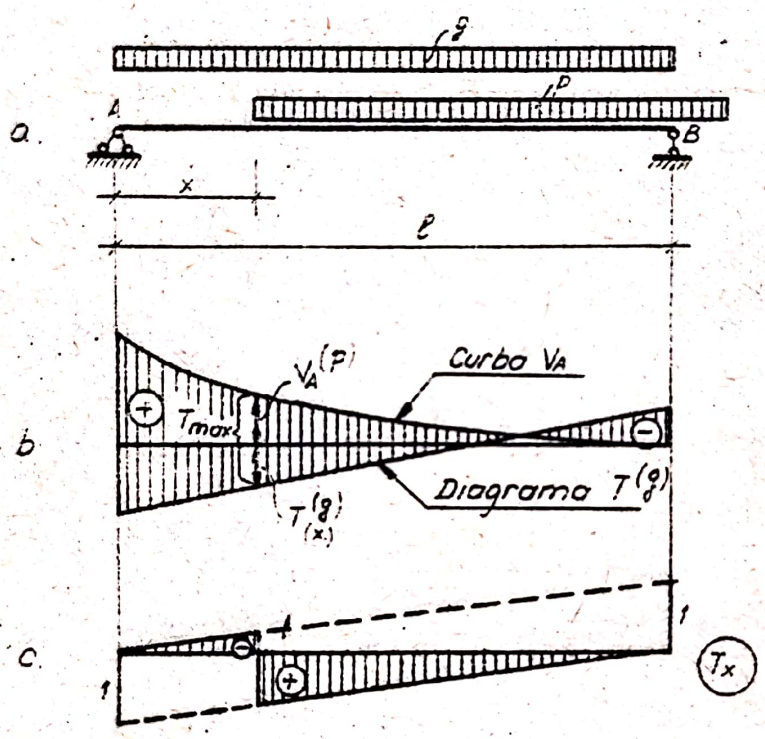


Fig. II. 88.

reacţiunii V_A este parabolică:

$$V_A = \frac{1}{\ell} p(\ell - x)\frac{\ell - x}{2} = \frac{p(\ell - x)^2}{2} \qquad \text{(II.172)}$$

Reprezentînd grafic această parabolă, se obţine curba V_A. Dacă se consideră şi efectul sarcinii permanente de inten-

sitate g, a cărei diagramă de forţă tăietoare este suprapusă cu curba V_A în fig.II.88.b şi se încarcă numai zona pozitivă a liniei de influenţă T_x cu sarcina utilă mobilă de intensitate p, forţa tăietoare maximă în secţiunea de la distanţa x se poate scrie prin suprapunere de efecte

$$T_{max} = V_A^{(p)} + T_{(x)}^{(g)} \qquad (II.173)$$

b.2. Sarcini transmise indirect.

Pentru a determina forţa tăietoare maximă din panoul II, se consideră diferite poziţii ale convoiului, cu cîte o forţă pe antretoaza 3.

I. F_1 pe antretoaka 3:

$$T_{II} = V_A$$

II. Forţa F_2 pe antretoaza 3:

$$T'_{II} = V'_B - v'_2$$

III. Forţa F_3 pe antretoaza 3:

$$T''_{II} = V''_A - v''_2$$ şi aşa mai departe.

Se vede deci că forţa tăietoare este dată de diferenţa dintre reacţiunea V_A şi componente din antretoase 2 a forţelor de pe longeronul 2-3. Se construieşte deci poligonul reacţiunii V_A, aşa cum s-a arătat la cazul transmiterii directe a sarcinilor şi se mai construieşte un poligon de variaţie a componentei v_2, considerînd longeronul 2-3 ca o grindă simplu rezemată, convoiul inversat - deci cu sarcina F_1 pe antretoaza 3 (fig.II.89.a) - şi distanţa polară h = λ (λ = deschiderea longeronului 2-3), aşa cum se vede în fig.II.89.

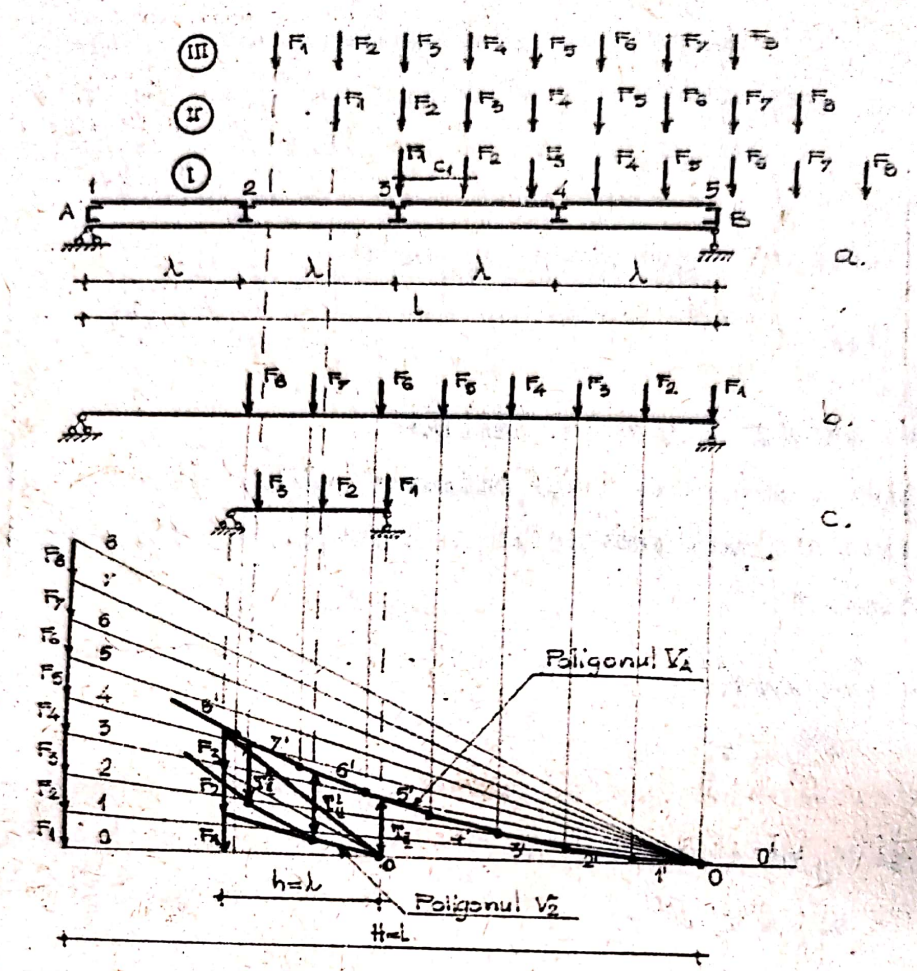


Fig. II 89

Mărimile forţelor tăietoare se vor măsura astfel direct între cele două poligoane (ca diferenţe între V_A şi V_2), totdeauna în dreptul primei forţe din convoi, chiar dacă anumite forţe părăsesc longeronul 2-3 sau grinda.

II.3.6.4. <u>Determinarea momentului încovoietor maxim la grinda simplu rezemată</u>.

a. <u>Soluţia analitică</u>.

Momentul încovoietor într-o secţiune oarecare i, scris cu ajutorul coeficienţilor de influenţă, are expresia:

$$M_i = m_{i1}F_1 + m_{i2}F_2 + \dots + m_{in}F_n = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}F_k \qquad (II.174)$$

ceea ce ne arată că pentru a obține un moment încovoietor cît mai mare, este necesar:

- să existe cît mai multe forțe din convoi pe grindă;
- forțele mari să se găsească în dreptul ordonatelor mari din linia de influență;
- o forță de valoare mare din convoi să se găsească în dreptul secțiunii i pentru a se înmulți cu ordonata maximă.

Considerînd de exemplu convoiul cu forța F_h în secțiunea (poziția I din fig.II.90) și scriind momentul încovoietor din secțiunea i cu forțele din stînga secțiunii, se obține:

$$M_i = V_A a_i - \sum_{k=1}^{h} F_k(a_i - a_k) = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k b_k}{\ell} a_i - \sum_{k=1}^{h} F_k\ (a_i - a_k)$$

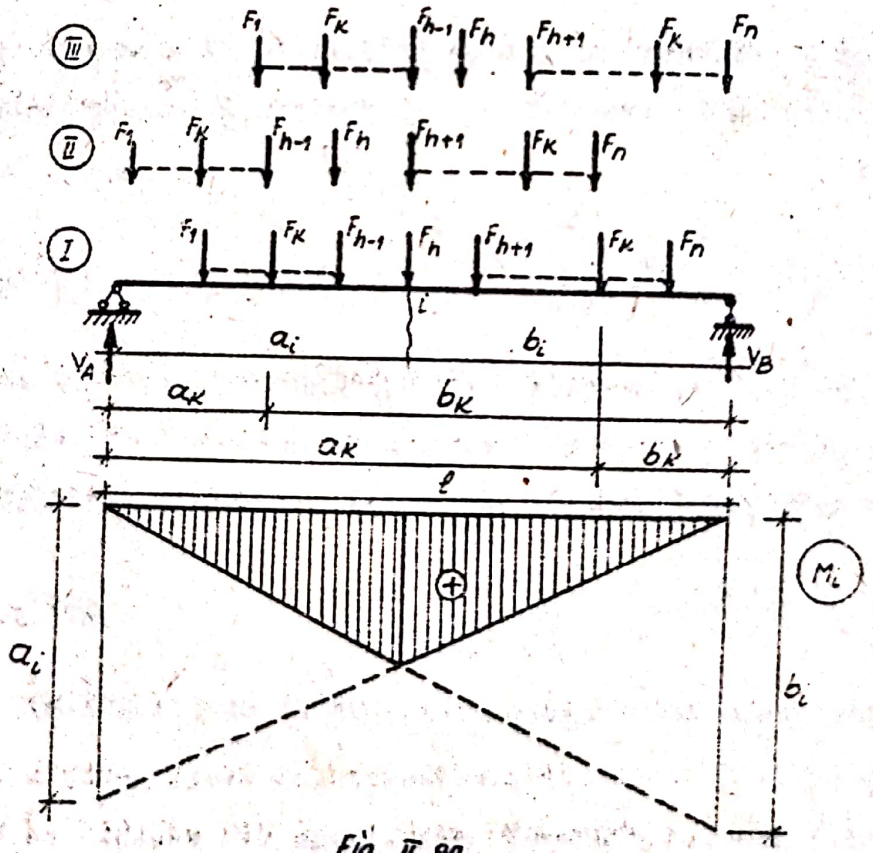


Fig II 90

Dacă deplasăm convoiul spre stînga cu c_1, pînă cînd forţa F_{h+1} ajunge în secţiune (poziţia II din fig.II.90) şi scriem momentul M_i tot cu forţele din stînga secţiunii, obţinem:

$$M_i' = V_A' a_i - \sum_{k=1}^{h} F_k(a_i - a_k + c_1) = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k(b_k + c_1)}{\ell} a_i - \sum_{k=1}^{h} F_k(a_i - a_k + c_1)$$

sau, grupînd altfel termenii:

$$M_i' = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k b_k}{\ell} a_i - \sum_{k=1}^{h} F_k(a_i - a_k) + c_1 \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{\ell} a_i - c_1 \sum_{k=1}^{h} F_k$$

ceea ce se mai poate scrie:

$$M_i' = M_i + c_1 a_i \left[\frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{\ell} - \frac{\sum_{k=1}^{h} F_k}{a_i} \right] \qquad (II.175)$$

Pentru ca momentul M_i' produs în poziţia II a convoiului să fie mai mare decît momentul M_i din poziţia I a convoiului, trebuie ca:

$$\frac{\sum_{k=1}^{h} F_k}{a_i} < \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{\ell} \qquad (II.176.a)$$

Scriind aceleaşi momente încovoietoare M_i şi M_i' cu sarcinile din dreapta secţiunii, rezultă că momentul M_i' este mai mare decît momentul M_i atunci cînd este îndeplinită condiţia:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{\ell} < \frac{\sum_{k=h}^{n} F_k}{b_i} \qquad (II.176.b)$$

Reunind cele două condiţii (II.176.a) şi (II.176.b), rezultă că poziţia II este mai dezavantajoasă decît poziţia I, deci convoiul trebuie deplasat spre stînga din poziţia cu F_h în secţiune în poziţia cu F_{h+1} în secţiune, atunci cînd sînt satisfăcute inegalităţile:

$$\frac{\sum_{k=1}^{h} F_k}{a_i} < \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{\ell} < \frac{\sum_{k=h}^{n} F_k}{b_i} \qquad \text{(II.177)}$$

Folosind pozițiile I și III din fig.II.90 și scriind de asemenea momentele încovoietoare atît cu forțele din stînga cît și cu cele din dreapta secțiunii, se obțin relațiile care indică necesitatea deplasării spre dreapta a convoiului de sarcini mobile și anume:

$$\frac{\sum_{k=1}^{h} F_k}{a_i} > \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{\ell} > \frac{\sum_{k=h}^{n} F_k}{b_i} \qquad \text{(II.178)}$$

Poziția de moment încovoietor maxim corespunde următoarului raport de inegalități:

$$\frac{\sum_{k=1}^{h} F_k}{a_i} > \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{\ell} < \frac{\sum_{k=h}^{n} F_k}{b_i} \qquad \text{(II.179)}$$

Deducerea relațiilor care apar în (II.178) și (II.179) este simplă, de aceea nu s-a prezentat detaliat.

Obișnuit, se fac notațiile:

$$\frac{\sum_{k=1}^{h} F_k}{a_i} = p_a \; ; \quad \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{\ell} = p \; ; \quad \frac{\sum_{k=h}^{n} F_k}{b_i} = p_b \qquad \text{(II.180)}$$

și pot exista deci următoarele situații:

a) $p_a < p < p_b$ - convoiul trebuie deplasat spre stînga;

b) $p_a > p > p_b$ - convoiul trebuie deplasat spre dreapta;

c) $p_a > p < p_b$ - poziție de moment încovoietor maxim.

Regăsim astfel sub această formă condiția de producere a momentului maxim, analizată și pe baza criteriului general prezentat în par.II.3.6.2(cazul particular al liniei de

influenţă triunghiulare).

Observaţii:

1. Se poate ajunge şi la situaţii de incertitudine, de forma:

$$p_a > p = p_b$$

cînd trebuie determinată valoarea momentului şi în poziţia convoiului căreia îi corespunde această relaţie şi în poziţia deplasat spre stînga (în acest caz), momentul maxim fiind, evident, cel mai mare dintre aceste două valori.

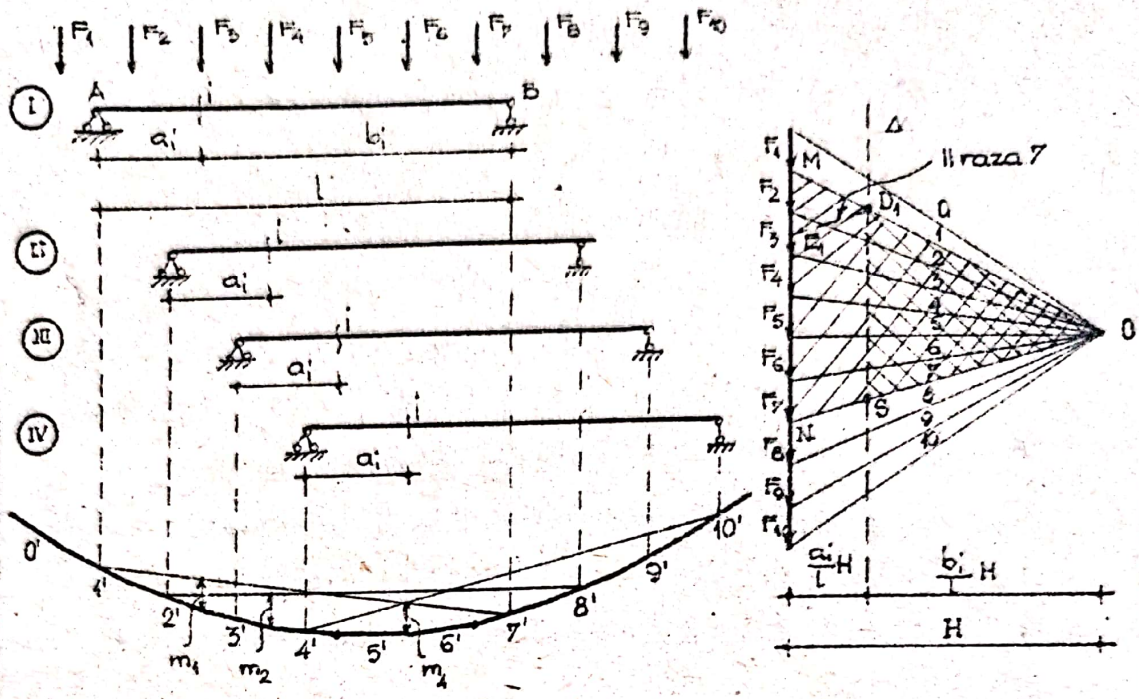
2. La deducerea criteriilor de determinare a momentului maxim, s-a considerat că numărul de forţe de pe grindă nu se modifică prin deplasarea convoiului la stînga sau la dreapta, restricţie eliminată prin procedeul grafic.

b. Soluţia grafică.

Ştiind din paragraful II.1.1.2 că momentul încovoietor se determină grafic ca produs între segmentul m_i (măsurat între linia de închidere şi poligonul funicular) şi distanţa polară H, se procedează în felul următor (fig.II.91):

- se construieşte un poligon al forţelor cu distanţa polară H şi poligonul funicular corespunzător pentru toate forţele din convoi, sau pentru un grup caracteristic de forţe (de obicei convoaiele de vehicule se consideră de lungime infinită);

- în loc să se deplaseze convoiul pentru a fi adus cu cîte o sarcină în dreptul secţiunii în care se determină momentul încovoietor maxim, se deplasează succesiv grinda cu secţiunea în dreptul cîte unei forţe şi în fiecare poziţie se găseşte linia de închidere a poligonului funicular unind proiecţiile reazemelor pe laturile poligonului. Segmentele m_i



a. Fig. II-91

corespunzătoare se măsoară în dreptul secţiunii, între linia de închidere şi poligon;

- comparînd segmentele m_1 se determină care este cel mai mare şi cu aceasta se calculează momentul maxim:

$$M_1^{max} = m_1^{max} \cdot H \qquad (II.181)$$

Se va ţine cont de scările lui m_1 şi H aşa cum s-a indicat în paragraful II.1.1.2.

Se mai indică - fără demonstraţie - şi următorul criteriu suplimentar de determinare a poziţiei de moment încovoietor maxim (fig.II.91.b):

- se duce în poligonul de forţe a dreptei verticală Δ, care împarte distanţa polară H în acelaşi raport în care secţiunea i împarte deschiderea grinzii;

- din punctul D_1 în care dreapta Δ intersectează prima rază polară corespunzătoare forţelor de pe grindă într-o

anumită poziţie a convoiului, se duce o paralelă la ultima rază polară corespunzătoare aceloraşi forţe; dacă această paralelă intersectează forţa care se găseşte în secţiune, poziţia respectivă a convoiului est poziţie de moment maxim.

Pentru poziţia I de exemplu din fig.II.91.a, forţele de pe grindă sînt $F_2 \ldots F_7$, deci prima rază polară este 1 iar ultima este 7; ducînd din D_1 o paralelă la raza polară 7, aceasta intersectează forţa F_3 aflată în secţiune, deci poziţia I este o poziţie de moment maxim.

Criteriul poate fi însă satisfăcut pentru mai multe poziţii ale convoiului şi în această situaţie se determină segmentele m_i corespunzătoare, momentul încovoietor maxim absolut fiind dat de m_i^{max}.

Justificarea criteriului este simplă [11], îndeplinirea condiţiei de moment încovoietor maxim reprezentînd de fapt satisfacerea condiţiei analitice dată de relaţia (II.179).

c. Cazul sarcinilor transmise indirect.

Intrucît în acest caz secţiunile cele mai solicitate - deci cele în care este necesar să se determine momentele încovoietoare maxime - sînt în dreptul antretoazelor şi deoarece în aceste secţiuni momentele încovoietoare în grinda principală sînt aceleaşi fie că sarcinile acţionează direct fie că acţionează indirect, problema se rezolvă la fel ca în cazul transmiterii directe a sarcinilor.

II.3.6.5. Determinarea momentului încovoietor maximum maximorum la grinda simplu rezemată.

La deplasarea unui convoi de sarcini pe grinda simplu rezemată, fiecărei secţiuni a grinzii îi corespunde un moment maxim; cel mai mare dintre aceste momente maxime poartă denu-

mirea de moment maximum maximorum.

La determinarea momentului maximum maximorum, apar două necunoscute: secţiunea în care se produce acest moment şi poziţia de moment maxim a convoiului pentru secţiunea respectivă.

Considerînd (fig.II.92) că pe grindă acţionează un convoi de sarcini a căror rezultantă este R şi ştiind că momentul maximum maximorum va coincide cu un vîrf al diagramei de momente, deci se va produce în dreptul unei forţe, se presupune că această forţă este una din forţele din apropierea rezultantei, notată în fig.II.92 cu F_h.

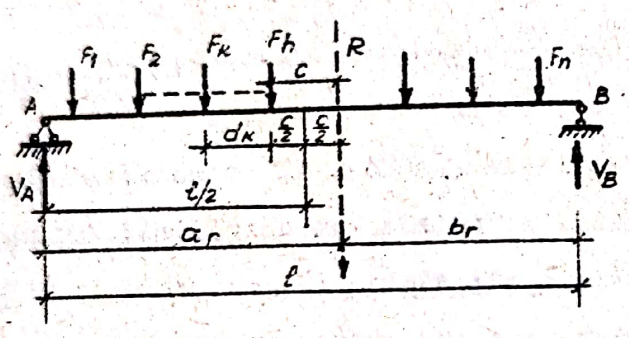


Fig. II 92

Aceasta, deoarece dacă în locul convoiului ar acţiona rezultanta R, momentul maximum maximorum s-ar produce chiar în dreptul rezultantei.

Distanţele rezultantei faţă de cele două reazeme se notează cu a_r şi b_r; mărimea lor variază odată cu deplasarea convoiului, dar suma lor este mereu egală cu deschiderea grinzii.

Expresia momentului încovoietor în dreptul forţei F_h este:

$$M = V_A (a_r - c) - \sum_{k=1}^{h-1} F_k d_k$$

Reacţiunea V_A se poate scrie:

$$V_A = \frac{R b_r}{\ell} = \frac{R (\ell - a_r)}{\ell}$$

deci:

$$M = \frac{R}{\ell}(\ell - a_r)(a_r - c) - \sum_{k=1}^{h-1} F_k \cdot d_k \qquad (II.182)$$

Punînd condiţia că acest moment în care a_r este variabilă să fie maxim:

$$\frac{\partial M}{\partial a_r} = \frac{R}{\ell}\left(-2a_r + c + \ell\right) = 0$$

ceea ce revine la:

$$-2a_r + c + \ell = 0$$

se obţine:

$$a_r = \frac{\ell + c}{2} = \frac{\ell}{2} + \frac{c}{2} \qquad \text{(II.183.a)}$$

Relaţia (II.183.a) este satisfăcută atunci cînd convoiul ocupă o astfel de poziţie pe grindă, încît mijlocul grinzii să împartă în două segmente egale distanţa c dintre rezultanta R şi forţa F_h în dreptul căreia se produce momentul maximum maximum (fig.II.92).

Inlocuind pe a_r dat de relaţia (II.183.a) în expresia (II.182), se obţine relaţia de calcul a valorii momentului încovoietor maximum maximorum:

$$M_{max\ max} = \frac{R}{\ell}\left(\ell - \frac{\ell}{2} - \frac{c}{2}\right)\left(\frac{\ell}{2} + \frac{c}{2} - c\right) - \sum_{K=1}^{h-1} F_k d_k$$

sau:

$$M_{max\ max} = \frac{R(\ell - c)^2}{4\ell} - \sum_{K=1}^{h-1} F_k d_k \qquad \text{(II.184.a)}$$

Această ultimă relaţie ne dă două indicaţii în legătură cu poziţia de moment maximum maximorum:

- trebuie ca rezultanta să fie cît mai mare, deci pe grindă trebuie să intre cît mai multe forţe din convoi;

- distanţa c trebuie să fie cît mai mare, deci forţa F_h în dreptul căreia se produce momentul maximum maximorum este una din forţele din apropierea rezultantei. Relaţiile (II.183.a)

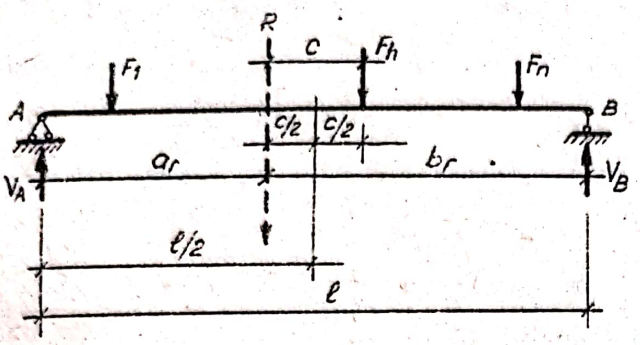


Fig. II.93

și (II.184.a) s-au dedus în ipoteza că forța F_h în dreptul căreia se produce momentul maximum maximorum se găsește în stînga rezultantei. Dacă această forță este în dreapta rezultantei (fig.II.93), relațiile devin:

$$a_r = \frac{\ell}{2} - \frac{c}{2} \qquad \text{(II.183.b)}$$

și respectiv:

$$M_{max\ max} = \frac{R(\ell + c)^2}{4\ell} - \sum_{k=1}^{h-1} F_k d_k \qquad \text{(II.184.b)}$$

Practic, pentru determinarea momentului încovoietor maximum maximorum se procedează astfel:

1. Știind că acest moment se produce de obicei într-o secțiune din apropierea mijlocului grinzii - care este zona cea mai solicitată-se determină poziția convoiului pentru care în secțiunea de la $\ell/2$ momentul încovoietor este maxim, problema rezolvîndu-se deci după procedeele din paragraful II.3.6.4.

Forța F_h care se găsește în secțiunea de la $\ell/2$ în poziția de moment încovoietor maxim, este forța în dreptul căreia este posibil să se producă și momentul încovoietor maximum maximorum.

2. Se deplasează convoiul spre stînga sau spre dreapta cu c/2 (c fiind distanța dintre forța F_h determinată în etapa precedentă și rezultantă), în așa fel încît să fie satisfăcută condiția (II.183.a) sau (II.183.b).

3. Se verifică dacă şi pentru această nouă poziţie a convoiului este satisfăcută condiţia (II.179) de moment încovoietor maxim.

4. Se verifică dacă în dreptul forţei F_h forţa tăietoare trece prin zero.

Momentul încovoietor maximum maximorum se calculează apoi cu relaţia (II.184.a) sau (II.184.b), sau obişnuit:

$$M_{max\ max} = V_A \left(\frac{\ell}{2} \mp \frac{c}{2} \right) - \sum_{k=1}^{h-1} F_k d_k \qquad (II.185)$$

unde:

$$V_A = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k b_k}{\ell} = \frac{R \cdot b_r}{\ell} \qquad (II.186)$$

II.3.6.6. Utilizarea sarcinilor echivalente pentru determinarea eforturilor maxime.

Pentru simplificarea calculului la sarcini mobile, se pot utiliza aşa numitele "sarcini echivalente", încărcări uniform distribuite ale căror intensităţi sînt deduse din condiţia ca efectul lor să fie acelaşi cu cel al convoaielor de sarcini concentrate.

Expresia unui efort în ipoteza acţiunii unui convoi de sarcini concentrate este:

$$S_i = s_{i1}F_1 + s_{i2}F_2 + \ldots + s_{in}F_n = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}F_k \qquad (II.144)$$

iar expresia aceluiaşi efort în ipoteză încărcării cu o sarcină uniformă distribuită cu intensitate q este:

$$S_i = q \cdot \Omega_{j-k} \qquad (II.145)$$

(Ω_{j-k} fiind aria suprafeţei liniei de influenţă de pe zona încărcată).

Egalînd cele două mărimi:

rezultă: $\sum_{k=1}^{n} s_{ik} F_k = q \cdot \Omega_{j-k}$

$$q = \frac{\sum_{k=1}^{n} s_{ik} F_k}{\Omega_{j-k}} \qquad \text{(II.187)}$$

relație cu care se determină sarcinile echivalente, ale căror valori sînt indicate în normativele de calcul (STAS 3221-63).

Mărimea intensității sarcinilor echivalente depinde de:

- tipul convoiului de sarcini mobile;
- lungimea L a zonei încărcate;
- forma liniei de influență (sarcinile echivalente sînt determinate pentru linii de influență triunghiulare cu ordonata maximă la capăt, la un sfert sau la jumătatea lungimii L a zonei încărcate).

Cunoscînd - cu ajutorul liniei de influență - zona care trebuie încărcată pentru a obține reacțiunea sau efortul maxim și alegînd sarcina echivalentă în funcție de criteriile enumerate anterior, mărimea respectivă se determină apoi cu relația (II.145).

Astfel, la grinda simplu rezemată:

a) <u>Reacțiunea maximă</u> - se determină încărcînd toată grinda cu sarcina echivalentă (fig.II.94.a) și:

$$V_{A(B)}^{max} = \frac{q \cdot \ell}{2}$$

b) <u>Forța tăietoare maximă într-o secțiune oarecare</u> se determină încărcînd numai zona pozitivă sau numai zona negativă a liniei de influență, (fig.II.94.b) și:

$$T_{i(+)}^{max} = q \cdot \frac{1}{2} b_i \frac{b_i}{\ell} = \frac{q \, b_i^2}{2\ell}$$

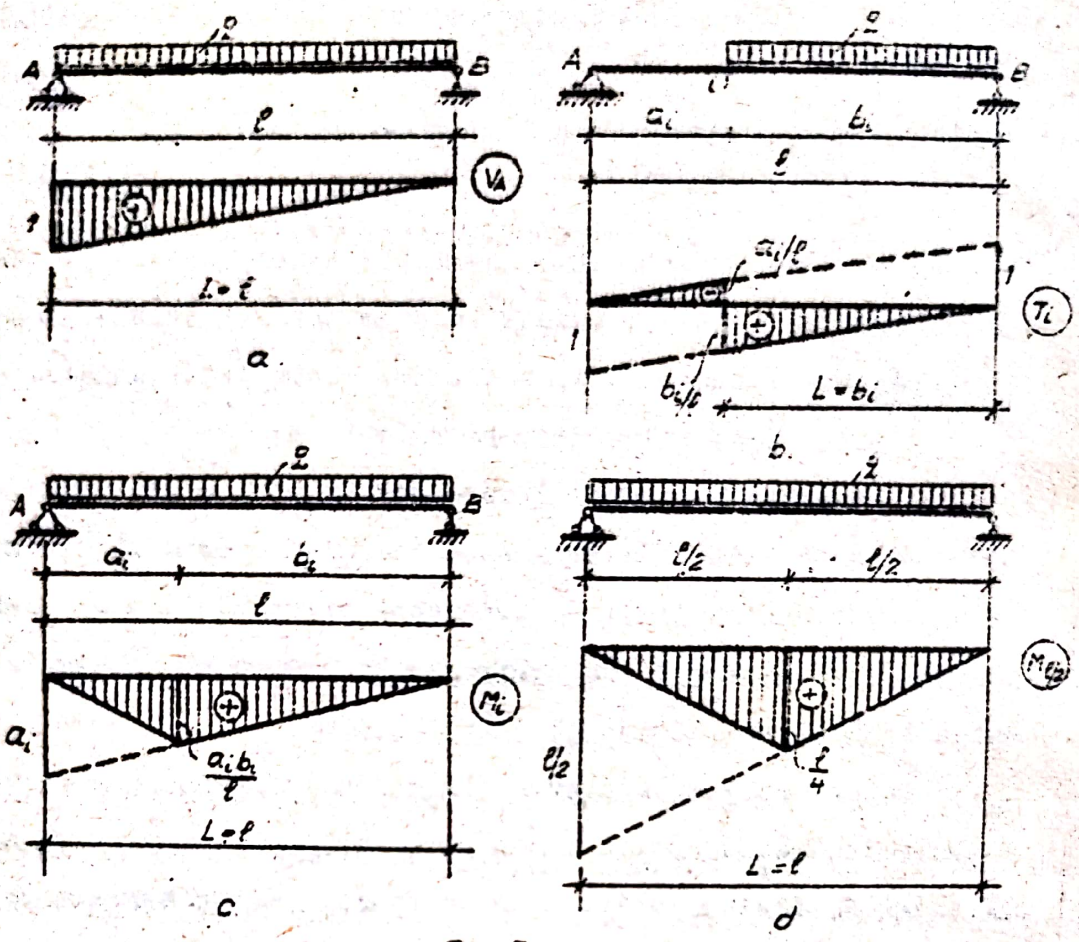


Fig. II.94

respectiv:

$$T_{i(-)}^{0\,max} = \frac{q \cdot a_i^2}{2\ell}$$

c) Momentul încovoietor maxim într-o secțiune oarecare se determină încărcînd toată grinda cu sarcina echivalentă (fig.II.94.c) și:

$$M_i^{max} = q \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a_i\ b_i}{\ell} \cdot \ell = \frac{q \cdot a_i\ b_i}{2}$$

d) Momentul încovoietor maximum maximorum va corespunde secțiunii de la mijlocul grinzii, deci (fig.II.94.d):

$$M_{max\ max} = q \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{4} \cdot \ell \cdot = \frac{q \cdot \ell^2}{8}$$

Sarcinile echivalente se pot utiliza şi pentru determinarea reacţiunilor sau eforturilor maxime la alte tipuri de structuri, ale căror linii de influenţă se pot asimila cu linii de influenţă ale eforturilor la grinda simplu rezemată (grinzi Gerber, cadre static determinate, grinzi cu zăbrele, arce static determinate etc.).

Pentru exemplificarea modului practic de determinare pe cale analitică a eforturilor maxime la grinda simplu rezemată, se consideră o grindă cu deschiderea de 32 m, pe care se deplasează un convoi de autocamioane tip A-10 (autocamioane de 10 tf). Mărimile forţelor din convoi şi distanţele dintre ele sînt indicate în fig.II.95, conform STAS 3221-72.

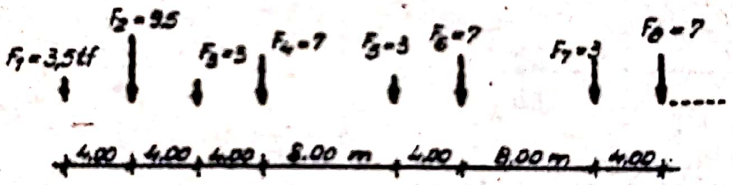


Fig. II. 95

a) <u>Determinarea forţei tăietoare maxime în secţiunea cu $a_1 = 8$ m</u>

Pentru determinarea poziţiei convoiului corespunzătoare forţei tăietoare maxime, se consideră următoarele poziţii caracteristice:

I. Convoiul cu P_1 în secţiune, cînd pe grindă intră forţele $P_1 \ldots P_6$:

$$\frac{F_1}{c_1} = \frac{3,5}{4} = 0,875$$

$$\frac{\sum_{K=1}^{6} F_K}{\ell} = \frac{33}{32} = 1,031$$

Rezultă deci:

$$\frac{F_1}{c_1} = 0,875 < \frac{\sum_{K=1}^{6} F_K}{\ell} = 1,031$$

ceea ce înseamnă că trebuie să considerăm convoiul deplasat cu c_1 spre stînga.

II. Convoiul cu F_2 în secţiune:

$$\frac{F_2}{c_2} = \frac{9,5}{4} = 2,375$$

$$\frac{\sum_{K=1}^{6} F_K}{\ell} = \frac{33}{32} = 1,031$$

Intrucît rezultă deci:

$$\frac{F_2}{c_2} = 2,375 > \frac{\sum_{K=1}^{6} F_K}{\ell} = 1,031$$

înseamnă că poziţia convoiului cu F_2 în secţiune este poziţia care corespunde forţei tăietoare maxime.

Valoarea forţei tăietoare maxime se calculează fie obişnuit:

$$T_1^{max} = V_A - F_1 = 17,20 - 3,5 = 13,7 \text{ tf}$$

fie folosind coeficienţii de influenţă (fig.II.96.b):

$$T_1^{max} = \sum_{K=1}^{6} \pm t_{1k} F_k = -0,125 \times 3,5 + 0,750 \times 9,5 - (0,625+0,250) \times 3 + (0,500+0,125) \times 7 = 13,7 \text{ tf}$$

b) Determinarea momentului maxim în secţiunea cu a_1=8 cm

Se consideră următoarele poziţii caracteristice ale convoiului de sarcini mobile (fig.II.97.a):

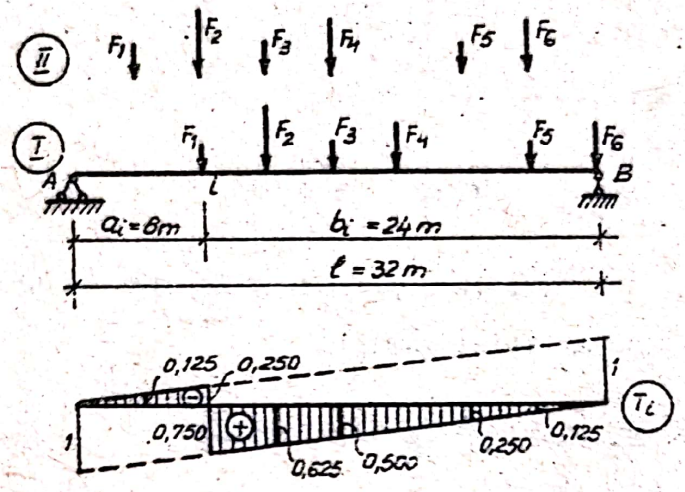


Fig. II.96

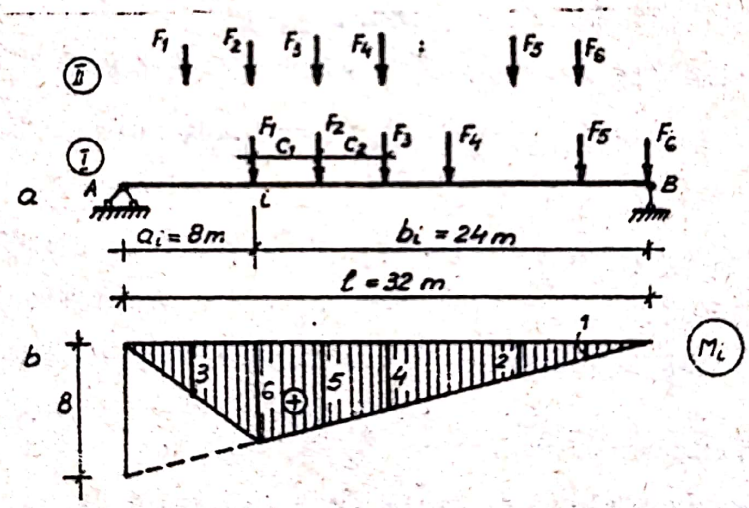


Fig II 97

I. Convoiul cu F_1 în secţiune:

$$p_a = \frac{\sum_{k=1}^{i} F_k}{a_1} = \frac{3,5}{8} = 0,4375$$

$$p = \frac{\sum_{k=1}^{6} F_k}{\ell} = \frac{33}{32} = 1,031$$

$$p_b = \frac{\sum_{k=1}^{6} F_k}{b_i} = \frac{33}{24} = 1,375$$

Rezultă:

$$p_a = 0,4375 < p = 1,031 < p_b = 1,375$$

deci convoiul trebuie deplasat cu e_1 spre stînga (pînă cînd forţa F_2 ajunge în secţiune).

II. Convoiul cu F_2 în secţiune:

$$p_a = \frac{\sum_{k=1}^{6} F_k}{a_i} = \frac{13}{8} = 1,625$$

$$p = \frac{\sum_{k=1}^{6} F_k}{\ell} = \frac{33}{32} = 1,031$$

$$p_b = \frac{\sum_{k=2}^{6} F_k}{b_i} = \frac{29,5}{24} = 1,229$$

Rezultă:

$$p_a = 1,625 > p = 1,031 < p_b = 1,229$$

deci poziţia convoiului cu F_2 în secţiune este poziţia care corespunde momentului maxim în secţiunea i şi valoarea acestui moment se calculează fie obişnuit:

$$M_i^{max} = V_A a_i - F_1 e_1 = 17,20 \times 8 - 3,5 \times 4 = 123,6 \text{ tfm}$$

fie folosind coeficienţii de influenţă (fig.II.97.b):

$$M_i^{max} = \sum_{k=1}^{6} m_{ik} F_k = 3x3,5 + 6x9,5 + (5+2)x3 + (4+1)x7 = 123,6 \text{ tfm}$$

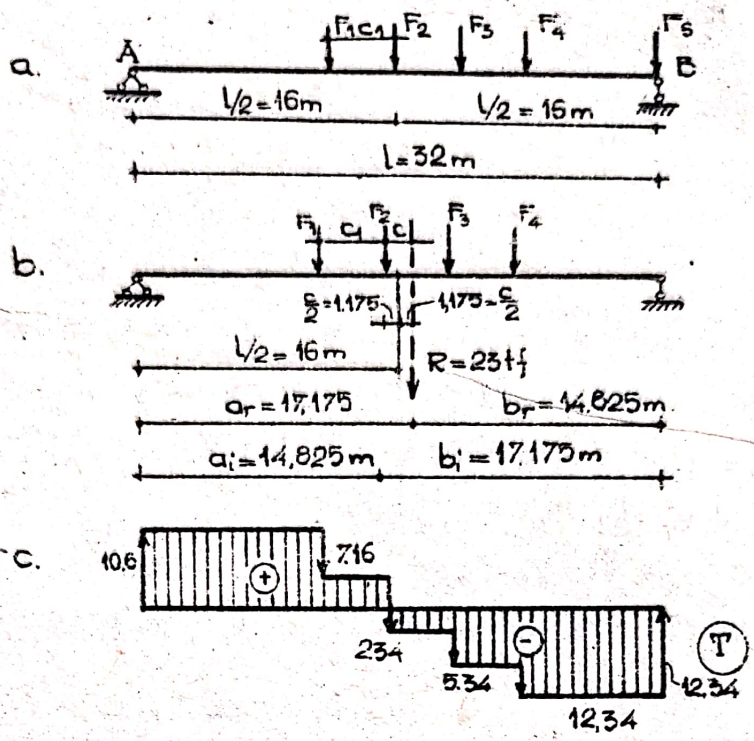


Fig. II-98

e) <u>Determinarea momentului încovoietor maximum maximorum.</u>

Conform celor precizate anterior, se efectuează următoarele etape de calcul:

- Determinarea poziţiei convoiului pentru care se produce momentul încovoietor maxim în secţiunea de la mijlocul grinzii; această etapă se rezolvă la fel ca în cazul precedent şi rezultă că această poziţie corespunde situaţiei cînd forţa F_2 se găseşte în secţiune (fig.II.98.a).

- Se aşează convoiul pe grindă în poziţia de moment maximum maximorum, în aşa fel încît să fie îndeplinită condiţia indicată de relaţia (II.183.a), ceea ce necesită cunoaşterea distanţei c dintre rezultantă şi forţa F_2 în dreptul căreia se presupune că se produce momentul maximum maximorum. Folosind teorema Varignon aplicată în raport cu forţa F_1 (fig.II.99):

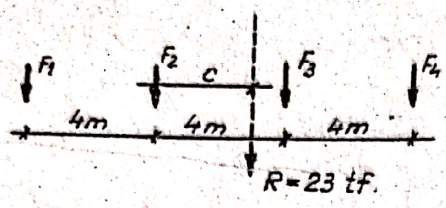


Fig. F. 99

$R.(4+e) = F_2 \cdot 4 + F_3 \cdot 8 + F_4 \cdot 12$

rezultă:

$$e = \frac{9,5x4+3x8+7x12-23x4}{23} = 2,35 \text{ m}$$

Convoiul se așează deci pe grindă în așa fel, încît F_2 și R să se găsească la distanțe egale cu $e/2 = 1,175$ m față de mijlocul grinzii(fig. II.99.b).

- Se verifică dacă și pentru această poziție este îndeplinită condiția de moment maxim în dreptul forței F_2:

$$p_a = \frac{\sum_{k=1}^{2} F_k}{a_i} = \frac{13}{14,825} = 0,8768$$

$$p = \frac{\sum_{k=1}^{6} F_k}{\ell} = \frac{23}{17,175} = 1,098$$

deci: $$p_b = \frac{\sum_{k=2}^{6} F_k}{b_i} = \frac{19.5}{17.175} = 1,098$$

$$p_a = 0,876 > p = 0,7187 < p_b = 1,098$$

(condiția de moment maxim este respectată).

- Se verifică dacă forța tăietoare își schimbă semnul în dreptul forței F_2:

$$V_A = \frac{R\, b_r}{\ell} = \frac{23 \times 14,825}{32} = 10,66 \text{ tf}$$

cu ajutorul căreia se trasează diagrama de forțe tăietoare din fig.II.93-c, care trece prin zero în dreptul forței F_2.

- Se calculează momentul maximum maximorum,fie în mod obișnuit:

$$M_{max\ max} = V_A\, a_i - F_1 o_1 = 10,66 \times 14,825 - 3,5 \times 4 = 144 \text{ tfm}$$

fie cu relația (II.184.a):

$$M_{max\ max} = \frac{R(\ell - c)^2}{4\ell} - F_1 c_1 \quad \frac{23(32-2,35)^2}{4 \times 32} - 3,5x4 = 144 \text{ tfm}$$

Folosind sarcinile echivalente (STAS 3221-63) aceleași eforturi maxime se determină astfel:

a) <u>Forța tăietoare maximă</u>

Se încarcă cu sarcina echivalentă numai porțiunea de grindă corespunzătoare zonei pozitive a liniei de influență (fig.II.100.a) și pentru datele:

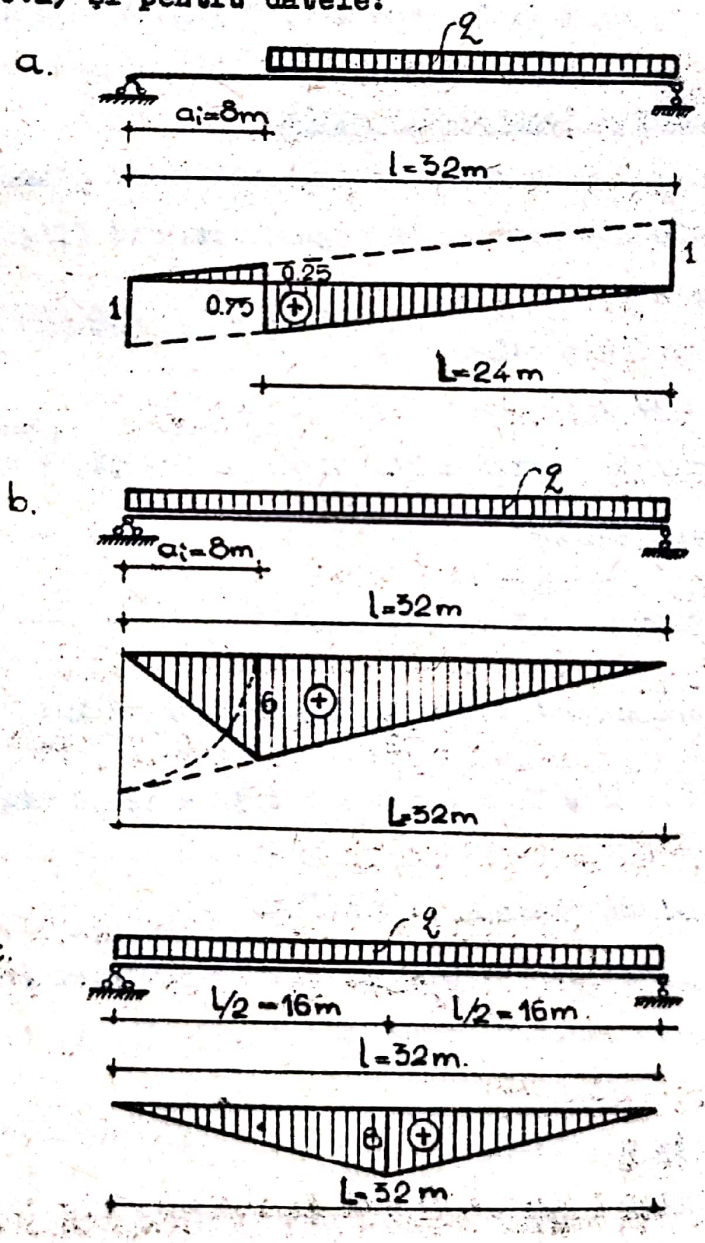


Fig. II-100

- convoi tip A-10;
- L = 24 m;
- ordonata maximă a liniei de influenţă la margine,

rezultă (STAS 3221-63):

$$q = 0,77 \times 2,04 = 1,57 \text{ tf/ml}$$

cu care se calculează forţa tăietoare maximă:

$$T_1^{max} = q \cdot \Omega^+ = 1,57 \times \frac{1}{2} \times 0,75 \times 24 = 14,2 \text{ tf}$$

b) Momentul încovoietor maxim

Se încarcă cu sarcina echivalentă toată grinda, deoarece linia de influenţă este în întregime pozitivă (fig.II.100.b) şi pentru datele:

- convoi tip A-10;
- L = 32 m
- ordonata maximă a liniei de influenţă la un sfert;

rezultă (STAS 3221-63):

$$q = 0,77 \times 1,68 = 1,29 \text{ tf/ml}$$

cu care se calculează momentul încovoietor maxim:

$$M_1^{max} = q \Omega = 1,29 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 32 = 124,2 \text{ tfm}$$

c) Momentul maximum maximorum.

Acest efort reprezintă în acest caz momentul maxim în secţiunea de la mijlocul grinzii (fig.II.100.c), deci pentru datele:

- convoi tip A-10;
- L = 32 m
- ordonata maximă a liniei de influenţă la mijloc;

rezultă (STAS 3221-63):

$$q = 0{,}77 \times 1{,}64 = 1{,}27 \text{ tf/ml}$$

cu care se calculează momentul maximum maximorum:

$$M_{max\ max} = M^{max}_{l/2} = q \cdot \Omega = 1{,}27 \times \frac{1}{2} \times 8 \times 32 = 162 \text{ tfm}$$

O a doua aplicație se referă la determinarea unor eforturi maxime produse de un convoi de autocamioane A-13, care se deplasează pe grinda Gerber din fig.II.101.a.

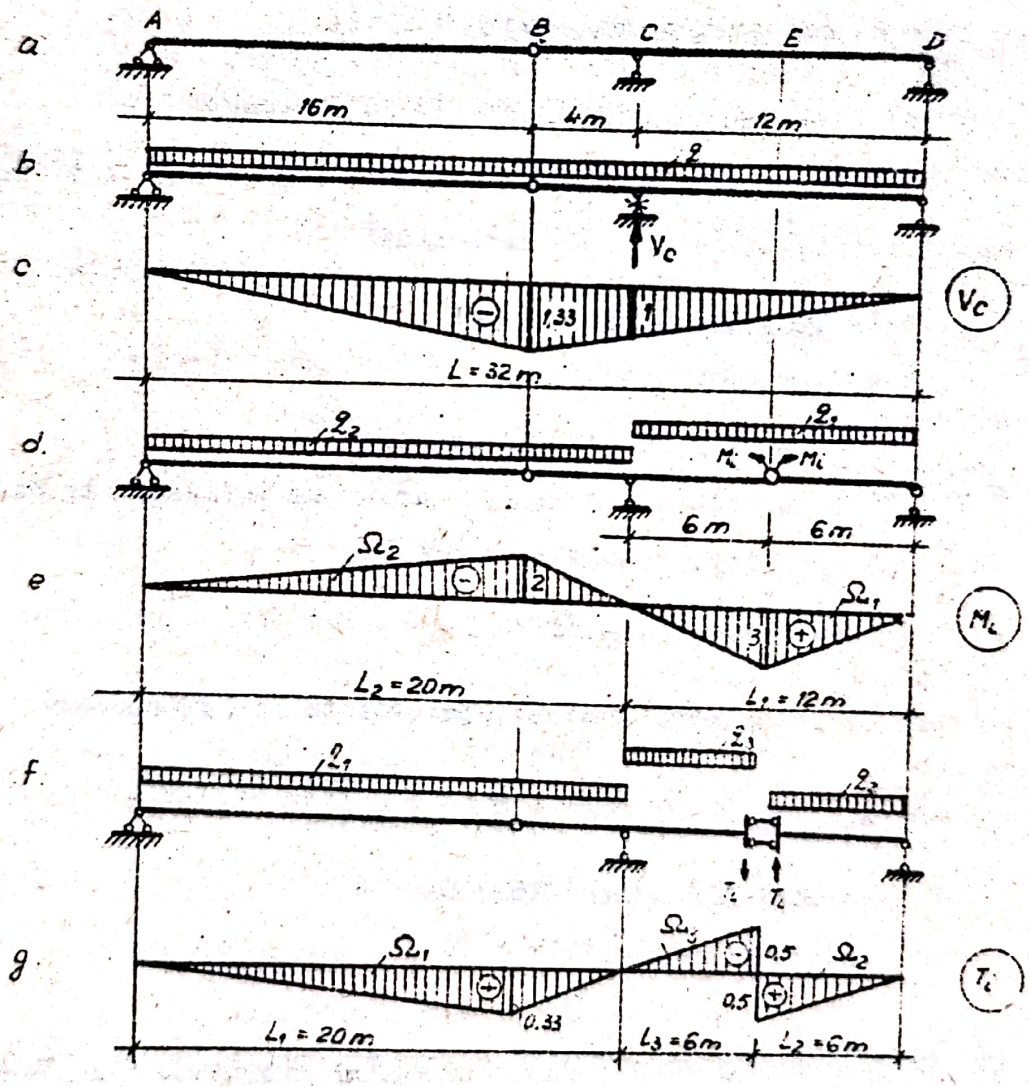


Fig. II.101

a) Reacţiunea maximă din reazemul C

Intrucît linia de influenţă este în întregime pozitivă, se încarcă cu sarcina echivalentă toată grinda (fig.II.101.b) şi pentru datele:

- convoi A-13;
- L = 32 m;
- ordonata maximă a liniei de influenţă la mijloc, rezultă:

$$q = 1{,}64 \text{ tf/ml}$$

cu care se calculează reacţiunea maximă:

$$V_C^{max} = q\,\Omega = 1{,}64 \times \frac{1}{2} \times 1{,}33 \times 32 = 35 \text{ tf.}$$

b) Momentul încovoietor maxim în secţiunea i

Intrucît linia de influenţă are o zonă pozitivă şi una negativă (fig.II.101.c), se determină:

b.1. Momentul maxim pozitiv

pentru: - convoi A-13;

- L_1 12 m (fig.II.101.d);
- ordonata maximă a liniei de influenţă la mijloc, rezultă:

$$q_1 = 2{,}54 \text{ tf/ml}$$

cu care se calculează momentul încovoietor maxim pozitiv:

$$M_{1(+)}^{max} = q_1\,\Omega_1 = 2{,}54 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 12 = 45{,}8 \text{ tfm}$$

b.2. Momentul maxim negativ

pentru : - convoi A-13

- L_2 20 m (fig.II.101.d);
- ordonata maximă a liniei de influenţă la $L_2/5$;

rezultă prin interpolare liniară:

$$q_2 = 2,06 \text{ tf/ml}$$

cu care se calculează momentul maxim negativ:

$$M_{1(-)}^{max} = q_2 \Omega_2 = -2,06 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 20 = -41,2 \text{ tfm}$$

c) <u>Forța tăietoare maximă în secțiunea 1:</u>

Se determină de asemenea două valori ale forței tăietoare maxime:

c.1) <u>Forța tăietoare maximă pozitivă</u>

Se încarcă grinda pe porțiunile A-C și E-D, corespunzătoare zonelor pozitive ale liniei de influență (considerînd două convoaie identice care circulă în sensuri opuse - fig. II.101.f) și se găsește:

- pentru: - convoi A-13
  - $L_1 = 20$ m
  - ordonata maximă a liniei de influență la $L_1/5$:

rezultă prin interpolare liniară $q_1 = 2,06$ tf/ml

- pentru: - convoi A-13
  - $L_2 = 6$ m
  - ordonata maximă a liniei de influență la margine, rezultă $q_2 = 4,63$ tf/ml

Cu aceste date:

$$T_{1(+)}^{max} = q_1\Omega_1 + q_2\Omega_2 = 2,06 \times \frac{1}{2} \times 0,33 \times 20 + 4,63 \times \frac{1}{2} \times 0,5 \times 6 = 13,75 \text{ tf}$$

c.2. Forţa tăietoare maximă negativă

Se încarcă grinda pe porţiunea C-B (fig.II.101.f) şi pentru datele: - convoi A-13

- L_3 = 6 m
- ordonata maximă a liniei de influenţă la margine, rezultă q_3 = 4,63 tf/ml, cu care:

$$T_{1(-)}^{max} = q_3 \Omega_3 = -4,63 \times \frac{1}{2} \times 0,5 \times 6 = -6,95 \text{ tf}$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III

ARCE STATIC DETERMINATE

III.1. Consideraţii generale.

III.1.1. Caracteristicile arcelor.

In construcţii se utilizează ca elemente ale structurilor de rezistenţă şi bare cu axă curbă care, din punct de vedere al acţiunii sarcinilor, se grupează în două categorii.

1. Bare curbe acţionate de sarcini normale pe planul lor (grinzi de balcoane etc.) care se calculează ca sisteme spaţiale şi vor fi tratate într-un capitol separat.

2. Bare curbe acţionate de sarcini cuprinse în planul lor şi caracterizate de apariţia în reazeme a unor componente orizontale (împingeri) ale reacţiunilor, indiferent de ipoteza de încărcare. Aceste sisteme se numesc arce şi în capitolul de faţă se tratează calculul acestui tip de bare curbe.

Arcele static determinate întîlnite cel mai des fie ca structuri de rezistenţă fie ca sisteme de bază pentru rezolvarea arcelor static nedeterminate, au fost prezentate în paragr. I.4 şi le vom reaminti aici: arcul cu trei articulaţii (fig. III.1.a), arcul cu o articulaţie şi un reazem simplu (fig.III. 1.b), arcul cu tirant drept la nivelul naşterilor (fig.III.1.c) şi arcul cu tirant suprainălţat (fig.III.1.d).

Arcele cu o articulaţie şi un reazem simplu lucrează ca sisteme cu împingeri numai atunci cînd reazemul simplu este înclinat, altfel este o simplă bară curbă încărcată cu sarcini cuprinse în planul ei.

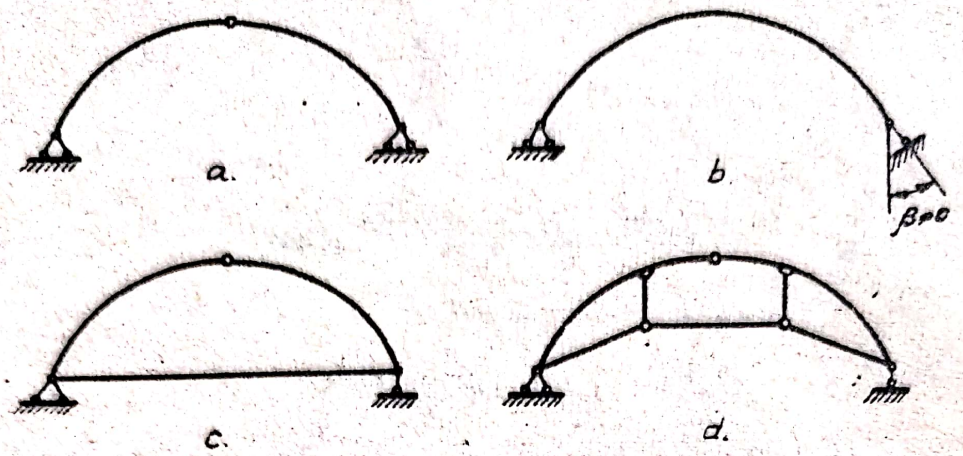


Fig. III.1.

Un avantaj al arcului cu o articulaţie şi un reazem simplu este acela că deformata sa este continuă, ceea ce nu se întîmplă la celelalte tipuri de arce, datorită prezenţei articulaţiei intermediare.

Arcele cu tirant se utilizează în special atunci cînd se urmăreşte ca împingerile să nu fie transmise asupra elementelor de rezemare sau să fie de valori reduse. Aceasta se întîmplă în special în cazul structurilor de acoperiş pentru construcţii industriale, la care existenţa unor forţe orizontale mari la partea superioară a stîlpilor sau zidurilor ar conduce la momente încovoietoare foarte mari la baza lor. In plus, tirantul dă posibilitatea introducerii prin prefîntindere a unei stări de eforturi iniţiale în structură, care permite o exploatare mai raţională a capacităţii de rezistenţă a arcului. Arcele din beton armat cu tirant simplu sau precomprimat sînt exemple de astfel de sisteme utilizate curent în practică.

Prin utilizarea arcului cu tirant suprafînălţat ca element de acoperiş, se obţine avantajul unei înălţimi libere mai mari în hala industrială respectivă.

Terminologia specifică arcelor este următoarea(fig.III.2,a)

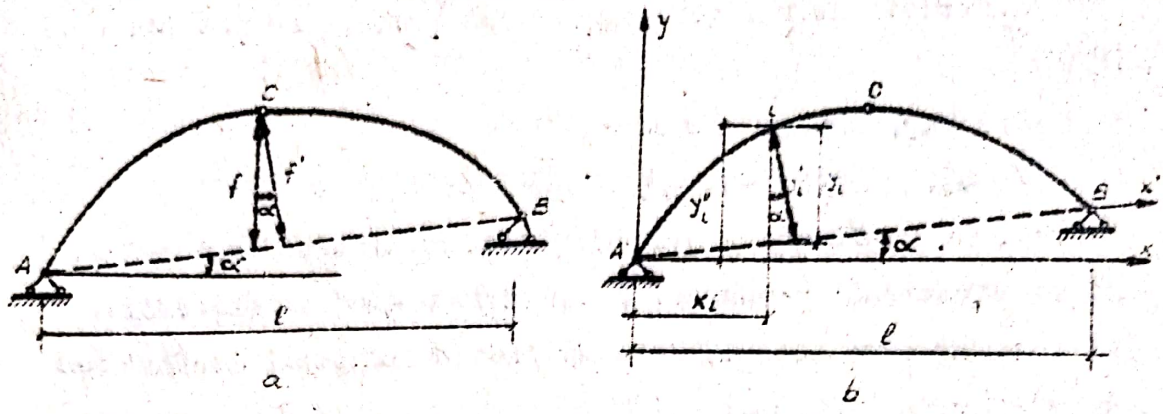


Fig. III 2

- Secţiunile de rezemare de la extremităţile arcului (A şi B) se numesc <u>naşteri</u>.

- Dreapta A-B care uneşte cele două naşteri, se numeşte <u>linia naşterilor</u>. Dacă linia naşterilor este orizontală ($\alpha = 0$), arcul este "cu naşteri de nivel", iar dacă linia naşterilor este înclinată arcul este "cu naşteri denivelate".

- Secţiunea cea mai depărtată pe verticală de linia naşterilor se numeşte <u>cheie</u>, secţiune în care se realizează de obicei articulaţia intermediară C.

- Distanţa de la linia naşterilor la cheie, măsurată fie pe verticală (f), fie perpendicular pe linia naşterilor (f'), se numeşte <u>săgeată</u>.

Se vede că:

$$f' = f \cos \alpha \qquad \text{(III.1)}$$

- Distanţa dintre naşteri măsurată pe orizontală este <u>deschiderea arcului</u> (l).

- Faţa interioară a arcului se numeşte <u>intrados</u>, iar cea exterioară <u>extrados</u>.

- Raportul dintre săgeata arcului şi deschidere (f/l) poartă denumirea de <u>plecostirea arcului</u>, iar inversul acestui raport (l/f) se numeşte <u>coeficient de îndrăzneală.</u>

In funcţie de valoarea pleoştirii, arcele se pot grupa astfel:

a) Arce pleoştite la care $f/\ell \leq 5$

b) Arce cu săgeată mare, la care $f/\ell > 5$.

Arcele utilizate ca structuri de rezistenţă în construcţii, se încadrează de obicei în categoria arcelor pleoştite.

Axa arcelor este de cele mai multe ori parabolică şi mai rar circulară.

Ca sisteme de axe faţă de care se măsoară coordonatele punctelor de pe axa arcului, se pot considera (fig.III.2.b):

a) Sistemul de axe yAx', alcătuit din verticala dusă prin naşterea A şi linia naşterilor, coordonatele unui punct i fiind:

- abscisa x_i - măsurată perpendicular pe axa Ay ;
- ordonata y_i - măsurată paralel cu axa Ay, până la linia naşterilor,

sau:

- abscisa x_i - aceeaşi ca mai sus;
- ordonata y_i' - măsurată perpendicular pe linia naşterilor.

Se vede că:

$$y_i' = y_i \cos\alpha \qquad \text{(III.2)}$$

şi dacă arcul este cu naşteri de nivel ($\alpha = 0$)

$$y_i' = y_i \qquad \text{(III.3)}$$

b) Sistemul de axe yAx_i alcătuit din verticala şi orizontala duse prin naşterea A, coordonatele unui punct fiind:

- abscisa x_i - aceeaşi ca în cazul precedent;
- ordonata y_i'' - măsurată pe verticală, până la axa A

Se vede că:

$$y_i'' = y_i + x_i \operatorname{tg}\alpha \qquad \text{(III.4)}$$

şi dacă arcul este cu naşteri de nivel ($\alpha = 0$):

$$y_i'' = y_i' = y_i \qquad \text{(III.5)}$$

III.1.2. Relaţii diferenţiale între eforturi şi încărcări la bara cu axă curbă.

Dintr-o bară cu axă curbă se separă un element infinit mic de lungime ds, căruia îi corespunde unghiul $d\varphi$ format de razele de curbură din extremităţile elementului. Elementul este acţionat de rezultanta pds ce se poate descompune în $p_t ds$ - componenta după tangenta la element în centrul de greutate al acestuia şi $p_n ds$ - componenta după normală în acelaşi punct (fig.III.3)

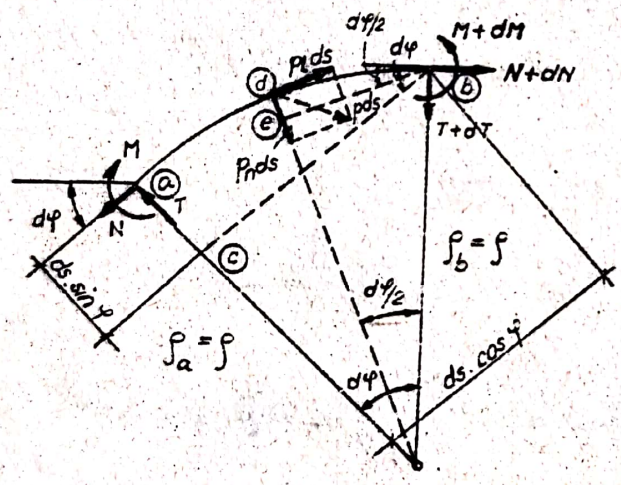


Fig. III.3

In capetele elementului acţionează eforturile notate pe figură (eforturile din b diferă de cele din a datorită efectului încărcărilor de pe element). Intrucît elementul este infinit mic, raza de curbură se poate considera constanta ($\rho_a = \rho_b = \rho$) şi

$$ds = \rho d\varphi \quad , \text{ deci } d\varphi = \frac{ds}{\rho} \qquad \text{(III.7.a)}$$

$$\sin d\varphi = d\varphi = \frac{ds}{\rho} \qquad \text{(III.7.b)}$$

$$\cos d\varphi = \cos d\varphi/2 = 1 \qquad \text{(III.7.c)}$$

Scriind echilibrul elementului izolat, se obţine:

- Ecuaţia de proiecţie pe tangenta din b:

$$N + dN - N\cos d\varphi - T\sin d\varphi + p_t ds \cos\frac{d\varphi}{2} + p_n ds \sin\frac{d\varphi}{2} = 0$$

Ținînd cont de relațiile (III.7) și neglijînd ultimul termen care este un infinit mic de ordinul doi, se obține:

$$dN - T\frac{ds}{\rho} + p_t ds = 0$$

de unde:

$$\frac{dN}{ds} = -p_t + \frac{T}{\rho} \qquad \text{(III.8)}$$

- Ecuația de proiecție pe normala din b:

$$T + dT + N\sin d\varphi - T\cos d\varphi + p_n ds \cos\frac{d\varphi}{2} - p_t ds \sin\frac{d\varphi}{2} = 0$$

sau, procedînd ca mai sus:

$$dT + N\frac{ds}{\rho} + p_n ds = 0$$

de unde:

$$\frac{dT}{ds} = -p_n - \frac{N}{\rho} \qquad \text{(III.9)}$$

- Ecuația de momente față de punctul b (considerînd abc și deb triunghiuri):

$$M - M - dM + T\,ds\cos\varphi - N\,ds\sin\varphi - p_n ds\frac{ds}{2}\cos\frac{d\varphi}{2} +$$

$$+ p_t ds\frac{ds}{2}\sin\frac{d\varphi}{2} = 0$$

sau, folosind amplificările anterioare:

$$-dM + T\,ds = 0$$

de unde:

$$\frac{dM}{ds} = T \qquad \text{(III.10)}$$

Se vede că pentru $\rho = \infty$ se obțin relațiile cunoscute de la bara cu axă dreaptă, întrucît dispar termenii care cu-

prind efectul curburii.

In continuare, se analizează modul de rezolvare a arcelor static determinate atît de acţiunea sarcinilor fixe, cît şi a celor mobile.

III.2. Arcul cu trei articulatii

III.2.1. Calculul la sarcini fixe.

III.2.1.1. Rezolvarea pe cale analitică.

Se consideră cazul general al arcului cu naşteri denivelate şi acţionat de sarcini oarecari, urmînd ca ulterior să se trateze şi anumite cazuri particulare de arce sau încărcări.

a. Determinarea reacţiunilor.

Se poate lucra cu două grupuri de reacţiuni:

a.1. Reacţiunile V'_A, Z_A respectiv V'_B, Z_B, rezultate din descompunerea reacţiunilor R_A şi R_B după verticală şi linia naşterilor (fig.III.4) şi care se determină astfel:

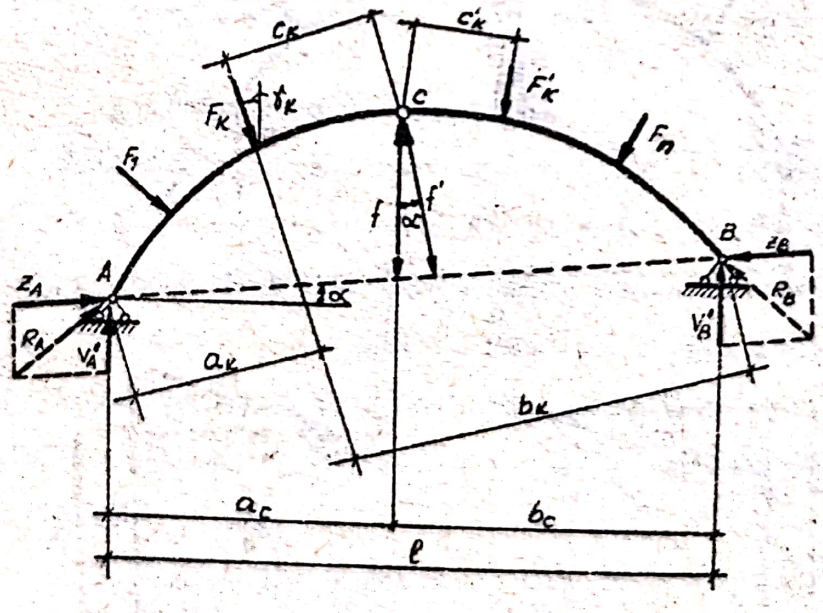


Fig. III. 4.

- din $\sum M_{(B)} = 0$: $V'_A = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k b_k}{\ell}$ (III.11)

- din $\sum M_{(A)} = 0$: $V'_B = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k a_k}{\ell}$ (III.12)

- din $M_C^{st} = 0$: $Z_A = \frac{V'_A a_c - \sum_{1}^{c} F_k c_k}{f'}$ (III.13)

- din $M_C^{dr} = 0$: $Z_B = \frac{V'_B b_c - \sum_{c}^{f} F'_k c'_k}{f'}$ (III.14)

Ecuația de proiecție pe orizontală poate servi ca relație de verificare:

$$(Z_A - Z_B)\cos\alpha + \sum_{k=1}^{n} F_k \sin\gamma_k = 0 \qquad \text{(III.15)}$$

a.2. Reacțiunile V_A, H_A, respectiv V_B, H_B, rezultate din descompunerea reacțiunilor R_A și R_B pe verticală și orizontală (fig.III.5.a)

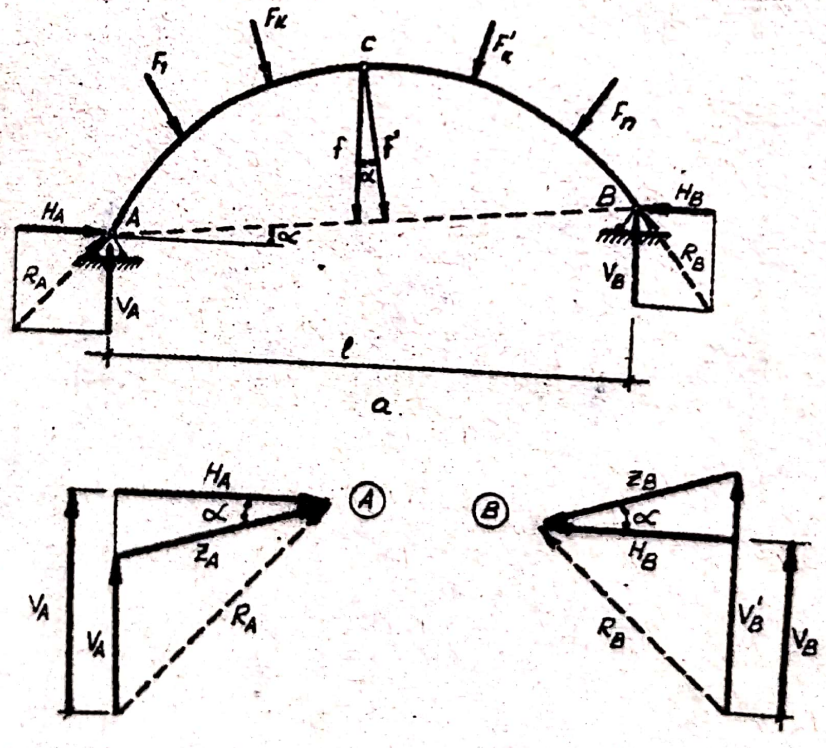


Fig. III.5

Relaţiile de determinare a acestor reacţiuni rezultă din legătura lor cu grupul precedent de reacţiuni:

- In articulaţia A (fig.III.5.b):

$$H_A = Z_A \cos\alpha = \frac{M_C^{st}}{f'} \cos\alpha$$

sau, ştiind că $f' = f\cos\alpha$:

$$H_A = \frac{M_C^{st}}{f} \qquad \text{(III.16)}$$

$$V_A = V_A' + Z_A \sin\alpha = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k\, b_k}{\ell} + Z_A \sin\alpha$$

sau, ştiind că $Z_A = H_A/\cos\alpha$:

$$V_A = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k\, b_k}{\ell} + H_A\, tg\alpha \qquad \text{(III.17)}$$

- In articulaţia B (fig.III.5.c):

$$H_B = Z_A \cos\alpha = \frac{M_C^{dr}}{f} \qquad \text{(III.18)}$$

$$V_B = V_B' - Z_B \sin\alpha = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k\, a_k}{\ell} - H_B\, tg\alpha \qquad \text{(III.19)}$$

b. <u>Determinarea eforturilor</u>.

Intr-o secţiune oarecare i a arcului cu trei articulaţii (fig.III.6), eforturile sînt forţa axială (suma proiecţiilor forţelor din stînga sau din dreapta secţiunii pe direcţia tangentei la axa arcului dusă în punctul respectiv), forţa tăietoare (suma proiecţiilor forţelor din stînga sau dreapta secţiunii pe direcţia normalei din punctul respectiv) şi momentul încovoietor.

Notînd cu φ_i unghiul format de tangenta din secţiunea i cu orizontala şi considerînd grupul de reacţiuni V_A', Z_A, respectiv V_B', Z_B, se obţine:

$$N_i = -V'_A \sin\varphi_i + \sum_A^i F_k \sin(\varphi_i - \gamma_k) - Z_A \cos(\varphi_i - \alpha) \qquad \text{(III.20)}$$

$$T_i = V'_A \cos\varphi_i - \sum_A^i F_k \cos(\varphi_i - \gamma_k) - Z_A \sin(\varphi_i - \alpha) \qquad \text{(III.21)}$$

$$M_i = V'_A \cdot x_i - \sum_A^i F_k d_k - Z_A y'_i \qquad \text{(III.22)}$$

sau, dacă se fac înlocuirile:

$$Z_A = \frac{H_A}{\cos\alpha} \; ; \qquad y'_i = y_i \cos\alpha$$

se obţine:

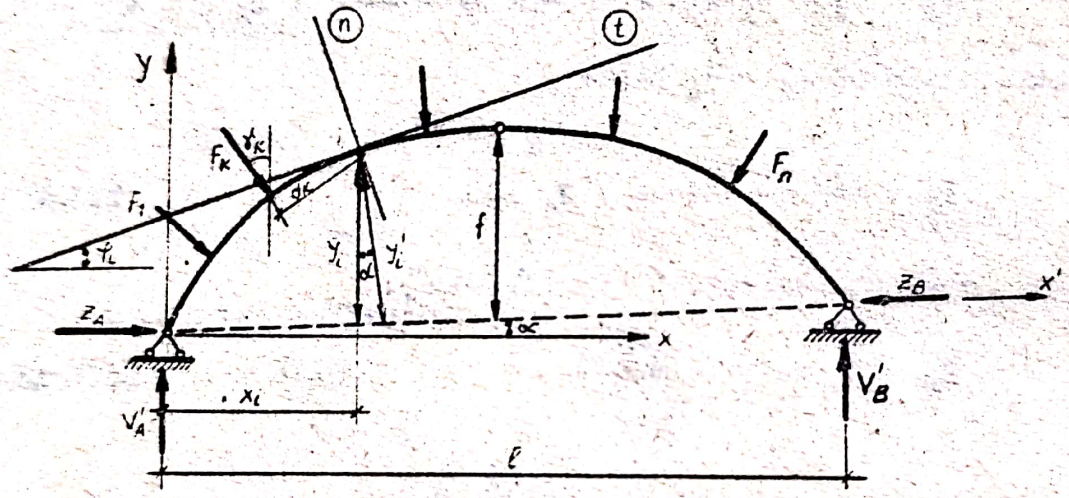


Fig. III.6

$$N_i = -\left[V'_A \sin\varphi_i - \sum_A^i F_k \sin(\varphi_i - \gamma_k)\right] - H_A \frac{\cos(\varphi_i - \alpha)}{\cos\alpha} \qquad \text{(III.23)}$$

$$T_i = \left[V'_A \cos\varphi_i - \sum_A^i F_k \cos(\varphi_i - \gamma_k)\right] - H_A \frac{\sin(\varphi_i - \alpha)}{\cos\alpha} \qquad \text{(III.24)}$$

$$M_i = \left[V'_A \cdot x_i - \sum_A^i F_k \cdot d_k\right] - H_A y_i \qquad \text{(III.25)}$$

Pentru rezolvarea practică a arcelor, acestea se împart într-un număr de segmente numite bolţari şi eforturile se calculează în punctele de separaţie ale acestor bolţari.

In continuare se tratează două cazuri particulare, întîlnite frecvent în practică.

1. Arcul cu nașteri denivelate și încărcat cu sarcini verticale (fig.III.7)

a) Determinarea reacțiunilor.

Se vede în primul rînd că din ecuația de proiecție pe orizontală:

$$Z_A \cos\alpha - Z_A \cos\alpha = 0$$

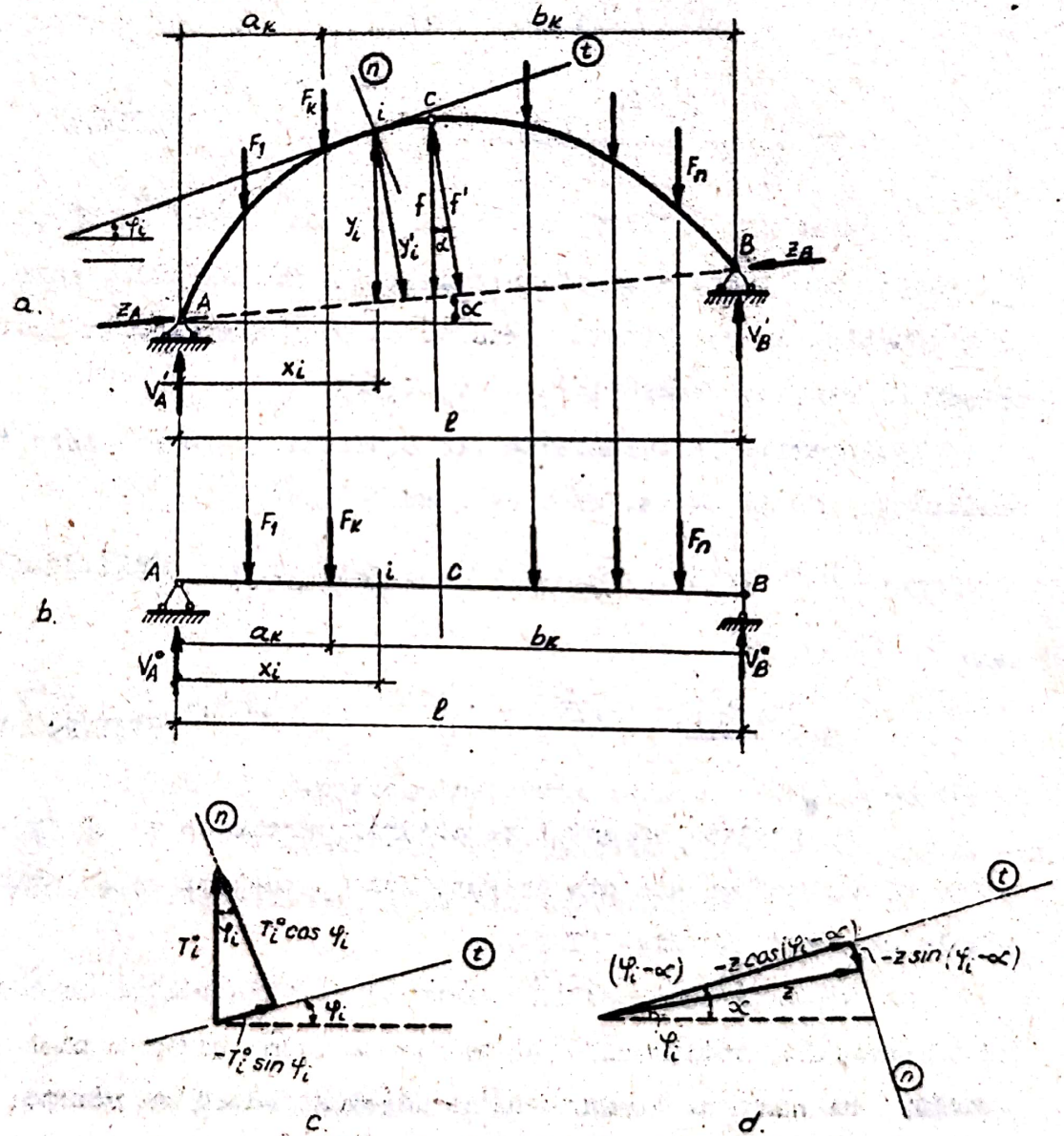


Fig. III.7

rezultă:

$$Z_A = Z_A = Z \qquad \text{(III.26.a)}$$

sau, dacă se consideră grupul de reacţiuni cu împingerile H_A, H_B, rezultă din aceeaşi ecuaţie de proiecţie pe orizontală:

$$H_A = H_B = H \qquad \text{(III.26.b)}$$

Reacţiunile verticale se determină obişnuit:

$$V_A' = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k b_k}{\ell} = V_A^o \qquad \text{(III.27)}$$

$$V_A' = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k a_k}{\ell} = V_B^o \qquad \text{(III.28)}$$

In relaţiile (III.27) şi (III.28), s-au notat cu V_A^o şi V_B^o reacţiunile grinzii simplu rezemate din fig.III.7.b, care sînt identice cu reacţiunile arcului cu trei articulaţii încărcat cu sarcini verticale din fig.III.7.a.

Impingerile se calculează din condiţia de moment zero în articulaţia de la cheie, deea ce conduce la:

$$Z = \frac{M_C^o}{f'} \qquad \text{(III.29.a)}$$

sau:

$$H = \frac{M_C^o}{f} \qquad \text{(III.29.b)}$$

M_C^o reprezintă momentul reacţiunii verticale şi al forţelor F_k din stînga sau din dreapta lui C, acelaşi ca la grinda simplu rezemată din fig.III.7.b.

Se constată deci, că în acest caz, al încărcării cu sarcini verticale, reacţiunile nu depind de forma propriu zisă a arcului, ci numai de deschidere şi săgeată, adică de poziţia relativă a celor trei articulaţii A, B şi C.

b. <u>Determinarea eforturilor</u>.

Expresiile eforturilor într-o secţiune oarecare i, se

obţin din relaţiile generale (III.20) ÷ (III.22) sau (III.23) ÷ (III.25), în care se consideră $\gamma_k = 0$.

Deci:

$$N_i = -(V'_A - \sum_A^i F_k)\sin\varphi_i - Z\cos(\varphi_i - \alpha) =$$

$$= (-V'_A - \sum_A^i F_k)\sin\varphi_i - H\frac{\cos(\varphi_i - \alpha)}{\cos\alpha} \qquad \text{(III.30)}$$

$$T_i = (V'_A - \sum_A^i F_k)\cos\varphi_i - Z\sin(\varphi_i - \alpha) =$$

$$= (V'_A - \sum_A^i F_k)\cos\varphi_i - H\frac{\sin(\varphi_i - \alpha)}{\cos\alpha} \qquad \text{(III.31)}$$

$$M_i = \left[V'_A x_i - \sum_A^i F_k(x_i - a_k)\right] - Z\,y'_i =$$

$$= \left[V'_A x_i - \sum_A^i F_k(x_i - a_k)\right] - H\,y_i \qquad \text{(III.32)}$$

Dacă se notează:

$$V'_A - \sum_A^i F_k = V^0_A - \sum_A^i F_k = T^0_i \qquad \text{(III.33)}$$

$$V'_A x_i - \sum_A^i F_k(x_i - a_k) = V^0_A x_i - \sum_A^i F_k(x_i - a_k) = M^0_i \qquad \text{(III.34)}$$

T^0_i şi M^0_i reprezentînd forţa tăietoare şi respectiv momentul încovoietor în secţiunea i a grinzii simplu rezemate din fig.III.7.b, se obţin expresiile:

$$N_i = -T^0_i\sin\varphi_i - Z\cos(\varphi_i - \alpha) = -T^0_i\sin\varphi_i - H\frac{\cos(\varphi_i - \alpha)}{\cos\alpha} \qquad \text{(III.35)}$$

$$T_i = T^0_i\cos\varphi_i - Z\sin(\varphi_i - \alpha) = T^0_i\cos\varphi_i - H\frac{\sin(\varphi_i - \alpha)}{\cos\alpha} \qquad \text{(III.36)}$$

$$M_i = M^0_i - Z\,y'_i = M^0_i - H\,y_i \qquad \text{(III.37)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Observație:

Expresiile forței axiale N_i și forței tăietoare T_i se pot scrie și direct, proiectînd pe tangenta la axa arcului și respectiv pe normală, suma forțelor verticale din stînga secțiunii adică pe T_i^0 (fig.III.7.c) și împingerea Z (fig.III.7.d)

2. **Arcul cu nasteri de nivel ($\alpha = 0$) și încărcat cu sarcini verticale (fig.III.8)**

a) **Determinarea reactiunilor.**

In acest caz, se vede ușor că:

$$V_A' = V_A = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k\, b_k}{\ell} = V_A^0 \qquad (III.38)$$

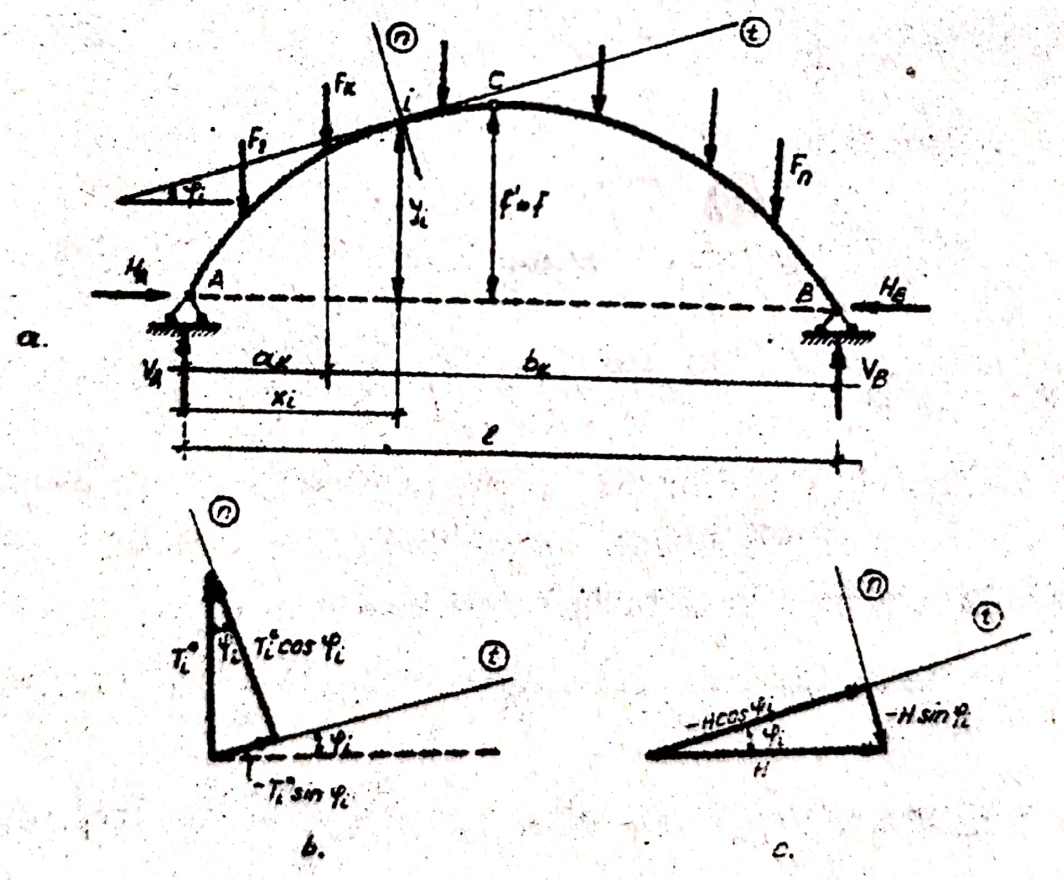


Fig. III.8

$$V'_B = V_B = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k a_k}{\ell} = V^0_B \qquad \text{(III.39)}$$

$$H_A = H_B = H = \frac{M^0_C}{f} \qquad \text{(III.40)}$$

b) Determinarea eforturilor.

Expresiile eforturilor într-o secţiune , rezultă din ultimele forme ale relaţiilor (III.35) ÷ (III.37), făcînd $\alpha = 0$, sau se scriu foarte simplu suprapunînd efectul forţelor verticale a căror rezultantă este T^0_i (fig.III.8.b) şi al împingerii H (fig.III.8.c). Pe o cale sau alta, se obţine:

$$N_i = - T^0_i \sin \varphi_i - H \cos \varphi_i \qquad \text{(III.41)}$$

$$T_i = T^0_i \cos \varphi_i - H \sin \varphi_i \qquad \text{(III.42)}$$

$$M_i = M^0_i - H y_i \qquad \text{(III.43)}$$

Expresiile eforturilor deduse pentru ultimele două cazuri particulare considerate, ne permit constatări edificatoare asupra avantajelor pe care le prezintă în general structurile în arce în comparaţie cu sistemele drepte (în acest caz grinzi simplu rezemate) de aceeaşi deschidere şi anume:

- Momentele încovoietoare şi forţele tăietoare sînt mai mici, deci efectul de încovoiere este mai redus la structurile în arce.

- La arce apare ca efort suplimentar forţa axială, care are în general valori mari, dar aceasta este totdeauna forţă de compresiune, care poate fi preluată în bune condiţiuni prin folosirea unor materiale cu cost redus cum sînt zidăria de piatră (utilizată frecvent la construirea bolţilor - care nu sînt de fapt decît niste arce dezvoltate în adîncime), betonul simplu sau armat etc.

Scanned with OKEN Scanner

Această explică posibilitatea acoperirii unor deschideri de ordinul cîtorva sute de metri cu ajutorul structurilor în arce.

In fig.III.9 sînt prezentate cîteva exemple de structuri, în a căror alcătuire unul din elementele principale de rezistență îl constituie arcele.

III.2.1.2. Rezolvarea pe cale grafică.

Determinarea pe cale grafică a reacțiunilor și eforturilor se bazează și în acest caz pe utilizarea poligonului de forțe și a poligonului funicular.

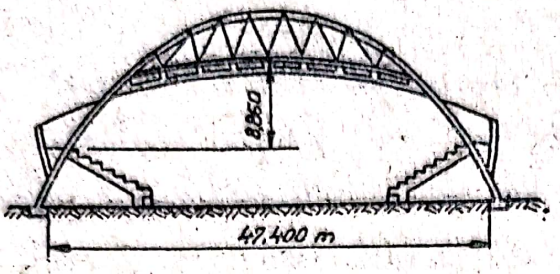
Se consideră întîi cazul general al arcului cu trei articulații cu nașteri denivelate și încărcat cu sarcini oarecari (fig.III.10).

a) Determinarea reacțiunilor.

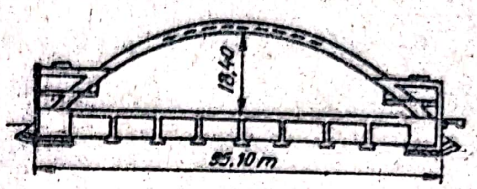
Se folosește o suprapunere de efecte, considerînd pe rînd arcul acționat numai de forțele de pe porțiunea A-C și respectiv de pe porțiunea C-B.

Astfel, în prima ipoteză de încărcare, se construiește poligonul de forțe cu polul O_1 pentru forțele F_1, F_2, F_3 și poligonul funicular corespunzător. Așa cum este cunoscut din Mecanică, suportul rezultantei R_1 a acestor forțe, trece prin punctul N_1 de intersecție a laturilor extreme ale poligonului funicular.

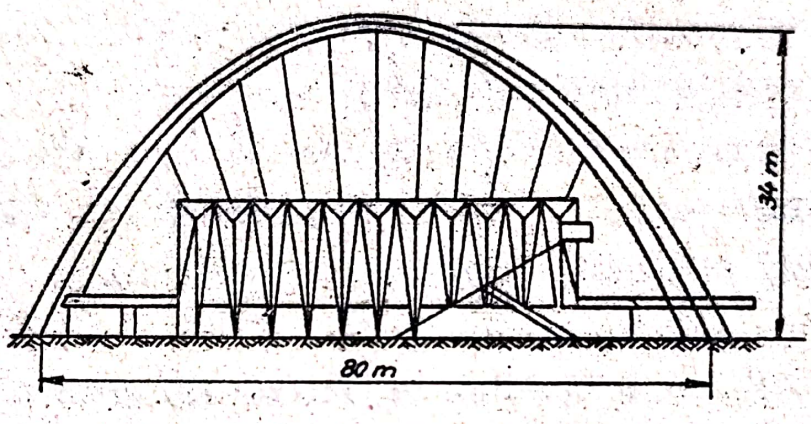
Cum porțiunea C-B este considerată neîncărcată, singura forță de pe această zonă este reacțiunea R'_B și pentru ca momentul dat de această reacțiune să fie zero în articulație C, trebuie ca R'_B să treacă prin C. Știind că pentru ca trei forțe(în acest caz R_1, R'_A și R'_B) să-și facă echilibrul în plan ele trebuie să fie concurente, rezultă că reacțiunea R'_A trebuie să



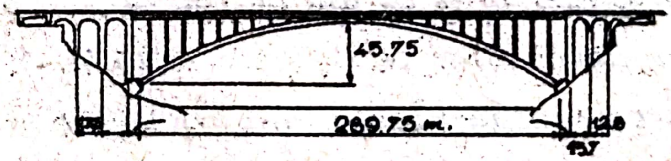
a.



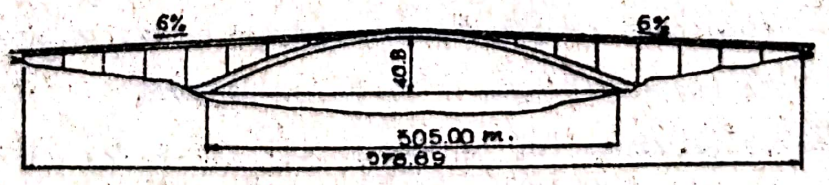
b.



c.



d.



e.

Fig. III.9

treacă prin punctul M_1 de intersecţie a direcţiei rezultantei R_1 cu direcţia reacţiunii R'_B. Cunoscînd că direcţiile celor două reacţiuni parţiale R'_A şi R'_B sînt deci A-M_1 şi respectiv B-C-M_1, se descompune în poligonul de forţe rezultanta R_1 după aceaste două direcţii şi se obţin mărimile reacţiunilor respective.

Procedînd în mod similar cu grupul de forţe de pe porţiunea C-B şi folosindu-ne deci de poligonul de forţe cu polul O_2, se obţin reacţiunile parţiale R''_A şi R''_B, prin descompunerea rezultantei R_2 pe direcţiile A-C-M_2 şi M_2-B.

Reacţiunile totale R_A şi R_B rezultă apoi prin compunerea reacţiunilor parţiale R'_A, R''_A şi respectiv R'_B, R''_B, compunere care în fig.III.10 este făcută atît în poligonul de forţe, cît şi în articulaţiile A şi B.

Se constată cu uşurinţă că, construcţia grafică utilizată, este identică cu cea cunoscută din Mecanică pentru obţinerea poligonului funicular prin trei puncte A, C, B al unui sistem oarecare de forţe plane.

Astfel, punctele O'_1 şi O'_2 din fig.III.10, obţinute prin intersecţia paralelelor la dreptele M_1-A, M_1-C şi respectiv M_2-C, M_2-B, reprezintă poli ai unor poligoane prin cîte două puncte (A şi C şi respectiv C şi B), pentru forţele de pe zona A-C şi respectiv C-B.

Ducînd din aceşti poli paralele la dreptele A-C şi respectiv C-B, care sînt drepte Culmann pentru polii poligoanelor prin A şi C şi respectiv prin C şi B, se determină la intersecţia acestor paralele (R''_A şi R'_B în fig.III.10.b), polul O al poligonului prin punctele A, C, B. Acest poligon este trasat în fig.III.10.a, prin paralele la razele polare I, II...VI din poligonul de forţe cu polul O.

Scanned with OKEN Scanner

b) Determinarea eforturilor.

Eforturile în fiecare secţiune a arcului sînt determinate de forţele din stînga sau din dreapta secţiunii respective, forţe care se pot înlocui cu rezultanta lor. Astfel pentru secţiunea i a arcului din fig.III.10.a, rezultanta R_i a forţelor R_A, F_1 şi F_2 din stînga secţiunii, se găseşte în poligonul de forţe fiind egală ca mărime cu raza polară III. Suportul acestei rezultante este dat de latura corespunzătoare III' din poligonul funicular, care are o anumită excentricitate e faţă de centrul de greutate al secţiunii i (fig.III.10.c). Componentele acestei rezultante sînt forţa tăietoare T_i (componente după direcţia normalei deci în planul reacţiunii) şi o forţă după direcţia tangentei la axa arcului în secţiunea i, numită forţă normală (normală pe secţiune), notată cu N_i'. Reducînd forţa normală la centrul de greutate al secţiunii prin două forţe $N_i = N_i'$ (egale şi de sens contrar), se obţine forţa axială N_i şi un cuplu de forţe N_i al cărui moment reprezintă momentul încovoietor din secţiunea i:

$$M_i = N_i' \cdot e_1 = N_i \cdot e_1 \qquad \text{(III.44.a)}$$

moment care se poate scrie şi în funcţie de rezultanta R_i:

$$M_i = R_i \cdot e \qquad \text{(III.44.b)}$$

Se constată pe această cale că:

- Forţa axială este de compresiune şi este componenta principală a rezultantei în fiecare secţiune. Deoarece poligonul funicular al încărcărilor ce acţionează arcul reprezintă suportul rezultantelor ale căror componente principale sînt forţe de compresiune, acest poligon, construit ţinînd cont de sistemul de legături al arcului (în acest caz ca poligon funicular prin trei puncte), se numeşte "poligon de presiune". În

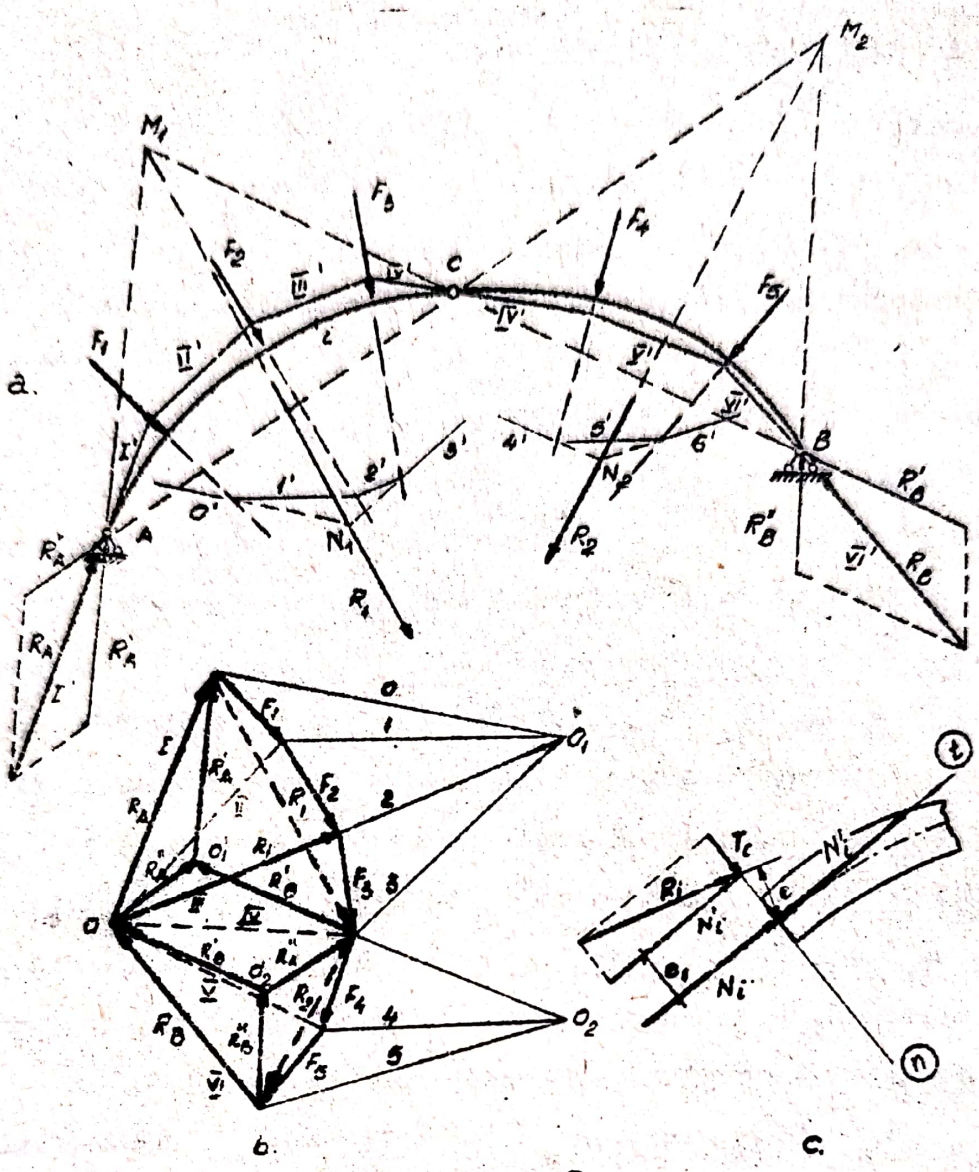


Fig. III.10

cazul unor încărcări distribuite, vom avea evident, o "curbă de presiune".

- Din fig.III.10.c se vede că atunci cînd poligonul de presiune este deasupra axei arcului, fibra întinsă este în partea de jos, deci momentul este pozitiv (porţiunea A-C în fig.III.10.a) şi invers, momentele sînt negative cînd poligonul de presiune este sub axa arcului (porţiunea C-B în fig.III 10.a). Mai rezultă de aici că poligonul de presiune apare pe

partea fibrei comprimate, adică invers faţă de barele drepte, la care totdeauna poligonul funicular apare pe partea fibrei întinse.

- Din relaţiile (III.44.a) şi (III.44.b) rezultă că momentele încovoietoare în arc sînt mai mici cu cît excentricităţile e_1, respectiv e, sînt mai mari, deci cu cît axa arcului este mai apropiată de poligonul (sau curba) de presiune.

Aceasta este o indicaţie importantă în legătură cu proiectarea arcelor şi va fi reluată mai departe.

- Forţele tăietoare T_i sînt în general mici.

Ultimele două observaţii confirmă concluzia dedusă pe baza expresiilor analitice ale eforturilor secţionale, referitor la efectul redus de încovoiere care apare la arce, ceea ce reprezintă un avantaj al acestor tipuri de structuri.

Unul din criteriile de proiectare raţională a arcelor este de aceea obţinerea unor soluţii la care eforturile din încovoiere să fie cît mai mici şi aşa cum s-a văzut, calea de realizare a acestui deziderat o constituie apropierea în cît mai mare măsură a axei arcului de poligonul (curba) de presiune.

In cazul sarcinilor verticale (sau în general paralele), se poate folosi o construcţie grafică mai simplă, indicată în fig.III.11.

Folosind un pol oarecare O', se construieşte poligonul funicular din fig.III.11.b, al tuturor forţelor de pe arc. Cu ajutorul liniilor de închidere A'- C' şi C'- B', se determină apoi în poligonul de forţe, reacţiunile verticale din A şi C, respectiv din C şi B produse de încărcările de pe porţiunea A-C şi respectiv C-B, ca la două grinzi simplu rezemate. Reacţiunile verticale din C sînt vectori $\overrightarrow{c-a}$ şi respectiv $\overrightarrow{b-c}$ din fig.III.11.c şi ele sînt aceleaşi indiferent de polul folosit

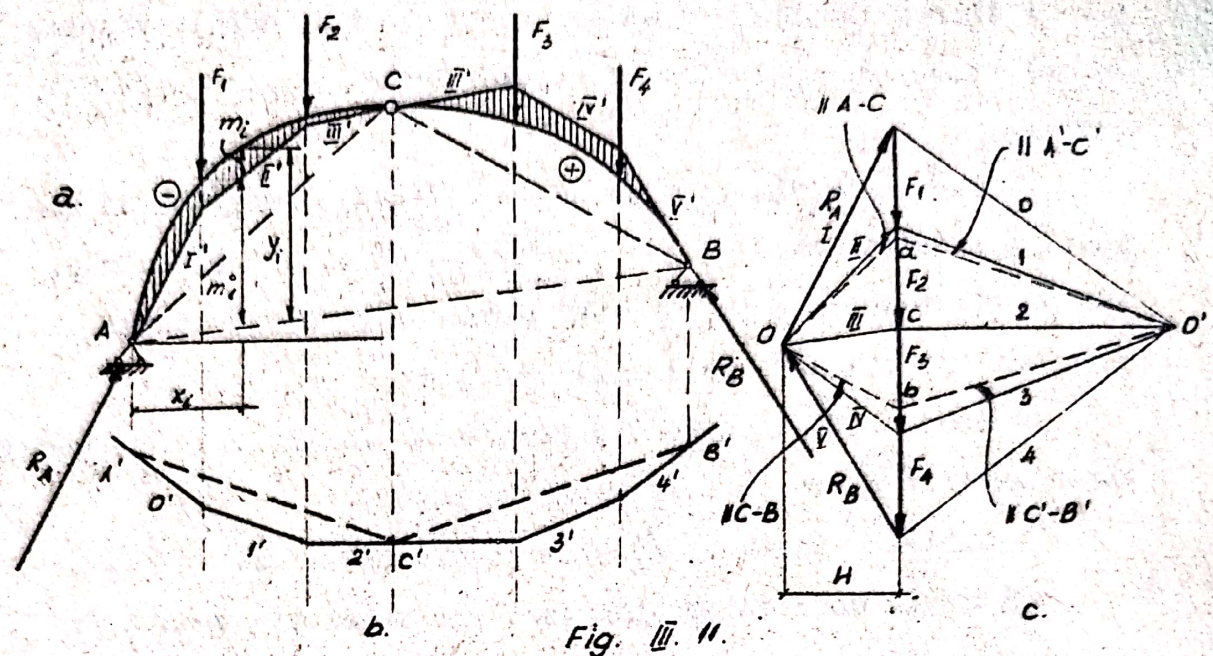


Fig. III.11.

pentru determinarea lor. Știind că dreptele A-C și C-B sînt drepte Culmann pentru poligoanele prin A,C, respectiv prin C,B, se duc din a și b paralele la aceste direcții și la intersecția lor rezultă polul poligonului prin trei puncte, cu ajutorul căruia se construiește poligonul de presiune din fig. III.11.a.

Reacțiunile R_A și R_B sînt prima și respectiv ultima rază polară corespunzătoare polului O, așa cum s-a văzut la soluția grafică generală. Proiecția pe orizontală a acestor reacțiuni reprezintă împingerile H din articulațiile A și B ale arcului și se vede că ele sînt egale ca valori cu distanța polară a poligonului de forțe cu polul O.

S-a stabilit că expresia analitică a momentului încovoietor într-o secțiune i este:

$$M_i = M_i^o - H\, y_i \qquad \text{(III.45)}$$

Pe de altă parte, se știe că:

$$M_i^o = H\, m_i^o \qquad \text{(III.46)}$$

H fiind distanţa polară (egală cu împingerea) iar m_i^o segmentul măsurat între poligonul funicular şi linia de închidere corespunzătoare grinzii simplu rezemate, adică A-B (fig.III.11. a).

Inlocuind (III.46) în (III.45):

$$M_i = H\, m_i^o - H\, y_i = H\,(m_i^o - y_i) = -\,H(y_i - m_i^o) \qquad \text{(III.47.a)}$$

sau:

$$M_i = -\,H\, m_i \qquad \text{(III.47.b)}$$

In ultima relaţie segmentul $m_i = y_i - m_i^o$ se măsoară între axa arcului şi poligonul de presiune şi întrucît H este constant, rezultă că ordonatele verticale dintre axa arcului şi poligonul de presiune reprezintă la o anumită scară mărimile momentelor încovoietoare din arc.

Cum pentru o poziţie dată a articulaţiilor A, B şi C - deci pentru o deschidere ℓ şi o săgeată f date - şi pentru un anumit sistem de încărcări, poligonul funicular este unic, rezultă că momentele în arc sînt mai reduse cu cît segmentele m_i sînt mai mici, deci cu cît axa arcului este mai apropiată de acest poligon (sau curbă) de presiune.

Pentru anumite cazuri particulare de încărcări, se pot proiecta arce ale căror axe se suprapun exact peste curbele de presiune. Aceste arce, la care momentele încovoietoare sînt nule în toate secţiunile, se numesc "arce de coincidenţă".

De obicei însă, un arc este supus la mai multe ipoteze de încărcare şi de aceea nu se pot obţine practic arce de coincidenţă. Ceea ce se urmăreşte este totuşi realizarea unor arce la care momentele încovoietoare să fie cît mai mici şi aceasta se obţine dacă se alege o axă a arcului egal depărtată

de familia de poligoane sau curbe funiculare corespunzătoare ipotezelor reale de încărcare a structurii respective.

In ceea ce priveşte greutatea proprie, întrucît evaluarea ei necesită cunoaşterea formei axei arcului, se presupune iniţial o anumită formă şi se determină greutatea proprie respectivă, cu care se trasează curba de presiune corespunzătoare. Alegînd apoi o nouă axă a arcului, apropiată de curba de presiune, se evaluează greutatea proprie şi se trasează curba de presiune corespunzătoare care va conduce la o nouă axă etc. (de obicei nu sînt necesare decît 1-2 corecţii)

III.2.2. Calculul la sarcini mobile.

Instrumentul principal pentru determinarea reacţiunilor şi eforturilor maxime produse de convoaiele de sarcini mobile, îl constituie liniile de influenţă.

Pentru determinarea liniilor de influenţă, se poate utiliza fie calea analitică, fie calea bazată pe principiul deplasărilor virtuale, aceasta din urmă fiind de obicei de preferat datorită simplităţii.

III.2.2.1. Determinarea liniilor de influenţă pe cale analitică.

a) Linii de influenţă ale reacţiunilor.

Aşa după cum s-a arătat anterior, se poate lucra fie cu grupul de reacţiuni V'- componente verticale şi Z - componente după linia naşterilor, fie cu grupul de reacţiuni V - componente verticale şi H - componente orizontale.

Mai trebuie menţionat că, întrucît încărcarea mobilă este o sarcină unitară verticală, toate reacţiunile se pot exprima în funcţie de anumite reacţiuni şi eforturi ale unei grinzi simplu rezemate de aceeaşi deschidere cu arcul. Aceasta

face ca liniile de influenţă în discuţie să se poată determina destul de simplu, pe baza celor cunoscute de la grinda simplu rezemată.

In cele ce urmează se vor scrie expresiile reacţiunilor în cele două variante, liniile de influenţă rezultînd direct

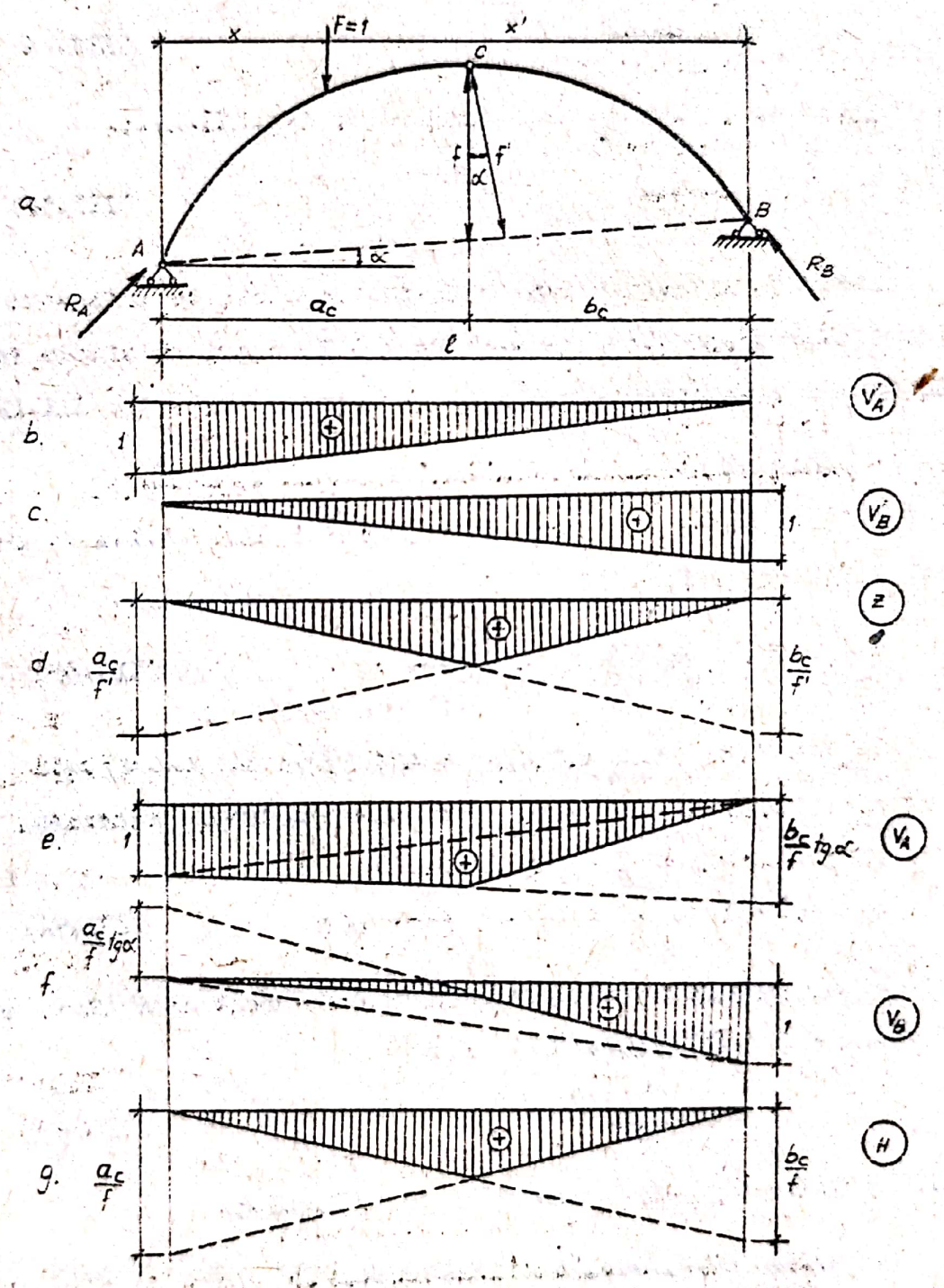


Fig. III 12

sau prin suprapunere, așa cum este arătat în fig.III.12.

- Linii de influență pentru reacțiunile (V', Z)

$$V'_A = V^0_A = \frac{1 \cdot x'}{\ell} \qquad \text{(III.48)}$$

Linia de influență este trasată în fig.III.12.b.

$$V'_B = V^0_B = \frac{1 \cdot x}{\ell} \qquad \text{(III.49)}$$

Linia de influență este trasată în fig.III.12.c.

$$Z = \frac{M^0_C}{f'} \qquad \text{(III.50)}$$

Linia de influență este similară cu linia de influență a momentului încovoietor în secțiunea C la o grindă simplu rezemată, toate ordonatele multiplicîndu-se cu $1/f'$ - fig.III.12.d.

- Linii de influență pentru reacțiunile (V, H).

Pe baza celor discutate în paragraful III.2.1.1.a.2, se poate scrie (vezi fig.III.5):

$$V_A = V'_A + H_A \operatorname{tg}\alpha = V'_A + \frac{M^0_C}{f} \operatorname{tg}\alpha \qquad \text{(III.51)}$$

Se suprapun deci liniile de influență ale reacțiunii V'_A și momentului în secțiunea C la o grindă simplu rezemată, multiplicată cu $\operatorname{tg}\alpha / f$ - fig.III.12.e.

$$V_B = V'_B - H \operatorname{tg}\alpha = V'_B - \frac{M^0_C}{f} \operatorname{tg}\alpha \qquad \text{(III.52)}$$

Se suprapun - cu semnele respective - cele două linii de influență - fig.III.12.f.

$$H = \frac{M^0_C}{f} \qquad \text{(III.53)}$$

Linia de influență este trasată în fig.III.12.g.

b) Linii de influență ale eforturilor.

Aceste linii de influență se obțin de asemenea prin su-

prapunerea unor linii de influenţă cunoscute de la grinda simplu rezemată, multiplicate cu anumiţi factori, aşa cum rezultă din expresiile (III.35) ÷ (III.37) ale eforturilor, deduse pentru cazul încărcării cu sarcini verticale.

- Linia de influenţă a forţei axiale dintr-o secţiune oarecare i.

Pe baza relaţiei (III.35), se poate scrie:

$$N_i = -T^0 \sin\varphi_i - H\frac{\cos(\varphi_i-\alpha)}{\cos\alpha} = -T^0\sin\varphi_i - \frac{M_C^0}{f}\frac{\cos(\varphi_i-\alpha)}{\cos\alpha} \qquad (III.54)$$

Se suprapune deci - cu semnele respective - linia de influenţă T_1^0 multiplicată cu $\sin\varphi_i$ şi linia de influenţă M_C^0 multiplicată cu $\cos(\varphi_i-\alpha)/f\cos\alpha$ (fig.III.13.b), rezultînd în final linia de influenţă din fig.III.13.c.

- Linia de influenţă a forţei tăietoare dintr-o secţiune oarecare.

Pe baza relaţiei (III.36), se poate scrie:

$$T_i = T_i^0\cos\varphi_i - H\frac{\sin(\varphi_i-\alpha)}{\cos\alpha} = T_i^0\cos\varphi_i - \frac{M_C^0}{f}\frac{\sin(\varphi_i-\alpha)}{\cos\alpha} \qquad (III.55)$$

Se suprapun - cu semnele respective - cele două linii de influenţă T_i^0 şi M_C^0 multiplicate cu coeficienţii corespunzători (fig.III.13.d) şi rezultă în final linia de influenţă din fig.III.13.e.

- Linia de influenţă a momentului încovoietor dintr-o secţiune oarecare i

Pe baza relaţiei (III.37), se poate scrie:

$$M_i = M_i^0 - H\cdot y_i = M_i^0 - \frac{M_C^0}{f}y_i \qquad (III.56)$$

Suprapunînd - cu semnele respective - linia de influenţă M_i^0 şi linia de influenţă M_C^0 multiplicată cu y_i/f (fig.III.14.b),

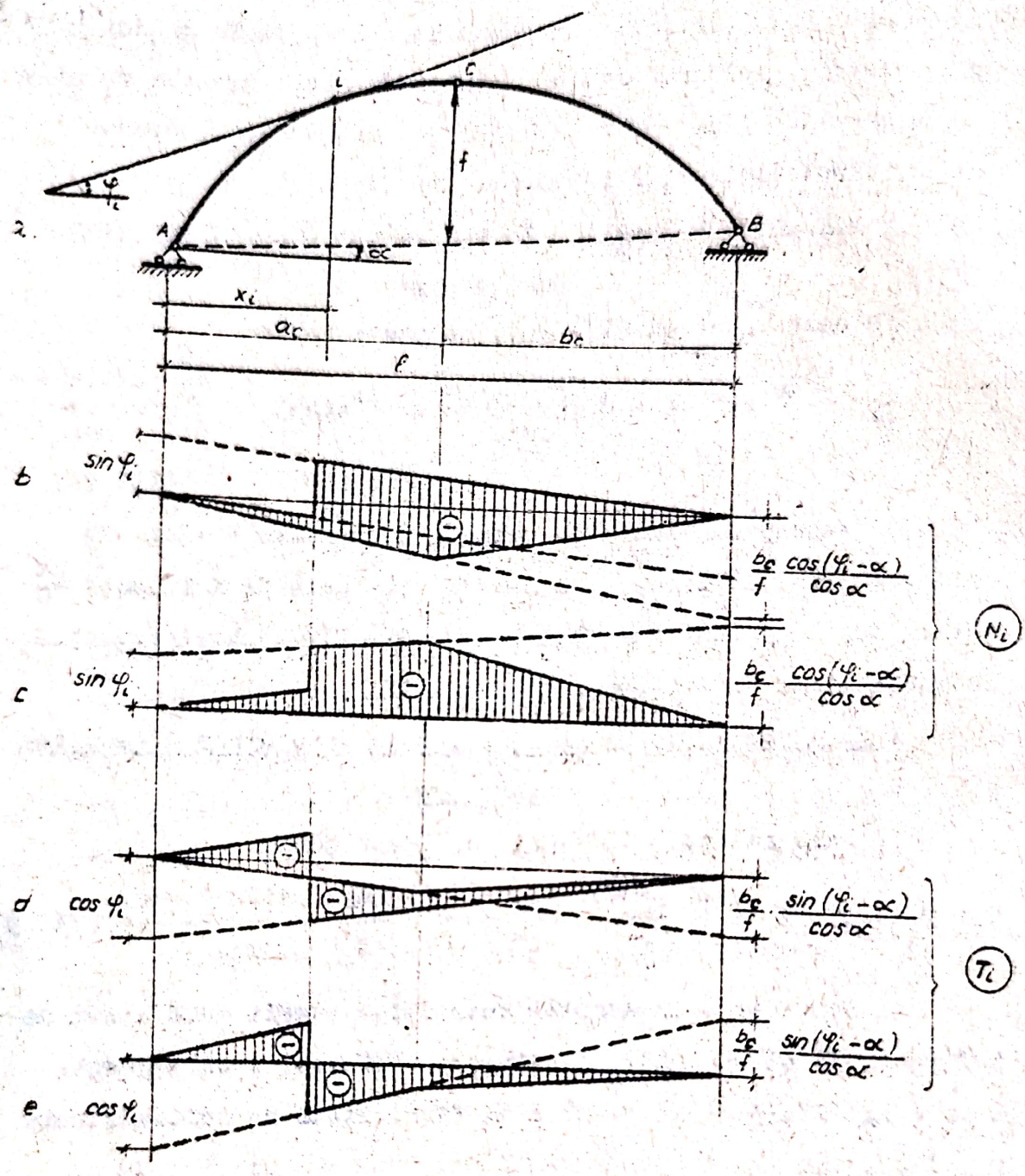


Fig. III. 13

rezultă linia de influenţă din fig.III.14.c.

Aşa după cum se observă, în linia de influenţă a momentului există un punct de ordonată zero. Rezultă că atunci cînd forţa unitară se găseşte pe arc în dreptul acestui punct -

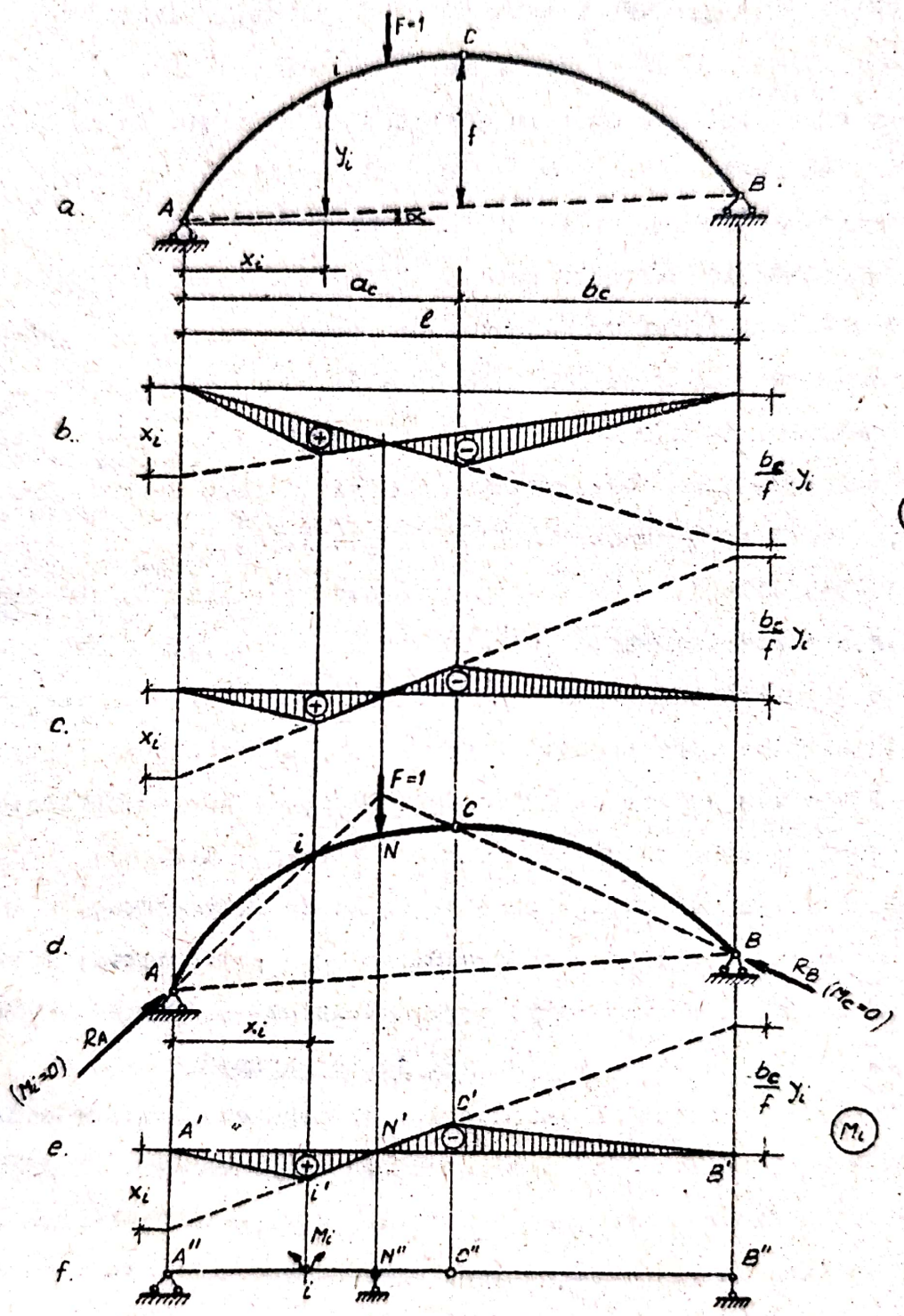

F=1
C
i
y_i
f
a.
A
B
x_i
a_c
b_c
ℓ
b.
x_i
$\frac{b_c}{f} y_i$
M_i
$\frac{b_c}{f} y_i$
c.
x_i
F=1
C
i
N
d.
A
B
R_B $(M_C=0)$
R_A
$(M_i=0)$
x_i
$\frac{b_c}{f} y_i$
C'
A'
N'
e.
M_i
B'
x_i
i'
M_i
A''
N''
C''
B''
f.
i

Fig. III. 14

numit punct neutru sau punct limită - momentul încovoietor în secţiunea i este nul. Pe baza acestei observaţii, linia de influenţă a momentului se poate determina direct, folosindu-ne de acest punct neutru, care se găseşte din condiţia de concurenţă a trei forţe (F = 1, R_A şi R_B) în echilibru: R_A fiind singura forţă dintre A şi i, direcţia ei trebuie să fie A-i, pentru ca momentul din secţiunea i să fie zero; R_B fiind singura forţă dintre B şi C, direcţia ei trebuie să fie B-C, pentru ca momentul din C să fie zero; cea de a treia forţă F = 1 se va găsi deci în această situaţie la intersecţia direcţiilor A-i şi B-C şi aceasta este poziţia forţei unitare pentru care M_i = 0, deci N este punctul neutru (fig.III.14.d).

Prin proiecţia N' a punctului neutru pe linia de referinţă, se duce apoi o dreaptă cu tăietura x_i pe verticala articulaţiei A şi unind proiecţiile i' şi C'ale secţiunii i şi respectiv articulaţiei C pe această dreaptă cu proiecţiile A'şi respectiv B'ale naşterilor pe linia de referinţă, se obţine linia de influenţă a momentului încovoietor M_i (fig.III.14.c).

Se mai observă destul de uşor că linia de influenţă a momentului într-o secţiune i a arcului cu trei articulaţii, este identică cu linia de influenţă a momentului M_i la grinda Gerber din fig.III.14.f, numită şi "grindă de înlocuire".

Trebuie remarcat că existenţa unei zone cu ordonate pozitive şi a unei zone cu ordonate negative în linie de influenţă a momentului dintr-o secţiune a arcului cu trei articulaţii,ne indică în plus că momentul respectiv va fi mai mic - la o aceeaşi încărcare în raport cu momentul la o grindă simplu rezemată de aceeaşi deschidere. Aceasta, deoarece scriind momentul cu ajutorul coeficienţilor de influenţă, anumite forţe se vor înmulţi cu coeficienţi negativi deci suma algebrică va fi

mai mică:

$$M_i = \sum_{k=1}^{n} \pm m_{ik} F_k \qquad \text{(III.57.a)}$$

față de:

$$M_i = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} F_k \qquad \text{(III.57.b)}$$

în care toți termeni sînt pozitivi (cazul grinzii simplu rezemate la care linia de influență M_i are numai ordonate pozitive).

In mod asemănător cu punctul neutru corespunzător liniei de influență a momentului încovoietor, se pot determina puncte neutre și pentru liniile de influență ale forței axiale și forței tăietoare. Este vorba de niște puncte neutre fictive, determinate pe baza unor raționamente similare cu cel analizat pentru momentul încovoietor [11], dar folosirea lor nu prezintă un interes practic deosebit. Poziția acestor puncte neutre va fi indicată la procedeul bazat pe principiul deplasărilor virtuale (calea cinematică).

III.2.2.2. Determinarea liniilor de influență pe cale cinematică.

Se utilizează procedeul general expus în paragraf. III. 3.2.2. și aplicat la structurile alcătuite din bare drepte analizate în cap.II, ale cărui etape principale sînt:

- suprimarea legăturii corespunzătoare reacțiunii sau efortului S_i pentru care se trasează linia de influență și înlocuirea legăturii cu reacțiunea sau efortul respectiv;
- determinarea centrelor instantanee de rotație absolute și relative și construirea diagramei deplasărilor pe verticală ale mecanismului obținut;
- stabilirea scării liniei de influență, cu ajutorul ecuației de echilibru scrisă prin lucru mecanic virtual, ceea ce revine la a considera în diagrama deplasărilor, deplasarea

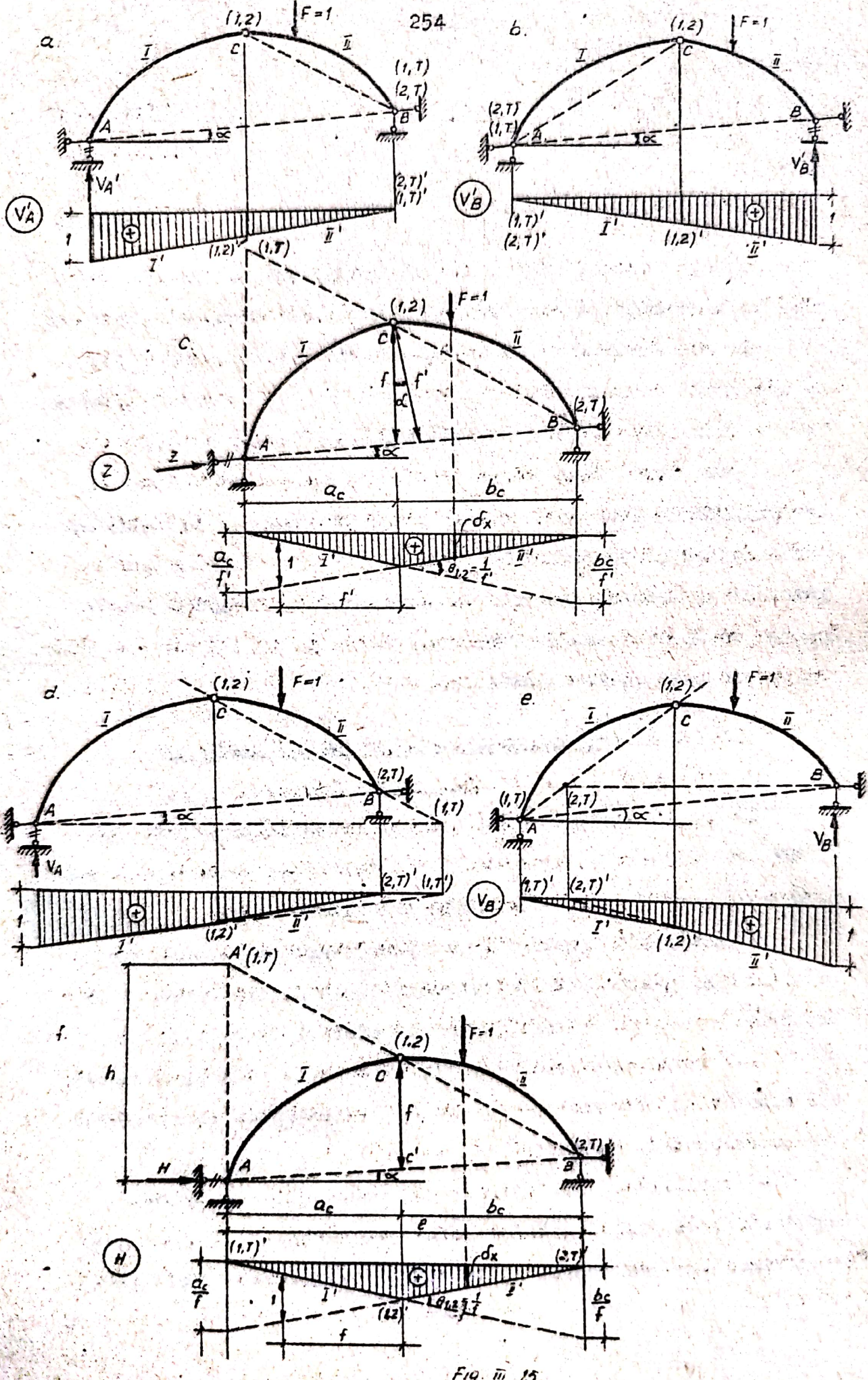

a.
b.
c.
d.
e.
f.
F=1
(1,2)
(1,T)
(2,T)
(2,T)'
(1,T)'
(1,2)'
A
B
C
I
II
I'
II'
α
V_A'
V_B'
V_A
V_B
a_c
b_c
δ_x
$\theta_{1,2}=\frac{1}{f'}$
$\frac{a_c}{f'}$
$\frac{b_c}{f'}$
f
f'
h
H
A'(1,T)
c'
e

Fig. III 15

după direcţia reacţiunii sau efortului S_i egală cu unitatea, conform relaţiei (II.109)

a) Linii de influenţă ale reacţiunilor

In fig.III.15 sînt determinate liniile de influenţă pentru reacţiunile V'_A, V'_B şi Z - cînd articulaţiile de la naşteri s-au reprezentat sub forma unor penduli verticali şi a unor penduli dirijaţi după linia naşterilor, precum şi pentru reacţiunile V_A, V_B şi H - cînd articulaţiile de la naşteri s-au reprezentat sub forma unor penduli verticali şi orizontali.

- Linia de influenţă a reacţiunii V'_A (fig.III.15.a).

Centrul instantaneu absolut al corpului II este în B, iar cel al corpului I se găseşte la intersecţia direcţiei pendulului rămas în A (direcţia A-B) cu direcţia (2,T) - (1,2), deci tot în B.

Diagramele de deplasări ale celor două corpuri sînt deci în prelungire, iar scara se determină luînd $\delta_A^V = 1$.

- Linia de influenţă a reacţiunii V'_B (fig.III.15.b).

Centrele instantanee absolute (1,T) şi 2,T) se găsesc în A, iar scara rezultă considerînd $\delta_B^V = 1$.

- Linia de influenţă a reacţiunii Z (fig.III.15.c).

Determinînd centrele instantanee absolute (2,T) şi (1,T), rezultă diagrama deplasărilor desenată. Relaţia de echilibru prin lucru mecanic virtual este:

$$1 \cdot \delta_x - Z \cdot \delta_A^Z = 0$$

de unde:

$$Z = \frac{\delta_x}{\delta_A^Z}$$ deci trebuie luat $\delta_A^Z = 1$, δ_A^Z fiind deplasarea lui A pe direcţia liniei naşterilor. Această deplasare se poate scrie în funcţie de unghiul relativ de rotire între corpurile I şi II şi de raza vectoare corespunză-

toare, care este f':

$$\delta_A^{\prime} = \theta_{1,2} \cdot f' = 1$$

deci:

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{f'} \qquad \text{(III.58)}$$

ceea ce revine la a considera în diagrama deplasărilor la distanţa f' de (1,2), o ordonată relativă între I' şi II' egală cu 1.

In funcţie de unghiul $\theta_{1,2} = 1/f'$ se pot calcula tăieturile celor două ramuri ale liniei de influenţă pe verticalele naşterilor, care rezultă egale cu a_c/f' şi respectiv b_c/f'.

- Linia de influenţă a reacţiunii V_A (fig.III.15.d).

Pendulul care rămîne în acest caz în A, este orizontal şi centrul instantaneu de rotaţie (1,T) se găseşte la intersecţia direcţiei acestui pendul cu direcţie (2,T) - (1,2).

Considerînd în diagrama deplasărilor ordonata $\delta_A^V = 1$, se obţine scara liniei de influenţă.

- Linia de influenţă a reacţiunii V_B (fig.III.15.e).

Cunoscînd (1,T) şi (2,T), se trasează diagrama deplasărilor pe verticală şi scara rezultă considerînd $\delta_B^V = 1$.

- Linia de influenţă a reacţiunii H (fig.III.15.f)

După ce se construieşte diagrama deplasărilor pe verticală, pentru determinarea scării se scrie relaţia de echilibru prin lucru mecanic virtual:

$$1 \cdot \delta_x - H \cdot \delta_A^H = 0$$

de unde:

$$H = \frac{\delta_x}{\delta_A^H}$$

deci trebuie luat $\delta_A^H = 1$.

adică deplasarea reazemului A pe direcţie orizontală egală cu unitatea.

Această deplasare se poate scrie în funcţie de unghiul de rotire al corpului I şi de raza vectoare h a punctului A faţă de centrul instantaneu de rotaţie (1,T):

$$\delta_A^{N} = h \cdot \theta_1 = 1$$

de unde:

$$\theta_1 = \frac{1}{h} \qquad \text{(III.59.a)}$$

Sau, din asemănarea triunghiurilor A'AB şi C'CB (fig.III.15.f) se poate scrie:

$$\frac{\ell}{h} = \frac{b_c}{f}$$

de unde rezultă:

$$\frac{1}{h} = \frac{b_c}{\ell f} = \theta_1 \qquad \text{(III.59.b)}$$

Dacă se calculează tăietura ramurii de stînga a liniei de influenţă pe verticala articulaţiei B, se obţine:

$$y_B = \ell \cdot \theta_1 = \ell \cdot \frac{b_c}{\ell f} - \frac{b_c}{f} \qquad \text{(III.60)}$$

iar unghiul relativ $\theta_{1,2}$ are valoarea:

$$\theta_{1,2} = \frac{y_B}{b_c} = \frac{1}{f} \qquad \text{(III.61)}$$

adică elementele determinate şi prin procedeul analitic.

b) <u>Linii de influenţă ale eforturilor</u>.

- <u>Linia de influenţă a forţei axiale dintr-o secţiune oarecare i</u>.

Făcînd secţiunea incompletă specifică forţei axiale, se obţine mecanismul pentru deplasări virtuale din fig.III.16.a, alcătuit din trei corpuri.

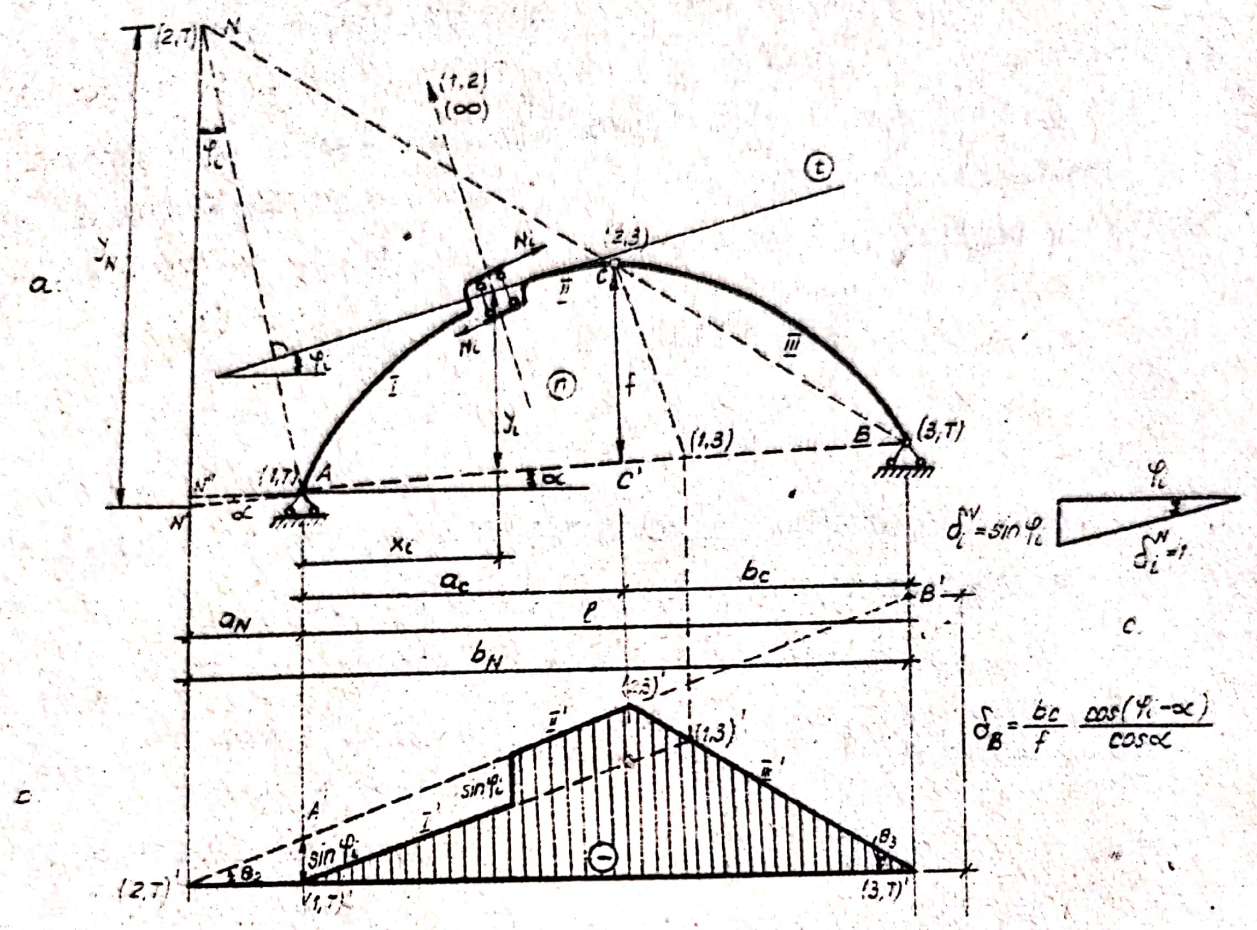


Fig. III 16

Centrele instantanee de rotaţie (1,T) şi (3,T) se găsesc în naşterile A şi respectiv B. Centrul relativ de rotaţie (1,2) se găseşte la intersecţia pendulilor care leagă cele două corpuri, deci la infinit pe direcţia normalei din secţiunea i. Stiind acest lucru, centrul instantaneu (2,T) se găseşte la intersecţia direcţiei (3,T) - (2,3) cu o paralelă la normala din secţiunea i, dusă prin centrul (1,T) [pe această direcţie se găseşte la infinit centrul relativ (1,2), deci şi centrul absolut (2,T)] . Centrul instantaneu de rotaţie (2,T) reprezintă <u>punctul neutru pentru linia de influenţă a forţei axiale.</u>

In felul acesta, rezultă diagrama deplasărilor din fig. III.16.b, iar scara se determină cu ajutorul relaţiei de echilibru:

$$1 \cdot \delta_x - N_i \left(\delta_1'' + \delta_2'' \right) = 0$$

de unde:

$$N_i = \frac{\delta_x}{\delta_1'' + \delta_2''} = \frac{\delta_x}{\delta_i''}$$

ceea ce înseamnă că trebuie să luăm $\delta_1'' + \delta_2'' = \delta_i'' = 1$. Această deplasare relativă pe direcţia tangentei, între feţele secţiunii, apare în diagrama deplasărilor în proiecţie verticală (saltul din dreptul secţiunii) şi se vede că pentru $\delta_i'' = 1$, proiecţia verticală δ_i^v trebuie să fie egală cu (fig.III.16.c):

$$\delta_i^v = 1 \cdot \sin \varphi_i = \sin \varphi_i \qquad \text{(III.62)}$$

Pentru a determina tăietura δ_B a liniei de influenţă pe verticala articulaţiei B, se procedează astfel:

- din triunghiul (2,T)', (3,T)', B':

$$\delta_B = \theta_2 \cdot b_N$$

- din triunghiul (2,T)', (1,T)', A':

$$\theta_2 = \frac{\overline{A'-(1,T)'}}{\overline{(1,T)'-(2,T)'}} = \frac{\sin \varphi_i}{a_N}$$

deci:

$$\delta_B = \frac{b_N}{a_N} \sin \varphi_i \qquad \text{(III.63.a)}$$

- din triunghiurile AN'N" şi ANN":

$$y_N = a_N \operatorname{ctg} \varphi_i + a_N \operatorname{tg} \alpha = a_N \left(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \varphi_i \right)$$

sau:

$$y_N = a_N \frac{\cos \left(\varphi_i - \alpha \right)}{\sin \varphi_i \cdot \cos \alpha}$$

- din asemănarea triunghiurilor NN'B şi CC'B:

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{b_N}{y_N} = \frac{b_c}{f}$$

sau, înlocuind pe y_N determinat mai sus:

$$\frac{b_N \sin \varphi_i \cdot \cos \alpha}{a_N \cos(\varphi - \alpha)} = \frac{b_c}{f}$$

de unde:

$$\frac{b_N}{a_N} \sin \varphi_i = \frac{b_c}{f} \frac{\cos(\varphi_i - \alpha)}{\cos \alpha} = \delta_B \quad \text{(III.63.b)}$$

adică aceeaşi ordonată care rezultă şi pe cale analitică.

- <u>Linia de influenţă a forţei tăietoare dintr-o secţiune oarecare i.</u>

Centrele instantanee de rotaţie ale corpurilor ce alcătuiesc mecanismul din fig.III.17.a, se determină în mod asemă-

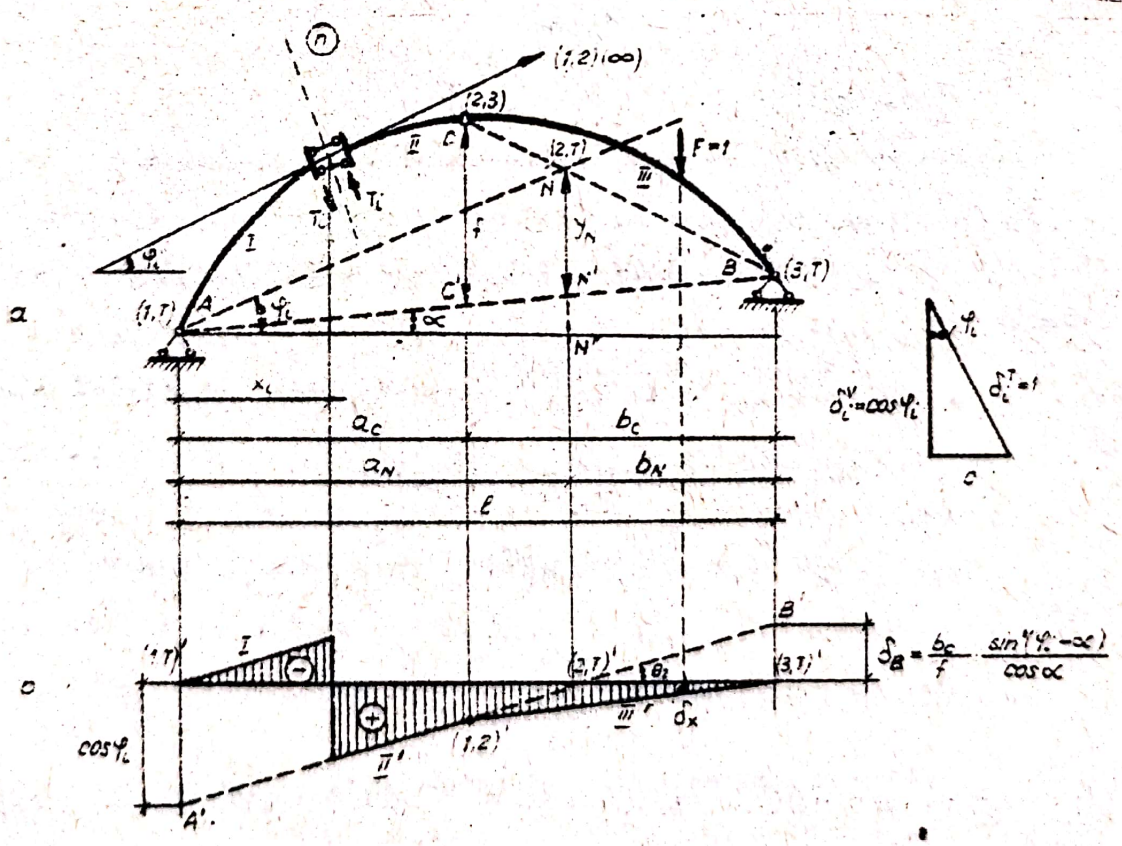


Fig III 17

nător cazului precedent, centrul instantaneu relativ (1,2) găsindu-se de data aceasta la infinit pe direcţia tangentei din secţiunea i. Astfel, (2,T) se găseşte la intersecţia direcţiei (3,T) - (2,3), cu direcţia paralelei la tangentă dusă prin articulaţia A [care reprezintă centrul instantaneu absolut (1,T)]. Centrul instantaneu (2,T) reprezintă <u>punctul neutru al liniei de influenţă a forţei tăietoare</u>.

Trasînd diagrama deplasărilor din fig.III.17.b, scara se determină apoi cu ajutorul relaţiei de echilibru:

$$1 \cdot \delta_x - T_i \left(\delta_1^T + \delta_2^T \right) = 0$$

de unde:

$$T_i = \frac{\delta_x}{\delta_1^T + \delta_2^T} = \frac{\delta_x}{\delta_i^T}$$

deci trebuie să luăm deplasarea relativă δ_i^T pe direcţia normalei unitară, ceea ce revine la a considera deplasarea pe verticală egală cu (fig.III.17.c):

$$\delta_i^V = 1 \cdot \cos \varphi_i = \cos \varphi_i \qquad \text{(III.64)}$$

Determinarea tăieturii δ_B a liniei de influenţă pe verticala articulaţiei B se face astfel:

- din triunghiul (2,T)', (3,T)', B':

$$\delta_B = \theta_2 \, b_N$$

- din triunghiul (1,T)', (2,T)', A':

$$\theta_2 = \frac{\cos \varphi_i}{a_N}$$

deci:

$$\delta_B = \frac{b_N}{a_N} \cos \varphi_i \qquad \text{(III.65.a)}$$

- din triunghiurile ANN" şi AN'N" :

$$y_N = a_N \operatorname{tg}\varphi_i - a_N \operatorname{tg}\alpha = a_N (\operatorname{tg}\varphi_i - \operatorname{tg}\alpha)$$

sau:

$$y_N = a_N \frac{\sin(\varphi_i - \alpha)}{\cos\varphi_i \cos\alpha}$$

- din asemănarea triunghiurilor BNN'şi BCC':

$$\frac{b_N}{y_N} = \frac{b_c}{f}$$

sau, înlocuind pe y_N determinat mai sus:

$$\frac{b_N \cos\varphi_i \cdot \cos\alpha}{a_N \sin(\varphi_i - \alpha)} = \frac{b_c}{f}$$

de unde:

$$\frac{b_N}{a_N} \cos\varphi_i = \frac{b_c}{f} \frac{\sin(\varphi_i - \alpha)}{\cos\alpha} = \delta_B \quad \text{(III.65. b)}$$

adică aceeaşi ordonată care rezultă şi pe cale analitică.

- <u>Linia de influenţă a momentului într-o secţiune oare-care i.</u>

Diagrama deplasărilor mecanismului din fig.III.18.a, este trasată în fig.III.18.b, iar scara liniei de influenţă rezultă din relaţia de echilibru:

$$1 \cdot \delta_x - M_i(\theta_1 + \theta_2) = 0$$

de unde:

$$M_i = \frac{\delta_x}{\theta_1 + \theta_2} = \frac{\delta_x}{\theta_{1,2}}$$

Deci, trebuie să considerăm:

$$\theta_1 + \theta_2 = \theta_{1,2} = 1 \qquad \text{(III.66)}$$

ceea ce revine la a lua la o distanţă orizontală egală cu 1 faţă de proiecţia (1,2)', o ordonată relativă între I'şi II'

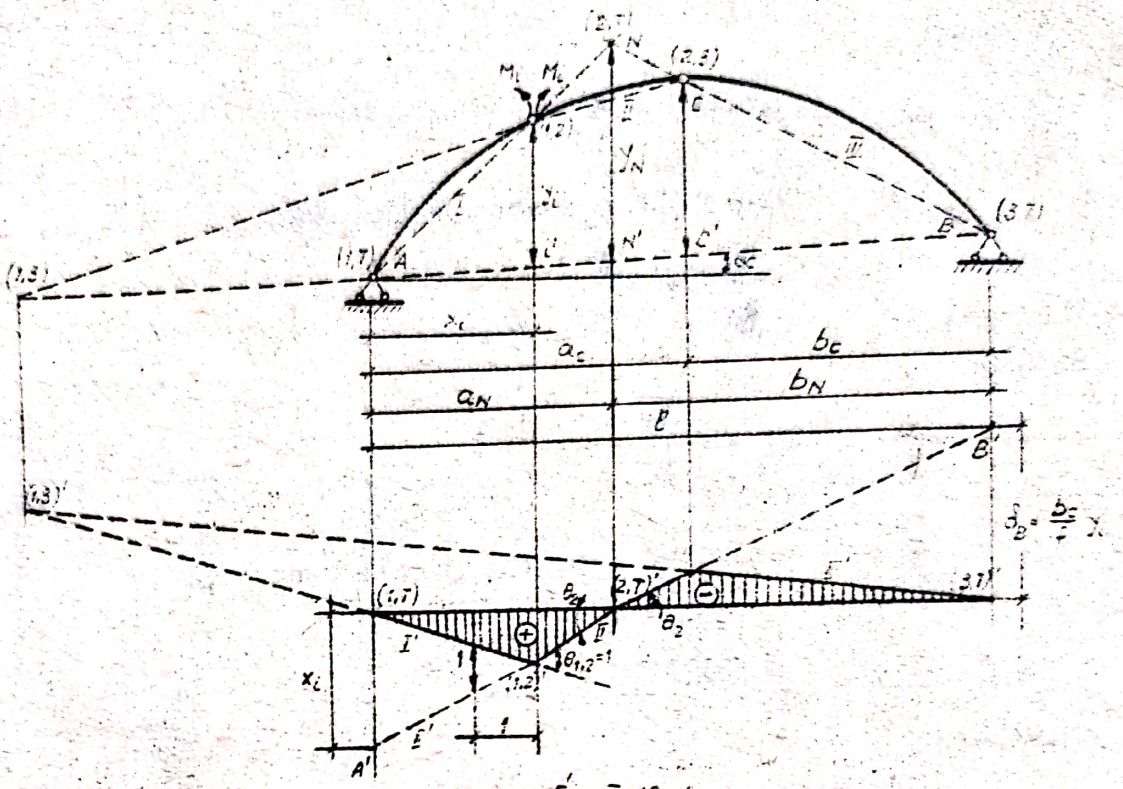


Fig III 18

egală cu 1.

Determinarea tăieturii liniei de influenţă pe verticala articulaţiei B se face astfel:

- din triunghiul (2,T)′, (3,T)′, B′:

$$\delta_B = \theta_2 \cdot b_N$$

- din triunghiul (1,T)′, (2,T)′, A′:

$$\theta_2 = \frac{x_i}{a_N}$$

deci:

$$\delta_B = \frac{x_i\, b_N}{a_N} \qquad \text{(III.67.a)}$$

- din triunghiurile asemenea A i i′ şi ANN′:

$$\frac{x_i}{a_N} = \frac{y_i}{y_N}$$

de unde:

$$y_N = \frac{y_i \cdot a_N}{x_i}$$

- din triunghiurile asemenea BCC'și BNN':

$$\frac{b_c}{b_N} = \frac{f}{y_N}$$

de unde:

$$y_N = \frac{b_N \cdot f}{b_c}$$

- egalînd cele două expresii găsite pentru y_N :

$$\frac{y_i \cdot a_N}{x_i} = \frac{b_N \cdot f}{b_c}$$

rezultă:

$$\frac{x_i \cdot b_N}{a_N} = \frac{b_c}{f} y_i = \delta_B \qquad \text{(III.67.b)}$$

valoare determinată și pe cale analitică.

Observații:

1. Centrul instantaneu absolut de rotație (2,T) reprezintă punctul neutru discutat la procedeul analitic.

2. Atunci cînd secțiunea i este apropiată de nașteri și centrul instantaneu absolut (2,T) ar rezulta mult îndepărtat față de arc, putem trasa linia de influență folosindu-ne de centrul relativ (1,3), care se află la intersecția direcțiilor (1,T) - (3,T) și (1,2) - (2,3) și care rezultă în acest caz mai apropiat de arc.

Știind că dreptele I'și III'se intersectează în dreptul proiecției (1,3)'a acestui centru instantaneu, linia de influență se trasează fără a mai fi nevoie de (2,T), a cărui proiecție (2,T)'rezultă din construcția făcută.

III.2.2.3. Linii de influenţă ale momentelor la limitele sîmburelui central.

Datorită suprapunerii efectelor momentelor încovoietoare şi forţelor axiale, în secţiunile arcelor pot apare distribuţii de eforturi unitare de compresiune şi întindere (fig.III.19).

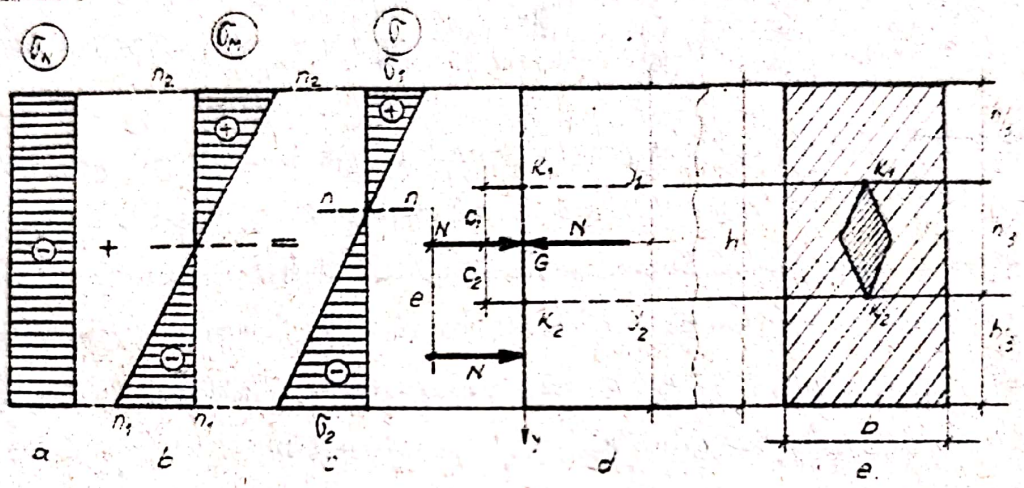


Fig III.19

Efectul simultan al momentului încovoietor M şi forţei axiale N se poate înlocui cu o forţă axială N , aplicată excentric faţă de centrul de greutate al secţiunii (e = M/N).

Este ştiut că atîta timp cît punctul de aplicaţie al acestei forţe excentrice se găseşte în interiorul sîmburelui central, pe secţiune apar numai eforturi unitare de compresiune, condiţie care se cere îndeplinită în anumite cazuri,cînd arcele se realizează din materiale care nu pot prelua decît eforturi mici de întindere.

Studiul calitativ şi cantitativ al stărilor de eforturi secţionale şi respectiv al distribuţiilor de eforturi unitare normale corespunzătoare, se face cu ajutorul liniilor de influenţă ale momentelor încovoietoare la limitele sîmburelui central.

Expresiile eforturilor unitare normale în fibrele extreme ale secţiunii în cazul prezenţei momentului încovoietor şi a forţei axiale, sînt următoarele (cu notaţiile din fig.III.19.d):

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} - \frac{M}{I} y_1 = \frac{N}{A} - \frac{Ne}{I} y_1 = \frac{Ny_1}{I} \left(\frac{I}{Ay_1} - e\right) \quad \text{(III.68.a)}$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y_2 = \frac{N}{A} + \frac{Ne}{I} y_2 = \frac{Ny_2}{I} \left(\frac{I}{Ay_2} + e\right) \quad \text{(III.68.b)}$$

A şi I fiind aria şi respectiv momentul de inerţie al secţiunii.

Cînd forţa excentrică N - echivalentă cu acţiunea concomitentă a momentului încovoietor M şi a forţei axiale N - are punctul de aplicaţie pe conturul sîmburelui central (punctele K_1 şi K_2 din fig.III.19.d), axa neutră este tangentă la conturul secţiunii (poziţiile $n_2 - n_2$ şi respectiv $n_1 - n_1$), deci pe secţiune apar numai eforturi de compresiune.

Astfel:

- pentru N în K_1, deci $e = -c_1$, $\sigma_2 = 0$

adică:

$$\frac{I}{Ay_2} - c_1 = 0 \text{ de unde: } c_1 = \frac{I}{Ay_2} \quad \text{(III.69.a)}$$

- pentru N în K_2, deci $e = c_2$, $\sigma_1 = 0$

adică:

$$\frac{I}{Ay_1} - c_2 = 0 \quad \text{de unde: } c_2 = \frac{I}{Ay_1} \quad \text{(III.69.b)}$$

şi relaţiile (III.68.a) şi (III.68.b) devin:

$$\sigma_1 = \frac{Ny_1}{I} (c_2 - e) \quad \text{(III.70.a)}$$

$$\sigma_2 = \frac{Ny_2}{I} (c_1 + e) \quad \text{(III.70.b)}$$

Făcînd notaţiile:

$$N\,(e + c_1) = Mk_1 \qquad \text{(III.71.a)}$$

$$N\,(e - c_2) = Mk_2 \qquad \text{(III.71.b)}$$

unde Mk_1 şi Mk_2 reprezintă momentele forţei normale N în raport cu limitele k_1 şi respectiv k_2 ale sîmburelui central, se poate scrie:

$$\sigma_1 = \frac{Mk_2}{I} y_1 = - \frac{Mk_2}{W_1} \qquad \text{(III.72.a)}$$

$$\sigma_2 = \frac{Mk_1}{I} y_2 = \frac{Mk_1}{W_2} \qquad \text{(III.72.b)}$$

W_1 şi W_2 reprezentînd modulii de rezistenţă ai secţiunii.

Relaţiile (III.72.a) şi (III.72.b) arată că eforturile unitare σ_1 şi σ_2 produse de o forţă excentrică oarecare N, sînt maxime atunci cînd momentele Mk_2 şi respectiv Mk_1 sînt maxime. Prin urmare, determinarea eforturilor unitare σ_1 şi σ_2 maxime se poate face cu ajutorul momentelor maxime în raport cu punctele K_2 şi respectiv K_1, valorile cărora se stabilesc folosind liniile de influenţă corespunzătoare.

In fig.III.20 sînt trasate aceste linii de influenţă pentru o secţiune oarecare i, cu ajutorul punctelor neutre N_1 şi N_2.

Observaţie: In cazul arcelor pleoştite, secţiunea se poate considera verticală şi atunci limitele K_1 şi K_2 ale sîmburelui central se găsesc pe aceeaşi verticală, trasarea celor două linii de influenţă făcîndu-se ca şi în cazul analizat.

Avînd determinate liniile de influenţă pentru momentele încovoietoare la limitele sîmburelui central, se determină - în funcţie de convoiul de sarcini mobile care se va deplasa pe

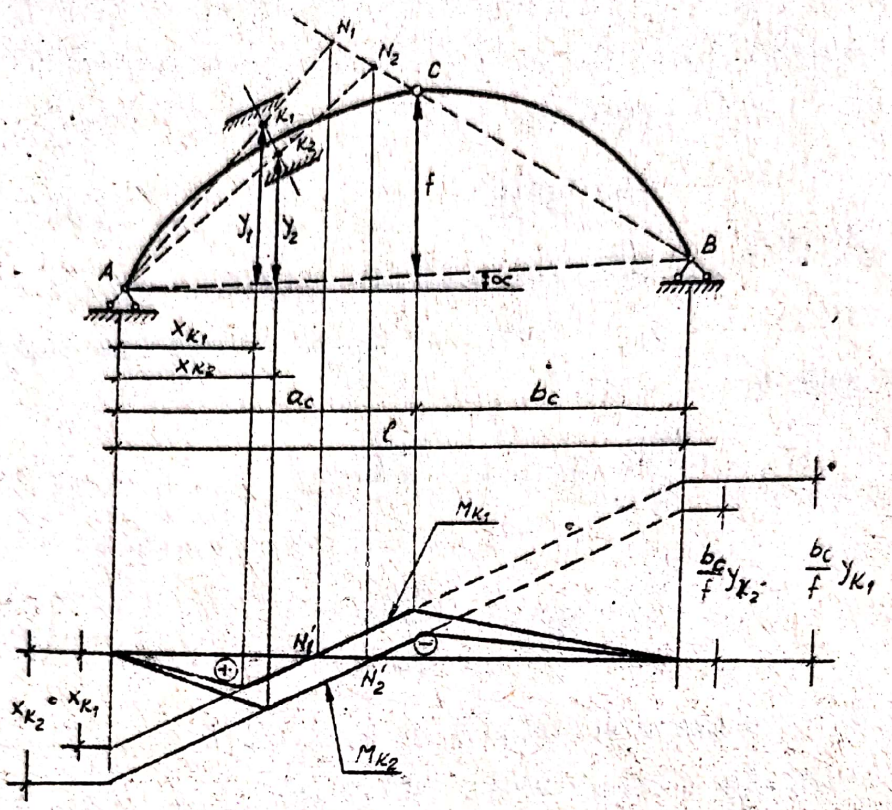


Fig III.20.

arc - momentele Mk_1 şi Mk_2 maxime şi apoi cu relaţiile (III.72. a) şi respectiv (III.72.b) eforturile unitare σ_1 şi σ_2 maxime.

Pentru ca în toate secţiunile arcului să apară numai eforturi unitare de compresiune, este necesar ca pentru orice poziţie a convoiului de sarcini mobile poligonul de presiune corespunzător - ale cărui laturi coincid cu suporturile rezultantelor în secţiunile arcului să se găsească în interiorul domeniului delimitat de sîmburii centrali ai tuturor secţiunilor arcului.

III.3. Arcul cu o articulaţie şi un reazem simplu.

III.3.1. Calculul la sarcini fixe.

III.3.1.1. Rezolvarea pe cale analitică

Această structură lucrează ca un sistem cu împingeri, numai dacă reazemul simplu este înclinat, în caz contrar ($\beta = 0$)

fiind o bară curbă simplu rezemată încărcată cu sarcini cuprinse în planul ei.

a) Determinarea reacţiunilor

Se pot considera ca necunoscute fie V'_A, Z_A şi R_B, fie V'_A, Z_A şi componentele V'_B şi Z_B ale reacţiunii R_B legate între ele prin intermediul unghiului β de înclinare a reazemului simplu (fig.III.21.a), reacţiunile calculîndu-se astfel:

a.1. Considerînd reacţiunile V'_A, Z_A şi R_B:

- Din ecuaţia $\sum M_{(B)} = 0$, rezultă:

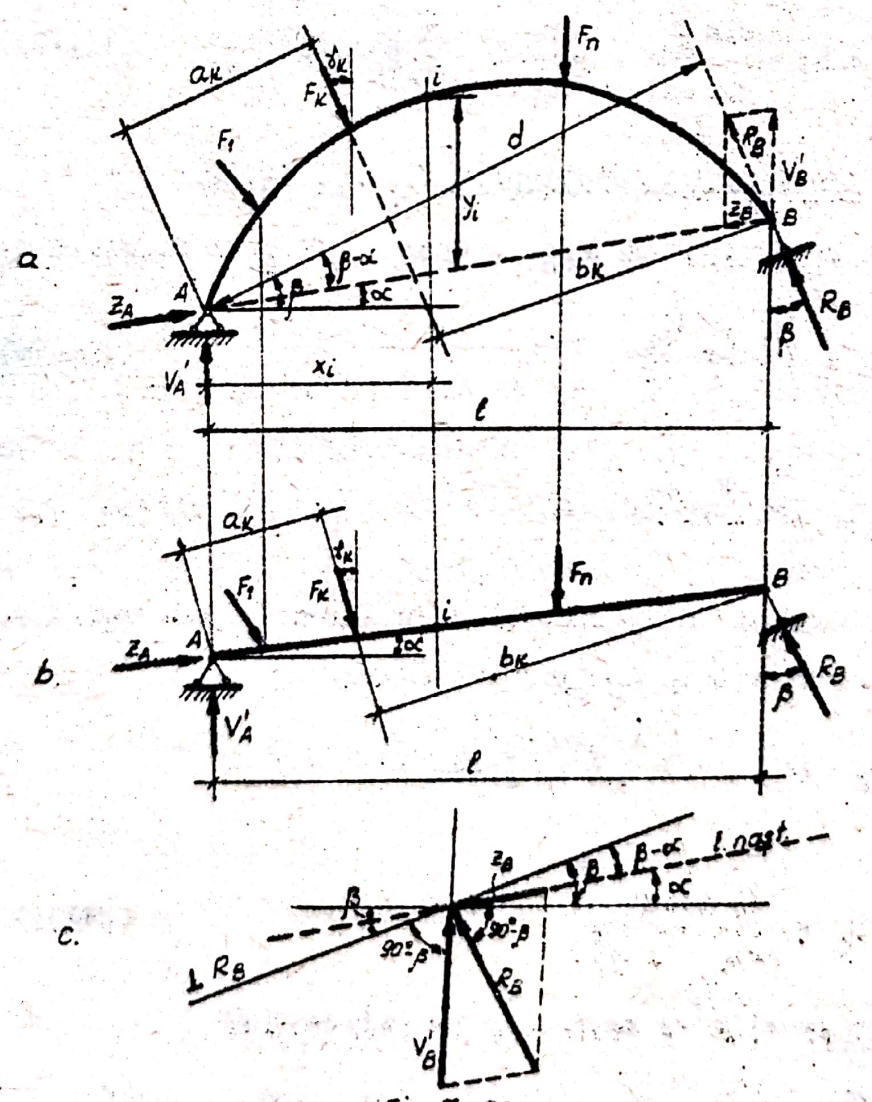


Fig. III.21

$$V'_A = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k b_k}{\ell} \qquad (III.73)$$

- Din ecuaţia $\sum M_{(A)} = 0$, rezultă:

$$R_B = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k a_k}{d} = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k a_k}{\overline{A-B}\cos(\beta-\alpha)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k a_k}{\frac{\ell}{\cos\alpha}\cos(\beta-\alpha)} \qquad (III.74)$$

- Din ecuaţia de proiecţie pe orizontală:

$$Z_A \cos\alpha - R_B \sin\beta + \sum_{k=1}^{n} F_k \sin\gamma_k = 0$$

rezultă:

$$Z_A = R_B \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha} \sum_{k=1}^{n} F_k \sin\gamma_k \qquad (III.75)$$

a.2. Considerînd reacţiunile V'_A, Z_A, V'_B, Z_B:

- Din ecuaţiile $\sum M_{(B)} = 0$ şi $\sum M_{(A)} = 0$, rezultă:

$$V'_A = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k b_k}{\ell} \qquad (III.76)$$

$$V'_B = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k a_k}{\ell} \qquad (III.77)$$

- Din ecuaţia de proiecţie pe o direcţie perpendiculară pe direcţia reacţiunii R_B (fig.III.21.c):

$$Z_B \cos(\beta - \alpha) - V'_B \sin\beta = 0$$

rezultă:

$$Z_B = \frac{V'_B \sin\beta}{\cos(\beta-\alpha)} \qquad (III.78)$$

- Din ecuaţia de proiecţie pe orizontală:

$$Z_A \cos\alpha - Z_B \cdot \cos\alpha + \sum_{k=1}^{n} F_k \sin\gamma_k = 0$$

rezultă:

$$Z_A = Z_B - \frac{1}{\cos \alpha} \sum_{k=1}^{n} F_k \sin \gamma_k \qquad \text{(III.79)}$$

Se observă că reacţiunile arcului cu o articulaţie şi un reazem simplu înclinat, sînt aceleaşi ca şi la grinda dreaptă înclinată cu unghiul α faţă de orizontală şi cu aceleaşi reazeme şi încărcări ca arcul considerat (fig.III.21.b). Deci, reacţiunile acestui tip de arc nu depind de forma sa, ci numai de înclinarea liniei naşterilor şi a reazemului simplu.

Dacă sarcinile sînt toate verticale ($\gamma_k = 0$):

$$Z_A = Z_B = Z = \frac{1}{\cos \alpha} R_B \sin \beta \qquad \text{(III.80.a)}$$

sau:

$$Z \cos \alpha = R_B \sin \beta = H \qquad \text{(III.80.b)}$$

iar pentru $\beta = 0$ rezultă $H = 0$, deci dispare efectul de arc.

b) <u>Determinarea eforturilor</u>.

Eforturile se calculează cu aceleaşi expresii ca la arcul cu trei articulaţii, adică:

- relaţiile (III.20) ÷ (III.22) sau (III.23) ÷ (III.25) în cazul arcului cu naşteri denivelate, încărcat cu sarcini oarecari;

- relaţiile (III.30) ÷ (III.32) sau (III.35) ÷ (III.37) în cazul arcului cu naşteri denivelate, încărcat cu sarcini verticale;

- relaţiile (III.41) ÷ (III.43) în cazul arcului cu naşteri de nivel încărcat cu sarcini verticale.

III.3.1.2. <u>Rezolvarea pe cale grafică</u>

Se vede (fig.III.22) că arcul cu o articulaţie şi un reazem simplu înclinat poate fi considerat un caz particular al arcului cu trei articulaţii, la care este încărcată numai por-

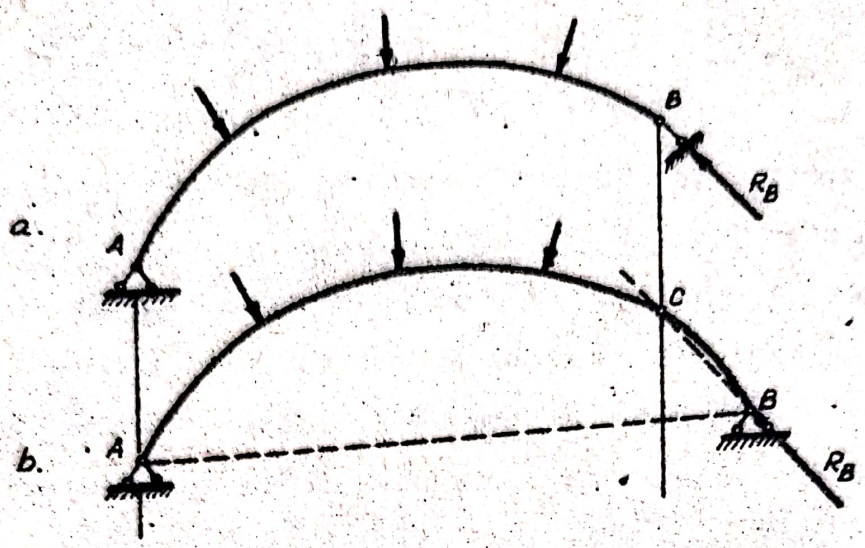


Fig. III. 22.

ţiunea A–C, reacţiunea R_B avînd în acest caz direcţia B–C(din condiţia $M_C = 0$), adică tocmai direcţia reazemului simplu al primului arc.

In consecinţă, determinarea reacţiunilor şi eforturilor pe cale grafică (trasarea poligonului de presiune), se face ca în cazul arcului cu trei articulaţii, pentru situaţia particulară că este încărcată numai porţiunea A–C (sau C–B) a arcului, aşa cum se vede în fig.III.23, care nu mai necesită explicaţia suplimentare. S-a considerat cazul curent al încărcării cu sarcini verticale.

Aşa cum s-a stabilit la arcul cu trei articulaţii, momentele se determină în acest caz cu relaţia:

$$M_i = - H.m_i \qquad \text{(III.47.b)}$$

H fiind distanţa polară (fig.III.23.b), iar m_i segmentele măsurate pe verticală între axa arcului şi poligonul de presiune (fig.III.23.a)

III.3.2. Calculul la sarcini mobile.

Liniile de influenţă, necesare calculului reacţiunilor şi

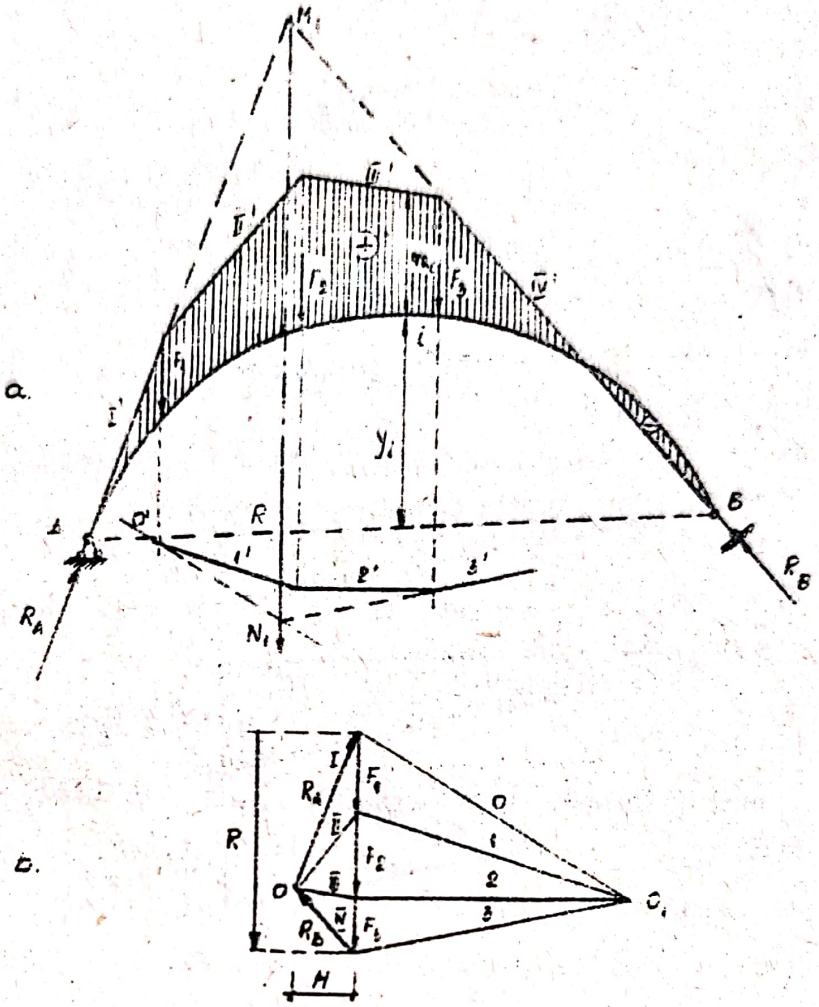


Fig. III. 25.

eforturilor maxime produse de convoaiele de sarcini mobile, se pot determina fie pe cale analitică, fie prin utilizare principiului deplasărilor virtuale (calea cinematică).

III.3.2.1. Determinarea liniilor de influență pe cale analitică

a) Linii de influență ale reacțiunilor.

Ca și la arcul cu trei articulații, liniile de influență se determină cel mai simplu prin exprimarea reacțiunilor arcului în funcție de reacțiunile unei grinzi simplu rezemată de aceeași deschidere.

Astfel:

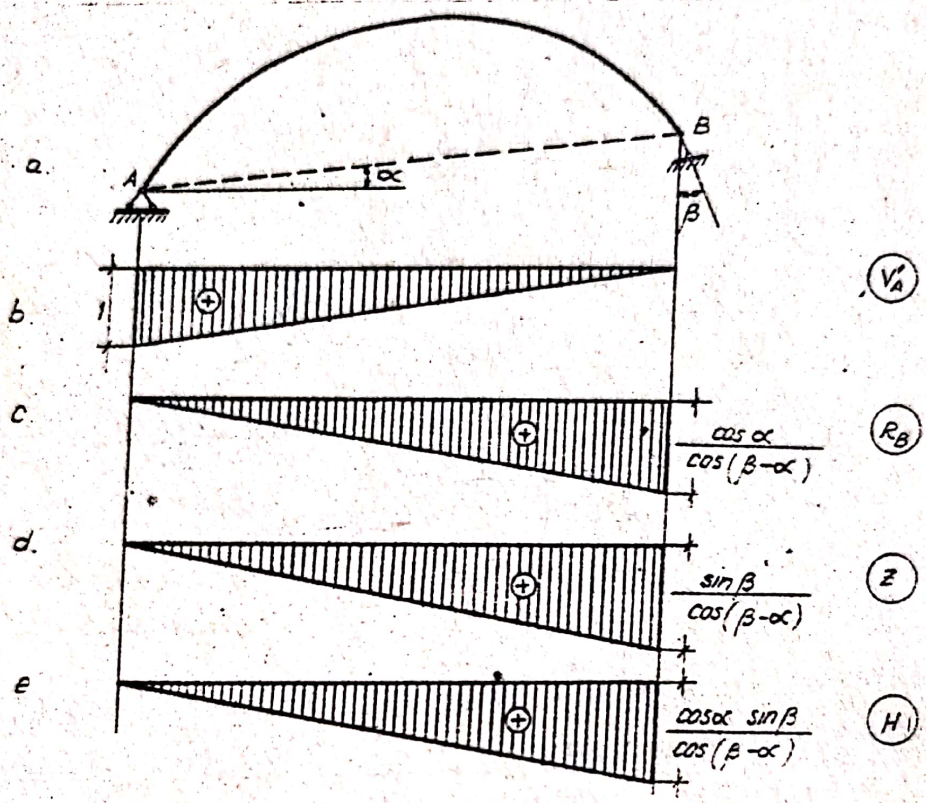


Fig. III. 24

- <u>Linia de influenţă a reacţiunii</u> V'_A se determină ştiind că:

$$V'_A = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k\, b_k}{\ell} = V_A^0 \qquad \text{(III.81)}$$

deci este aceeaşi cu a reacţiunii din A la grinda simplu rezemată (fig.III.24.b)

- <u>Linia de influenţă a reacţiunii</u> R_B se determină ştiind că:

$$R_B = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k\, a_k}{\ell\, \frac{\cos(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}} = V_B^0\, \frac{\cos\alpha}{\cos(\beta-\alpha)} \qquad \text{(III.82)}$$

deci rezultă din linia de influenţă a reacţiunii din B a grinzii simplu rezemate, multiplicată cu $\cos\alpha/\cos(\beta-\alpha)$ (fig.

III.24.c).

- Linia de influenţă a reacţiunilor $Z_A = Z_B = Z$, rezultă pe baza relaţiei (III.80.a):

$$Z_A = Z_B = Z = \frac{1}{\cos \alpha} R_B \sin \beta = V_B^0 \frac{\sin \beta}{\cos(\beta - \alpha)} \quad \text{(III.83)}$$

şi este trasată în fig.III.24.d.

- Linia de influenţă a componentelor H ale reacţiunilor, rezultă pe baza relaţiei (III.80.b):

$$H = R_B \sin \beta = V_B^0 \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos(\beta - \alpha)} \quad \text{(III.84)}$$

şi este trasată în fig.III.24.e.

b) Linii de influenţă ale eforturilor.

Aceste linii de influenţă se trasează prin suprapunerea unor linii de influenţă cunoscute, multiplicate cu anumiţi coeficienţi, pe baza relaţiilor de determinare a eforturilor deduse la arcul cu trei articulaţii şi valabile şi pentru arcul cu o articulaţie şi un reazem simplu.

- Linia de influenţă a forţei axiale dintr-o secţiune oarecare i, rezultă pe baza relaţiei:

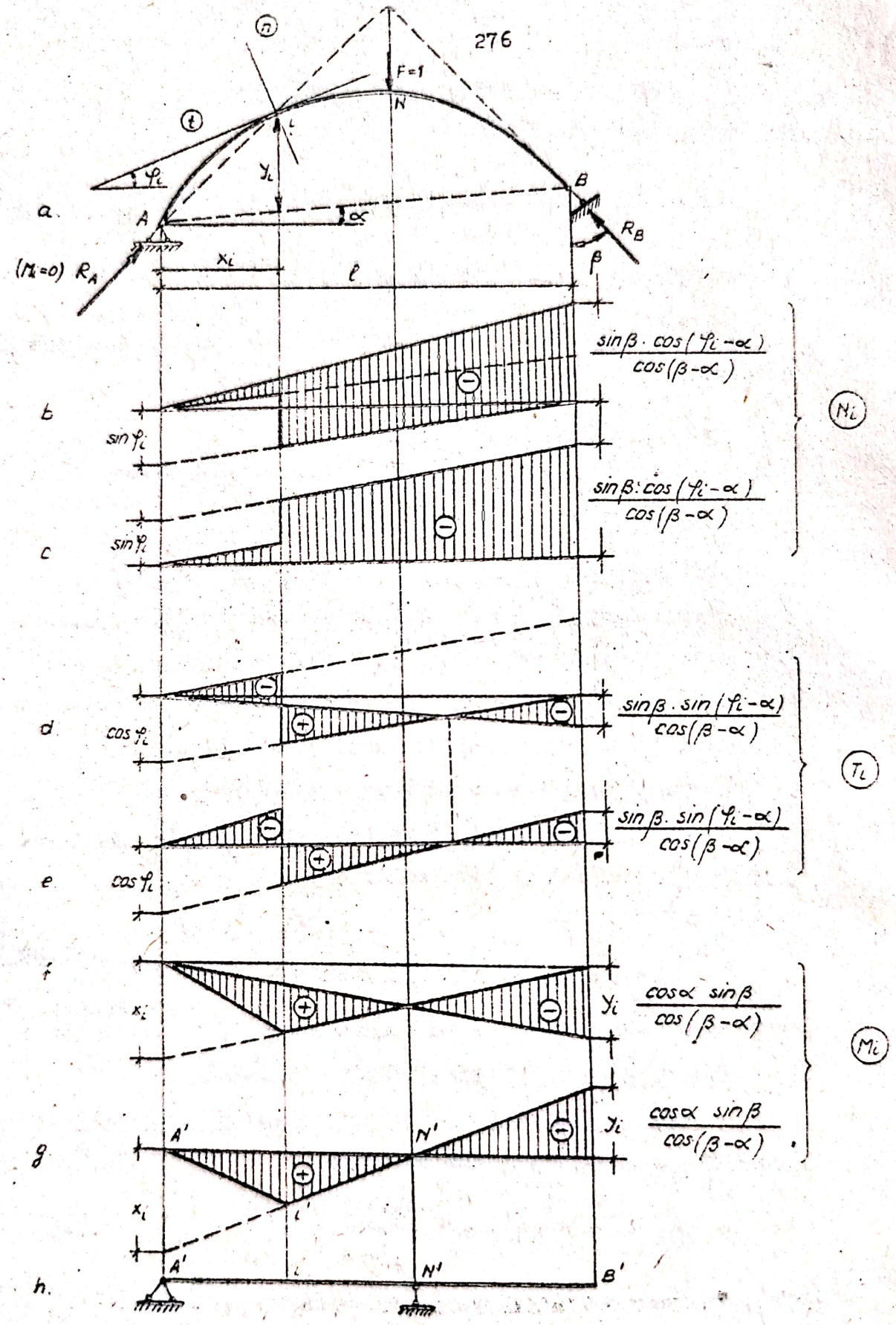
$$N_i = - T_i^0 \sin \varphi_i - H \frac{\cos(\varphi_i - \alpha)}{\cos \alpha} \quad \text{(III.85)}$$

suprapunînd deci linia de influenţă T_i^0 şi H, multiplicate cu coeficienţii respectivi (fig.III.25.b şi c).

- Linia de influenţă a forţei tăietoare dintr-o secţiune oarecare i, rezultă pe baza relaţiei:

$$T_i = T_i^0 \cos \varphi_i - H \frac{\sin(\varphi_i - \alpha)}{\cos \alpha} \quad \text{(III.86}$$

Deci, se suprapun liniile de influenţă T_i^0 şi H multiplicate cu



n
t
F=1
N
i
y_i
φ_i
a.
A
B
α
R_B
β
$(M_i=0)$ R_A
x_i
ℓ
b
$\sin\varphi_i$
$\frac{\sin\beta \cdot \cos(\varphi_i-\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)}$
c
$\sin\varphi_i$
$\frac{\sin\beta \cdot \cos(\varphi_i-\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)}$
N_i
d
$\cos\varphi_i$
$\frac{\sin\beta \cdot \sin(\varphi_i-\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)}$
e
$\cos\varphi_i$
$\frac{\sin\beta \cdot \sin(\varphi_i-\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)}$
T_i
f
x_i
y_i
$\frac{\cos\alpha \sin\beta}{\cos(\beta-\alpha)}$
g
A'
N'
y_i
$\frac{\cos\alpha \sin\beta}{\cos(\beta-\alpha)}$
M_i
x_i
i'
h.
A'
i
N'
B'

Fig. III. 25

coeficienţii respectivi (fig.III.25.d şi e).

- Linia de influenţă a momentului dintr-o secţiune oare-care i, se trasează pe baza relaţiei:

$$M_i = M_i^0 - H\, y_i \qquad (III.37)$$

suprapunînd deci liniile de influenţă M_i^0 şi H multiplicată cu y_i (fig.III.25.f şi g).

Există şi în acest caz un punct neutru N, cu aceeaşi semnificaţie ca la arcul cu trei articulaţii, poziţia sa determinîndu-se prin intersecţia direcţiei reacţiunii R_B (direcţia reazemului simplu) cu direcţia reacţiunii R_A, care este - pentru F = 1 în punctul neutru - direcţia A-i.

Cunoscînd punctul neutru N, linia de influenţă a momentului încovoietor M_i se determină ducînd prin proiecţia N'a punctului neutru o dreaptă cu tăietura x_i pe verticala articulaţiei A şi unind apoi proiecţia i'a secţiunii pe această dreaptă, cu proiecţia A'a articulaţiei A pe linia de referinţă.

Observaţii: 1. Dacă reazemul simplu este vertical, punctul neutru se găseşte pe verticala reazemului B şi se obţine linia de influenţă a momentului încovoietor din secţiunea i a unei grinzi simplu rezemate (dispare efectul de arc).

2. Linia de influenţă a momentului încovoietor M_i este aceeaşi ca pentru momentul din secţiunea i a grinzii "de înlocuire" din fig.III.25.h.

III.3.2.2. Determinarea liniilor de influenţă pe cale cinematică.

Se foloseşte procedeul general, utilizat şi la structurile analizate anterior. Aici se va exemplifica procedeul numai pentru o reacţiune şi un efort.

a) Linia de influenţă a reacţiunii Z.

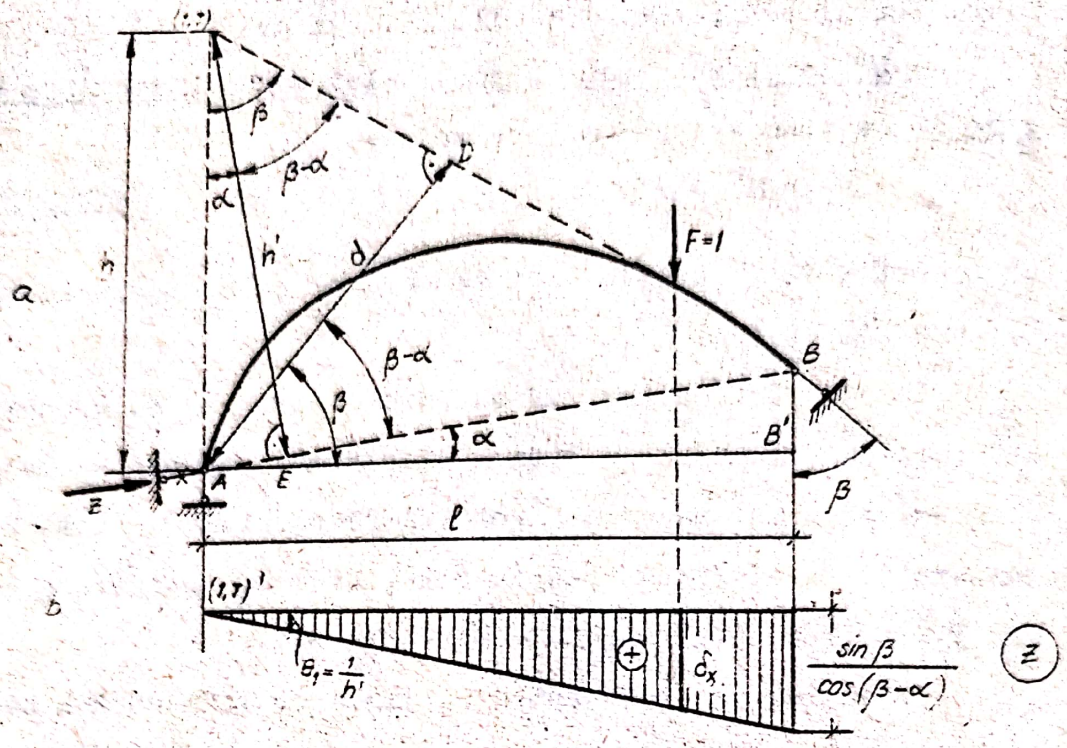


Fig III 26

Suprimînd legătura corespunzătoare acestei reacţiunii, se determină centrul instantaneu absolut (1,T) la intersecţie reazemelor simple rămase şi se trasează diagrama deplasărilor pe verticală din fig.III.26.b.

Din ecuaţia de echilibru scrisă prin lucru mecanic virtual:

$$1 \cdot \delta_x - Z \cdot \delta_z = 0$$

rezultă:

$$Z = \frac{\delta_x}{\delta_z}$$

deci trebuie să luăm $\delta_z = 1$, car este o deplasare pe direcţia liniei naşterilor. Această deplasare se poate scrie:

$$\delta_z = \Theta_1 h' = 1$$

ceea ce înseamnă că scara liniei de influenţă se poate determina dacă se consideră:

$$\theta_1 = \frac{1}{h'} \qquad \text{(III.85.a)}$$

Din fig.III.26.a se vede că:

$h' = h \cdot \cos \alpha$ (din triunghiul (1,T) - A-E)

$$h = \frac{d}{\sin \beta} \quad \text{(din triunghiul (1,T) - A-D)}$$

deci:
$$h' = d \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \qquad \text{(III.86)}$$

Pe de altă parte:

$$d = \overline{A-B} \cdot \cos(\beta - \alpha) = \frac{\ell}{\cos \alpha} \cos(\beta - \alpha)$$ (din triunghiurile ADB şi respectiv ABB').

Inlocuind în (III.86):

$$h' = \ell \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin \beta} \qquad \text{(III.85.b)}$$

Tăietura liniei de influenţă pe verticala reazemului B, este:

$$\theta_1 \cdot \ell = \frac{\sin \beta}{\cos(\beta - \alpha)} \qquad \text{(III.87)}$$

regăsind astfel ordonata dedusă pe cale analitică.

b) <u>Linia de influenţă a momentului dintr-o secţiune oarecare i</u>.

Introducînd în secţiune o articulaţie şi perechea de momente M_i, se obţine mecanismul pentru deplasări virtuale din fig.III.27.a, pentru care rezultă diagrama deplasărilor pe verticală din fig.III.27.b.

Pentru determinarea scării, se foloseşte relaţia de lucru mecanic virtual:

$$1 \cdot \delta_x - M_i (\theta_1 + \theta_2) = 0$$

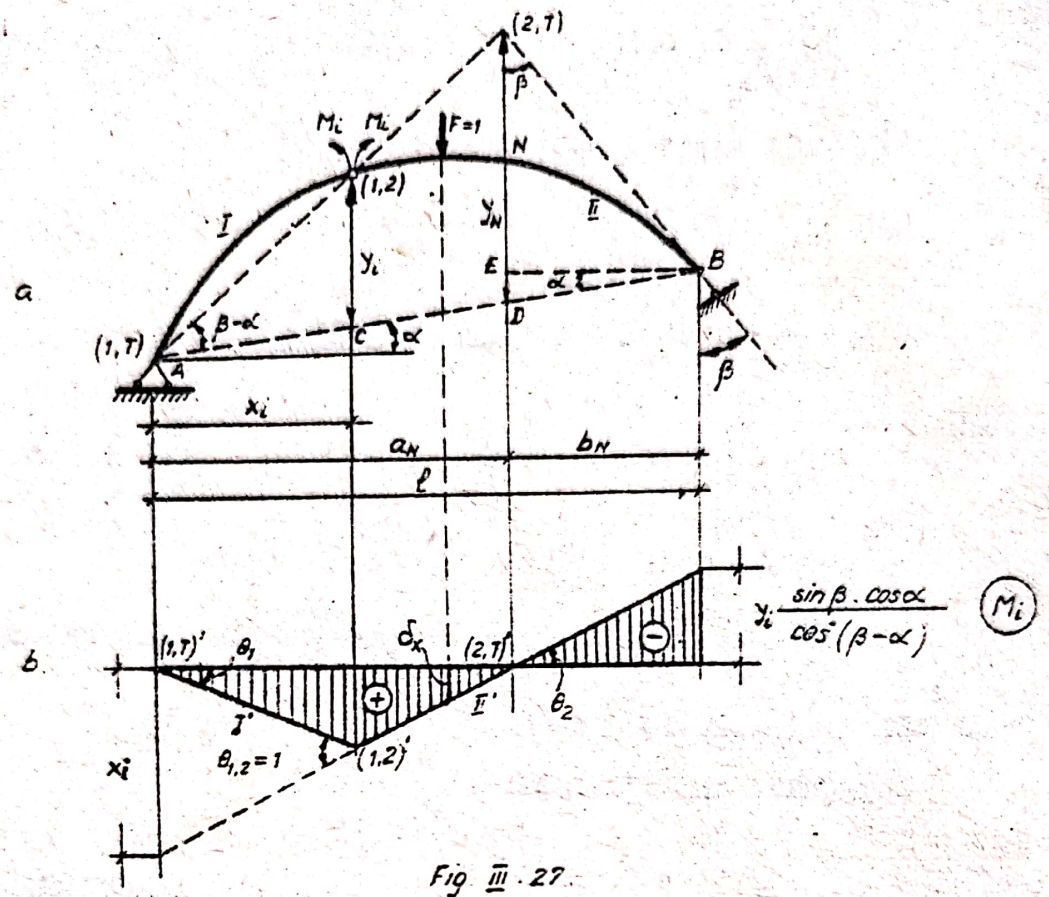


Fig. III.27

din care:

$$M_1 = \frac{\delta_x}{\theta_1 + \theta_2}$$

deci trebuie să luăm:

$$\theta_1 + \theta_2 = \theta_{1,2} = 1 \qquad \text{(III.88)}$$

În acest fel, tăietura ramurii de dreapta a liniei de influență pe verticala reazemului A rezultă egală cu x_i

Tăietura liniei de influență pe verticala reazemului B, se determină astfel:

$$\delta_B = b_N \cdot \theta_2 = b_N \cdot \frac{x_i}{a_N} \qquad \text{(III.88.a)}$$

- din triunghiurile asemenea A-(1,2) - c și A-(2,T) - D:

$$\frac{x_i}{a_N} = \frac{y_i}{y_N}$$

deci:

$$\delta_B = b_N \frac{y_i}{y_N} \qquad \text{(III.88.b)}$$

- din triunghiurile (2,T) - B-E şi BED se poate scrie:

$$y_N = b_N \operatorname{ctg}\beta + b_N \operatorname{tg}\alpha = b_N(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{tg}\alpha)$$

sau:

$$y_N = b_N\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = b_N \frac{\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha}{\sin\beta \cdot \cos\alpha} =$$

$$= b_N \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin\beta \cdot \cos\alpha}$$

- înlocuind pe y_N în relaţia (III.88.b):

$$\delta_B = y_i \frac{\sin\beta \cdot \cos\alpha}{\cos(\beta - \alpha)} \qquad \text{(III.88.c)}$$

valoare dedusă şi în procedeul analitic.

Liniile de influenţă pentru celelalte reacţiuni şi eforturi se determină pe baza aceluiaşi principiu general.

III.4. Arce cu tirant.

III.4.1. Calculul la sarcini fixe.

Aşa cum s-a mai precizat, arcele cu tirant se utilizează atunci cînd se urmăreşte evitarea transmiterii unor împingeri mari asupra elementelor de rezemare şi din acest motiv reazemul simplu se realizează de obicei vertical (fig.III.28)

a) Determinarea reacţiunilor.

Forţele de legătură care apar în acest caz, sînt:

a.1. Dacă se lucrează cu grupul de reacţiuni (V; Z):

- reacţiunile verticale din A şi B:

$$V'_A = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot b_k}{\ell} \qquad \text{(III.89)}$$

$$V'_B = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \, a_k}{\ell} \qquad \text{(III.90)}$$

- efortul Z_t din tirant, care se determină din condiţia de moment nul în articulaţia c:

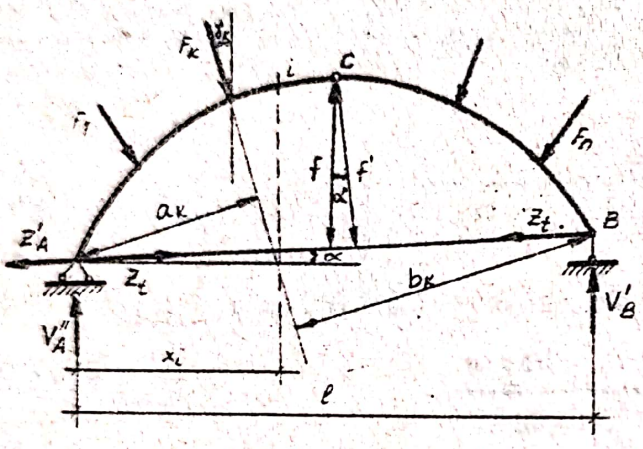


Fig. III 28

$$Z_t = \frac{M_C^{dr'}}{f'} \qquad \text{(III.91)}$$

- împingerea Z'_A din articulaţia A, care este egală cu diferenţa dintre efortul din tirant şi reacţiunea Z_A după direcţia liniei naşterilor de la arcul cu trei articulaţii:

$$Z'_A = Z_t - Z_A \qquad \text{(III.92)}$$

a.2. Dacă se lucrează cu grupul de componente orizontală şi verticală pentru reacţiunea din A:

$$H'_A = (Z_t - Z_A)\cos\alpha \qquad \text{(III.93)}$$

iar reacţiunea verticală din A este corectată şi ea datorită efortului din tirant:

$$V''_A = V'_A - (Z_t - Z_A)\sin\alpha \qquad \text{(III.94)}$$

b) <u>Determinarea eforturilor.</u>

Intrucît prin introducerea tirantului reacţiunile totale din A şi B nu se modifică (ele sînt numai preluate diferit - parţial de tirant şi parţial de reazemele exterioare ale arcu-

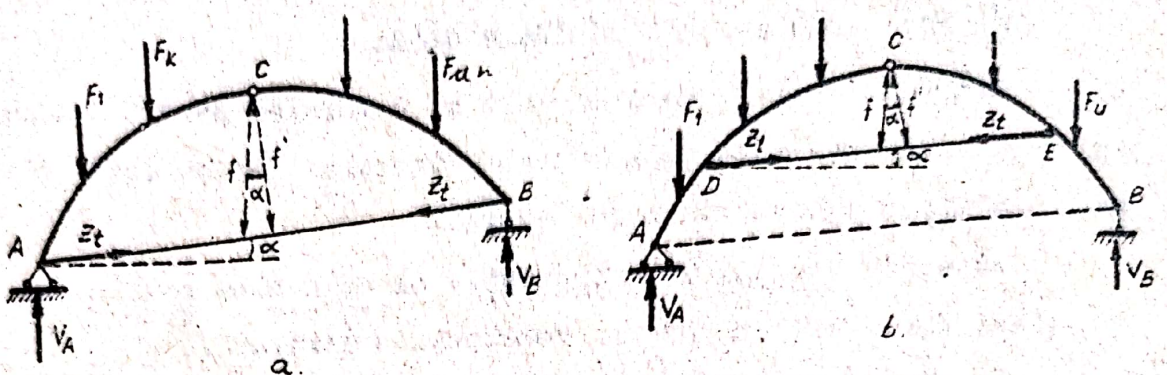


Fig III 29

lui), eforturile sînt aceleaşi ca la arcul cu trei articulaţii şi se calculează deci cu relaţiile (III.20) (III.22).

In cazul particular al încărcării cu sarcini verticale (fig.III.29.a) $Z_t = Z_A$ deci reacţiunea Z'_A devine zero, adică arcul nu transmite împingeri asupra elementelor de rezemare.

In acest caz, reacţiunile verticale se calculează ca la o grindă simplu rezemată, iar efortul din tirant se determină cu relaţia:

$$Z_t = \frac{M_C^0}{f'} \qquad \text{(III.95)}$$

Dacă tirantul este supraînălţat (fig.III.29.b), reacţiunile din A şi B se determină ca la arcul cu o articulaţie şi un reazem simplu (cu reazemul simplu înclinat sau vertical), iar efortul din tirant se determină din condiţia de moment nul în articulaţia c:

$$Z_t = \frac{M_C^{st(dr)}}{f'} \qquad \text{(III.96)}$$

Efortul din tirant intervine numai în expresia eforturilor de pe porţiunea D-C-E.

III.4.2. Calculul la sarcini mobile.

Intrucît liniile de influenţă se determină pentru acţiunea unei încărcări unitare verticale, trasarea lor se face-pe cale analitică sau cinematică- astfel:

a) ca la arcul cu o articulaţie şi cu reazem simplu (vertical sau înclinat) pentru reacţiunile verticale;

b) ca la arcul cu trei articulaţii pentru împingere şi eforturi secţionale.

III.5. Arce cu console şi articulaţii

Sînt sisteme alcătuite din arce static determinate şi eventual grinzi drepte, legate între ele prin articulaţii, după aceleaşi principii ca la grinzile Gerber.

III.5.1. Calculul la sarcini fixe.

Se face de obicei prin descompunerea în sisteme simple principale şi secundare şi rezolvarea:

- sistemelor secundare încărcate cu sarcinile care le revin direct;

- sistemelor principale încărcate cu sarcinile care le revin direct şi acţiunile transmise de sistemele secundare (reacţiunile acestora luate cu semne schimbate).

In fig.III.30 este prezentat un exemplu de astfel de

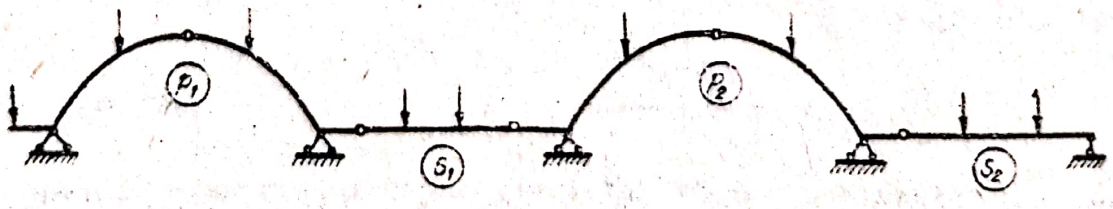


Fig. III.30

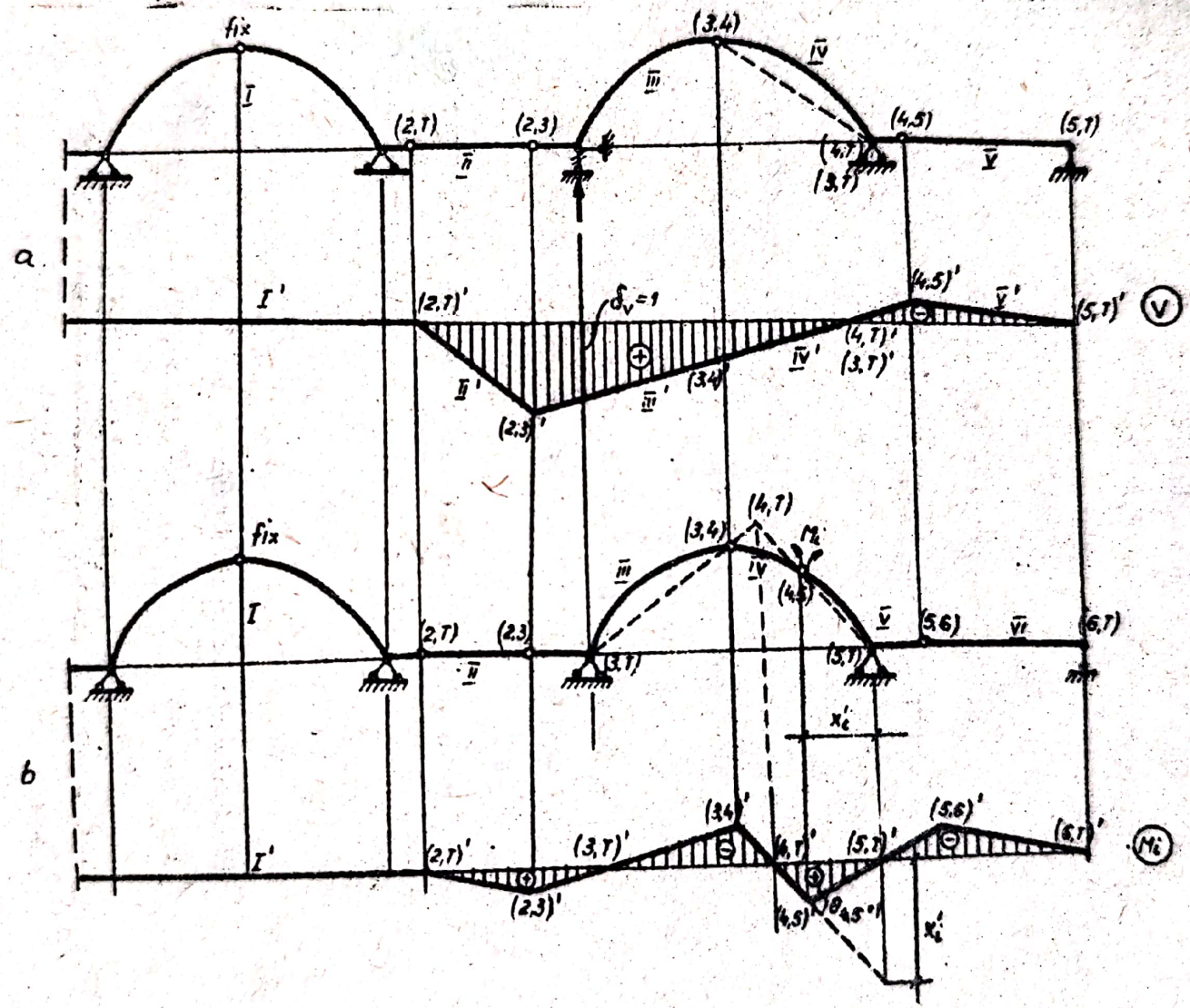

a
b
fix
I
I'
(2,T)
(2,3)
(3,4)
(4,5)
(5,T)
(4,T)
(3,T)
(2,T)'
(2,3)'
(3,4)'
(4,5)'
(4,T)'
(3,T)'
(5,T)'
$\delta_V = 1$
V
(5,6)
(6,T)
(5,T)'
(6,T)'
M_i
x_i'
$\theta_{4,5} = 1$

Fig. III. 31

structură, alcătuită din două arce cu trei articulații - sisteme principale și două grinzi simplu rezemate - sisteme secundare.

III.5.2. Calculul la sarcini mobile.

Se efectuează cu ajutorul liniilor de influență care - ca și la grinzile Gerber - se trasează cel mai ușor pe cale cinematică.

In fig.III.31.a și b sînt trasate liniile de influență pentru o reacțiune verticală și momentul încovoietor dintr-o secțiune i la sistemul din fig.III.30.

Aplicații.

In încheierea acestui capitol se prezintă cîteva exemple de calcul, necesare înțelegerii anumitor probleme legate direct de proiectarea arcelor.

1. Determinarea diagramelor de eforturi pentru arcul cu axa parabolică din fig.III.32.a (exemplul este reprodus din lucrarea [5]).

Ecuația axei arcului în sistemul de axe de coordonate xAy este:

$$y = \frac{4f}{\ell^2} x(\ell - x)$$

a) Determinarea reacțiunilor

Din ecuația $\sum M_{(B)} = 0$, rezultă:

$$V_A = \frac{\sum F_k b_k}{\ell} = \frac{2 \times 12(6 + 12) + 8 \times 6}{24} = 20 \text{ tf}$$

Din ecuația $\sum M_{(A)} = 0$ rezultă:

$$V_A = \frac{\sum F_k a_k}{\ell} = \frac{2 \times 12 \times 6 + 8(6 + 12)}{24} = 12 \text{ tf}$$

Din ecuația $\sum X = 0$ se obține $H_A = H_B = H$, iar din

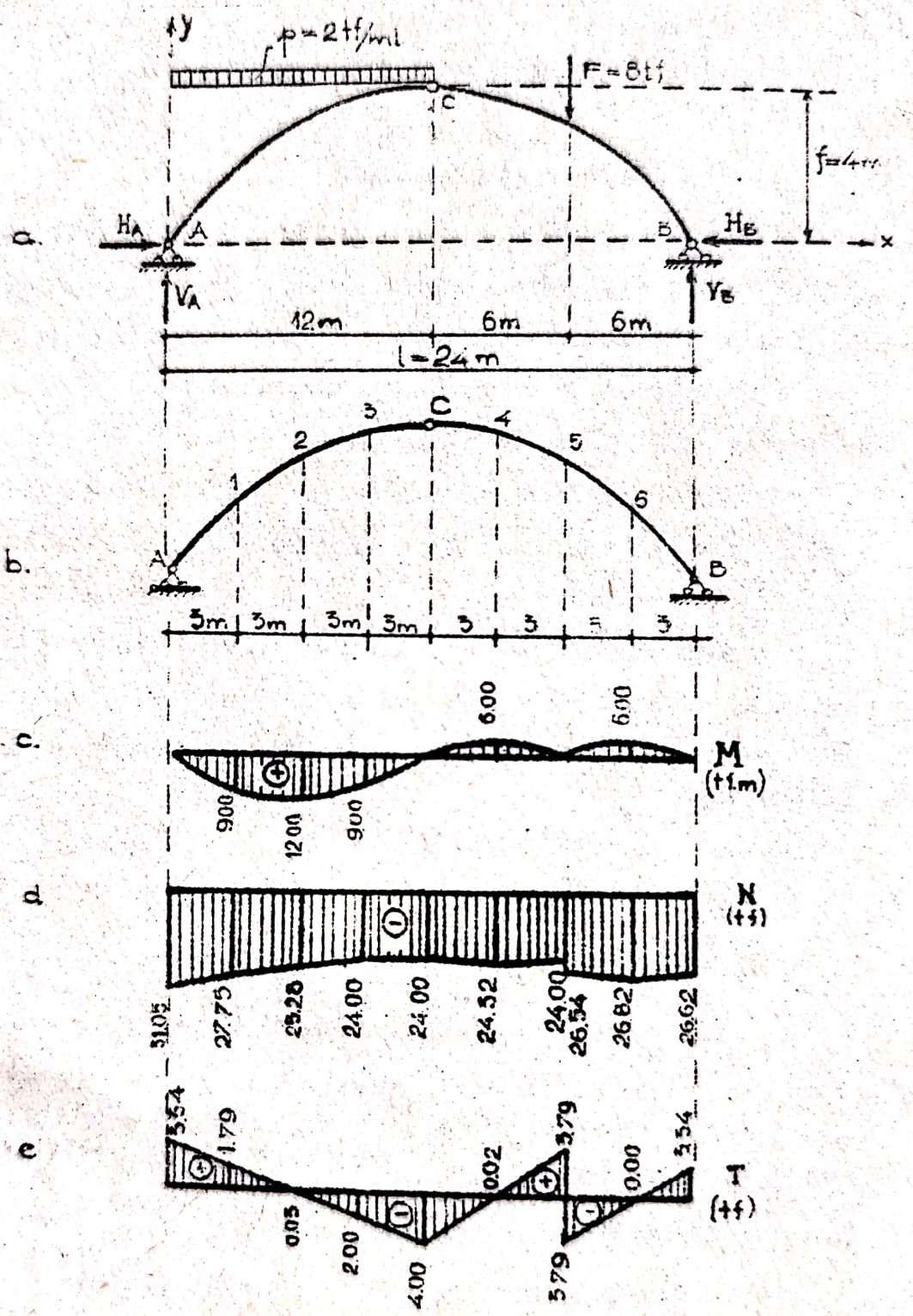

a.
y
p=2tf/ml
F=8tf
C
f=4m
HA
A
B
HB
x
VA
VB
12m
6m
6m
l=24m
b.
1
2
3
C
4
5
6
A
B
3m
3m
3m
3m
c.
6.00
6.00
M
(tf.m)
9.00
12.00
9.00
d
N
(tf)
31.05
27.75
25.25
24.00
24.00
24.32
24.00
26.54
26.82
26.62
e
3.54
1.79
0.02
3.79
0.00
3.54
T
(tf)
0.05
2.00
4.00
3.79

Fig. III-32

relaţia $M_C^{o(st)} = 0$ rezultă:

$$H = \frac{M_C^{o(st)}}{f} = \frac{20 \times 12 - 2 \times 12 \times 6}{4} = 24 \text{ tf}$$

b) Determinarea eforturilor.

Aşa cum s-a mai precizat, se vor calcula eforturile într-un număr finit de secţiuni ale arcului şi pentru aceasta se împarte arcul într-un număr de 6 segmente numite bolţari, urmînd ca eforturile să se calculeze în secţiunile care separă bolţarii, adică în A, 1, 2, 3, C, 4, 5, 6 şi B. Pentru uşurinţa calculului, se face împărţirea nu în bolţari de lungimi egale, ci în bolţari ale căror proiecţii pe orizontală sînt egale (în acest caz 3 m).

Expresiile eforturilor dintr-o secţiune curentă a arcului, pentru cazul particular al arcului cu naşteri de nivel şi încărcat cu sarcini verticale sînt date de relaţiile (III.41) ÷ (III.43):

$$N_i = -T_i^o \sin \varphi_i - H \cos \varphi_i$$

$$T_i = T_i^o \cos \varphi_i - H \sin \varphi_i$$

$$M_i = M_i^o - H \, y_i$$

Determinarea caracteristicilor necesare calculului eforturilor în secţiunile stabilite, se face astfel:

- ordonatele y_i - folosind ecuaţia axei arcului

$$y_A = y_B = 0$$

$$y_1 = y_6 = \frac{4 \times 4}{24^2} \cdot 3 \, (24-3) = 1{,}75 \text{ m}$$

$$y_2 = y_5 = \frac{4 \times 4}{24^2} \cdot 6\,(24-6) = 3{,}00 \text{ m}$$

$$y_3 = y_4 = \frac{4 \times 4}{24^2} \cdot 9\,(24-9) = 3{,}75 \text{ m}$$

$$y_C = f = 4 \text{ m}$$

- valorile funcţiilor sin φ_i şi cos φ_i folosind tangenta unghiului φ_i care rezultă din derivata funcţiei parabolice a axei arcului:

$$y' = \operatorname{tg} \varphi_i = \frac{4f}{\ell^2} (\ell - 2x)$$

deci:

$$\operatorname{tg} \varphi_A = y'_{(A)} = \frac{4 \times 4}{24^2} (24-0) = 0{,}668$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = y'_{(1)} = \frac{4 \times 4}{24^2} (24-2 \times 3) = 0{,}500$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = y'_{(2)} = \frac{4 \times 4}{24^2} (24-2 \times 6) = 0{,}334$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = y'_{(3)} = \frac{4 \times 4}{24^2} (24-2 \times 9) = 0{,}167$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = y'_{(C)} = \frac{4 \times 4}{24^2} (24-2 \times 12) = 0$$

şi aşa mai departe, după care se stabilesc valorile sin φ_i şi cos φ_i .

Toate caracteristicile calculate sînt centralizate în tabelul III.1.

Eforturile în secţiunile stabilite, se calculează astfel:

- <u>Secţiunea A</u>

$N_A = - T_A^0 \sin \varphi_A - H \cos \varphi_A = - 20 \times 0{,}554 - 24 \times 0{,}832 = - 31{,}05$ tf

$T_A = T_A^0 \cos \varphi_A - H \sin \varphi_A = 20 \times 0{,}832 - 24 \times 0{,}554 = 3{,}34$ tf

Tabel III.1

Sectiune	x_i (m)	y_i (m)	tg φ_i	sin φ_i	cos φ_i
A	0.00	0.00	0.668	0.554	0.832
1	3.00	1.75	0.500	0.447	0.894
2	6.00	3.00	0.334	0.316	0.948
3	9.00	3.75	0.167	0.165	0.986
C	12.00	4.00	0.00	0.00	1.00
4	15.00	3.75	- 0.167	- 0.165	0.986
5	18.00	3.00	- 0.334	- 0.316	0.948
6	21.00	1.75	- 0.500	- 0.447	0. 894
B	24.00	0.00	- 0.668	- 0.554	0. 832

$M_A = M_A^0 - H\ y_A = 0$

- Sectiunea 1.

$N_1 = - T_1^0 \sin \varphi_1 - H \cos \varphi_1 = -(20-2x3)x0,447-24x0,894 = -27,71$ tf

$T_1 = T_1^0 \cos \varphi_1 - H \sin \varphi_1 = (20-2x3)x0,894-24x0,447 = 1,79$ tf

$M_1 = M_1^0 - H\ y_1 = (20x3 - \frac{2x3^2}{2}) - 24 \times 1,75 = 9,00$ tf m

- Sectiunea 2.

$N_2 = - T_2^0 \sin \varphi_2 - H \cos \varphi_2 = - (20-2x6)x0,316-24x0,948 = - 25,28$ tf

$T_2 = T_2^0 \cos \varphi_2 - H \sin \varphi_2 = (20-2x6)x0,948-24x\ 0,316 = - 0,03$ tf

$M_2 = M_2^0 - H\ y_2 = (20 \times 6 - \frac{2 \times 6^2}{2}) - 24 \times 3,00 = 12,00$ tf m

- Sectiunea 3.

$N_3 = - T_3^0 \sin \varphi_3 - H \cos \varphi_3 = -(20-2x9)x0,165-24x0,986 = - 24,00$ tf

$T_3 = T_3^0 \cos\varphi_3 - H\sin\varphi_3 = (20-2x9)x0,986-24x0,165 = -2,00$ tf

$M_3 = M_3^0 - H\ y_3 = (20x9 - \frac{2 \times 9^2}{2}) - \overline{84} \times 3,75 = 9,00$ tf m

- Secţiunea C.

$N_C = -H = -24,00$ tf (proiecţie pe orizontală)

$T_C = T_C^0 = 20-2 \times 12 = -4,00$ tf (proiecţie pe verticală)

$M_C = 0$ (articulaţie), şi aşa mai departe, rezultînd valorile centralizate în tabelul III.2.

Diagramele de eforturi M, N, T sînt prezentate în fig. III.32.c, d, e. Diagrama de momente are variaţia parabolică (datorită variaţiei parabolice a ordonatelor y_i), iar pentru forţa axială şi forţa tăietoare se face aproximarea cu o variaţie liniară.

2. Determinarea axei raţionale pentru eforturi de arcul încărcat cu o sarcină uniform distribuită (fig.III.33).

Tabel III.2

Secţiune	N (tf)		T (tf)		M (tfm)
A	-31.05		3.34		0.00
1	-27.71		1.79		9.00
2	-25.28		-0.03		12.00
3	-24.00		-2.00		9.00
C	-24.00		-4.00		0.00
4	-24.32		0.02		-6.00
5	st.	-24.02	st.	3.79	0.00
	dr.	-26.54	dr.	-3.79	
6	-26.82		0.00		-6.00
B	-26.62		3.34		0.00

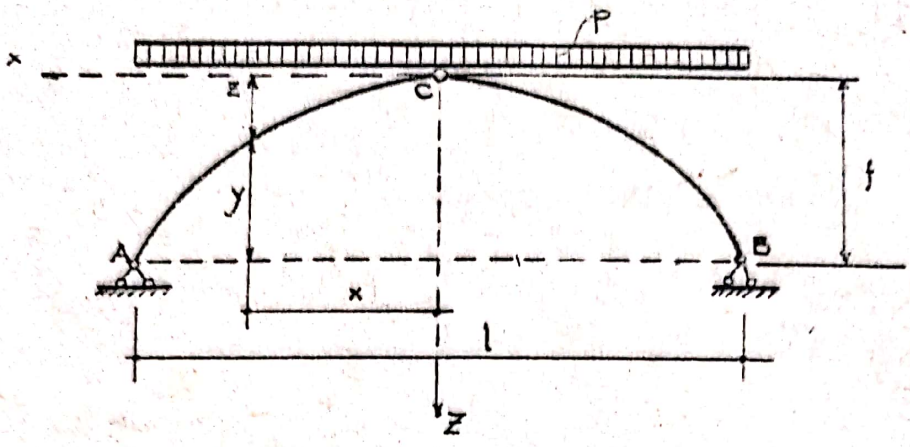


Fig. III.33

Așa cum s-a arătat, la proiectarea arcelor se urmărește în general reducerea eforturilor de încovoiere. Pentru anumite cazuri particulare de încărcări, se pot determina forme ale axei arcului pentru care momentele încovoietoare să fie nule în toate secțiunile structurii, cale pe care se va rezolva problema de față.

Plecînd de la condiția de anulare a momentelor încovoietoare:

$$M_i = M_i^0 - H\ y_i = 0$$

se obține:

$$y_i = \frac{M_i^0}{H} \qquad \text{(III.97)}$$

relație arată că axa arcului trebuie să aibă aceeași lege de variație ca și momentul încovoietor la grinda simplu rezemată de aceeași deschidere cu arcul și încărcată cu aceleași sarcini (H fiind constant).

Pentru barele drepte (grinda simplu rezemată) s-au dedus relațiile diferențiate între eforturi și încărcări:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -\frac{p}{H} \qquad \text{(III.18)}$$

Diferenţiind de două ori relaţia (III.97) şi ţinînd cont de (I.18), se obţine:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H} \cdot \frac{d^2M}{dx^2} = -\frac{p}{H} \qquad \text{(III.98.a)}$$

sau:

$$y'' = -\frac{p}{H} \qquad \text{(III.98.b)}$$

Considerînd sistemul de axe de coordonate xCz (fig. III.33), se vede că:

$$z = f - y$$

deci, ţinînd cont de (III.98.b):

$$z'' = -y'' = \frac{p}{H} \qquad \text{(III.99)}$$

Pentru încărcarea considerată, raportul p/H este constant şi integrînd succesiv de două ori, se obţine:

$$z' = \frac{p}{H} x + C_1$$

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{H} x^2 + C_1 x + C_2$$

Determinarea constantelor de integrare se face astfel:

- pentru $x = o$, $z' = o$ deci $C_1 = 0$
- pentru $x = o$, $z = 0$ deci $C_2 = 0$

şi rămîne deci:

$$z = \frac{1}{2}\frac{p}{H}x^2$$

Se vede că:

pentru $x = \frac{\ell}{2}$, $z = f$

adică:

$$f = \frac{1}{2}\frac{p}{H}\frac{\ell^2}{4} \quad \text{de unde:} \quad \frac{p}{H} = \frac{8f}{\ell^2}$$

şi rezultă ecuaţia axei arcului în sistemul de axe xCz:

$$z = \frac{4f}{\ell^2}x^2 \qquad \text{(III.100)}$$

adică o lege de variaţie parabolică, aceeaşi cu legea de variaţie a momentului încovoietor la grinda simplu rezemată încărcată cu o sarcină uniform distribuită.

3. Determinarea formei raţionale a axei arcului încărcat cu sarcini radiale (fig.III.34). Este cazul barajelor curbe în plan, acţionate de presiunea hidrostatică a apei.

In acest caz, pentru stabilirea arcului de coincidenţă (arcul a cărui axă se suprapune peste curba de presiune, deci în care momentele încovoietoare sînt nule), ne folosim de relaţiile diferenţiale stabilite pentru bara cu axă curbă (paragraful III.1.2).

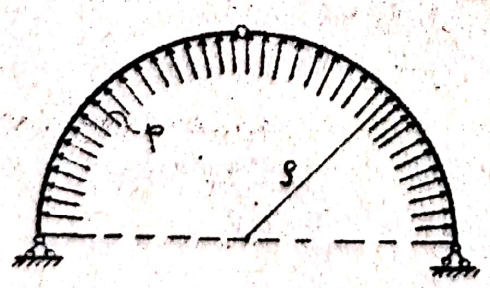


Fig. III-34

Intrucît sarcina este normală pe axa arcului, rezultă că $p_t = 0$, deci relaţia (III.8) devine:

$$\frac{dN}{ds} = \frac{T}{\rho} \qquad \text{(III.101)}$$

Cum însă pentru curba de presiune în toate secţiunile arcului rezultanta este dirijată după tangenta la această curbă deci componentele după direcţia normalei sînt nule, rezultă T ≡ 0, deci relaţia (III.101) devine:

$$\frac{dN}{ds} = 0 \qquad \text{(III.102)}$$

ceea ce arată că forţa axială este constantă în tot lungul acei arcului.

Deoarece forţa tăietoare este nulă, relaţia (III.9) devine:

$$0 = - p_n - \frac{N}{\rho}$$

sau: $p_n + \frac{N}{\rho} = 0$ de unde: $N = \rho . p_n$ (III.103)

Pe baza concluziei anterioare că forţa axială este constantă, rezultă - conform relaţiei (III.103) - că arcul de coincidenţă corespunde situaţiei pentru care produsul dintre intensitatea sarcinii radiale şi raza de curbură a secţiunii respective este constant.

Pentru cazul particular al încărcării radiale de intensitate constantă, din relaţia (III.103) rezultă că şi raza de curbură trebuie să fie constantă, deci axa arcului trebuie să fie un arc de cerc.

..oooOooo..

CAPITOLUL IV

STRUCTURI STATIC DETERMINATE PLANE ALCATUITE DIN BARE ARTICULATE IN NODURI (SISTEME PLANE CU ZABRELE)

IV.1. Consideratii generale.

IV.1.1. Alcătuire, terminologie.

Aşa cum s-a precizat în primul capitol, din această categorie fac parte structurile care, prin schematizare, se pot reduce la ansambluri de bare legate între ele în noduri, în aşa fel încît să formeze sisteme geometric nedeformabile cînd se face ipoteza că nodurile se comportă ca articulaţii perfecte. Dacă sînt acceptate şi o serie de alte ipoteze care se vor analiza într-un paragraf separat, rezultă că singurele eforturi care iau naştere în barele acestor structuri sînt forţele axiale. In realitate, barele structurilor cu zăbrele - din care fac parte grinzile cu zăbrele, cadrele cu zăbrele, arcele cu zăbrele etc.-sînt solicitate şi la încovoiere, dar acest efect este luat în considerare numai în anumite cazuri care vor fi specificate mai departe.

Modul de alcătuire şi nomenclatura specifică acestei categorii de structuri sînt exemplificate pe grinda cu zăbrele simplu rezemată din fig.IV.1. Barele unui sistem cu zăbrele sînt de două tipuri:

1. Tălpile alcătuite din barele de pe contur, cu excepţia celor marginale. Fiecare sistem cu zăbrele are o talpă superioară şi una inferioară.

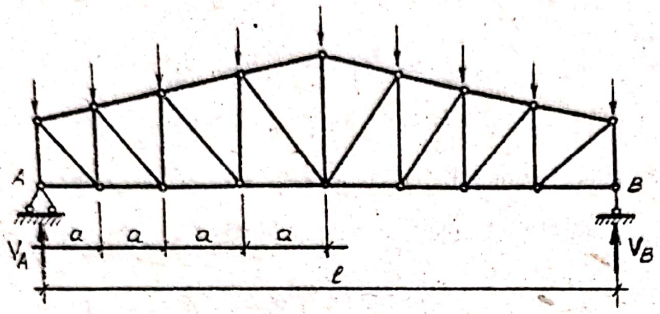


Fig. IV.1

2. Zăbrelele - barele care unesc între ele tălpile şi sînt de două feluri:

a) Diagonale - bare înclinate, care pot fi ascendente (urcătoare de la stînga spre dreapta) sau descendente (coborîtoare de la stînga spre dreapta).

b) Montanţi - bare verticale, inclusiv cele marginale.

Există şi sisteme cu zăbrele aşezate în poziţie verticală (piloni pentru reţele electrice, antene de radio şi televiziune, stîlpii cadrelor cu zăbrele etc.). In acest caz, tălpile sistemului sînt verticale sau cu înclinare mică faţă de verticală, iar montanţii sînt orizontali.

Punctele de intersecţie ale barelor, care pot fi pe tălpi sau în alte zone, se numesc noduri, iar porţiunea dintre două noduri consecutive se numeşte panou.

Deschiderea grinzii din fig.IV.1 s-a notat cu l iar lungimea unui panou cu a.

Forţele axiale din barele structurilor cu zăbrele le vom nota cu următoarele simboluri:

S_{ij} - eforturile din barele tălpii superioare;

I_{ij} - eforturile din barele tălpii inferioare;

D_{ij} - eforturile din diagonale;

V_{ij} - eforturile din montanţi.

IV.1.2. Ipoteze de calcul.

1. Prima ipoteză, inclusă în însăşi definiţia sistemelor cu zăbrele, este cea a comportării nodurilor ca articulaţii perfecte.

Această ipoteză nu este niciodată respectată în realitate, deoarece atît nodurile sistemelor cu zăbrele metalice cît şi cele ale sistemelor cu zăbrele din beton armat sau din alte materiale de construcţii(lemn etc.) reprezintă legături rigide între barele care concură în nodurile respective. Astfel, la construcţiile metalice, prinderea barelor în noduri se face prin nituire sau sudare de gusee (fig.IV.2.a), iar la

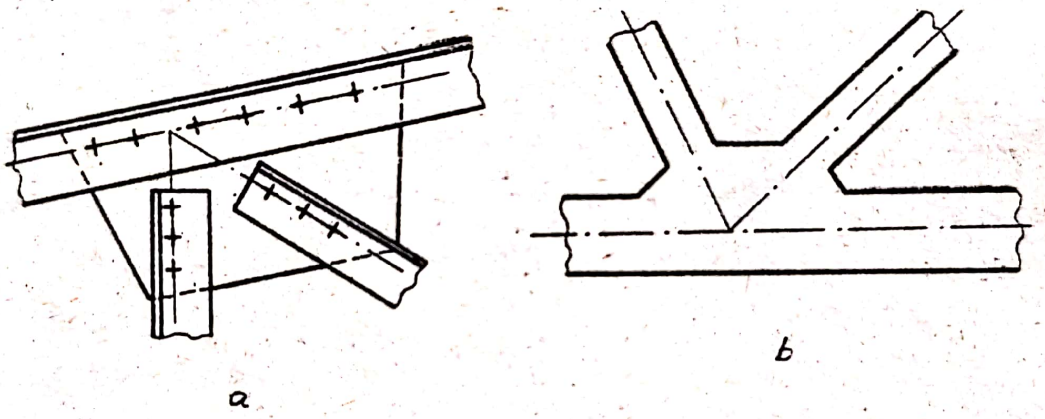


Fig IV.2

structurile din beton armat nodurile se realizează monolit,capetele barelor avînd de obicei chiar îngroşări (vute), necesare preluării concentrărilor de eforturi care apar în aceste zone şi unei armări corespunzătoare (fig.IV.2,b).

Rigiditatea nodurilor are drept efect apariţia în bare a unor eforturi de încovoiere, datorită împiedicării tendinţei de rotire a capetelor barelor. Totuşi, calculele şi încercările experimentale au arătat că, dacă barele sînt suficient de zvelte (dimensiunea cea mai mare a secţiunii mai mică decît 1/10

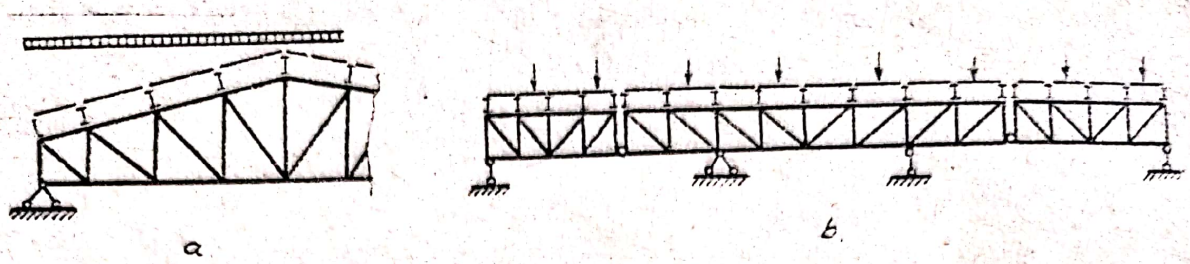
din lungimea barei), influenţa rigidităţii nodurilor nu este prea mare, modificarea eforturilor unitare nedepăşind (10-15)% din valorile calculate în ipoteza articulaţiilor perfecte în noduri.

De aceea, la multe sisteme cu zăbrele (în special metalice), calculul se face numai în ipoteza articulaţiilor în noduri, la cele din beton armat luîndu-se totuşi măsuri constructive de armare pentru asigurarea preluării eforturilor suplimentare de încovoiere din capetele barelor.

La unele structuri cu zăbrele, cum sînt grinzile principale pentru poduri de mari deschideri, grinzile prefabricate din beton armat care se execută în serie şi în general la sistemele de importanţă deosebită, calculul static se face ţinînd cont şi de rigiditatea nodurilor. Cum în acest caz sistemele respective sînt multiplu static nedeterminate, modul de efectuare a calculului nu va fi expus aici. Precizăm doar că şi la aceste structuri prima etapă de rezolvare o constituie calculul pe scheme cu articulaţii în noduri, deci determinarea unor prime valori ale forţelor axiale din bare, care se corectează ulterior apelînd la metodele de rezolvare a sistemelor static nedeterminate.

2. A doua ipoteză se referă la <u>aplicarea sarcinilor numai în nodurile structurii</u>. Această ipoteză este îndeplinită în majoritatea cazurilor, prin însuşi modul de alcătuire constructivă. Astfel, în cazul structurilor de acoperişuri pentru construcţii civile sau industriale, prin dispunerea unor elemente longitudinale-numite pane-în nodurile grinzilor cu zăbrele (fig.IV.3,a), se asigură transmiterea încărcărilor numai în aceste puncte.

De asemenea, în cazul structurilor pentru poduri (fig.



a b

Fig. IV 3

IV.3,b), în nodurile grinzilor principale se dispun antretoaze, care realizează respectarea ipotezei de transmitere a sarcinilor fixe şi mobile numai în aceste puncte.

In felul acesta,cu excepţia greutăţii proprii (în ambele cazuri) şi a presiunii vîntului (în special la structurile de poduri), se asigură transmiterea celorlaltor sarcini permanente şi utile numai în noduri.

Este vorba deci de fapt de o transmitere indirectă a sarcinilor şi în cele ce urmează se va presupune subînţeleasă această situaţie,adică pe schemele de calcul nu se vor mai figura totdeauna panele sau antetoazele. Tot pentru simplificarea reprezentării schemelor de calcul, nu se vor figura totdeauna articulaţiile din noduri, dar se va presupune existenţa lor.

3. O a treia ipoteză,a cărei îndeplinire este legată de realizarea practică a structurilor cu zăbrele, este cea referitoare la axarea perfectă a barelor în toate nodurile. Aceasta înseamnă că axele tuturor barelor care concură într-un anumit nod trebuie să se intersecteze în acelaşi punct (fig. IV.2.a şi b). La proiectarea structurilor cu zăbrele se urmăreşte respectarea acestei condiţii, care nu este realizată doar la construcţii de mai mică importanţă, cum sînt grinzile

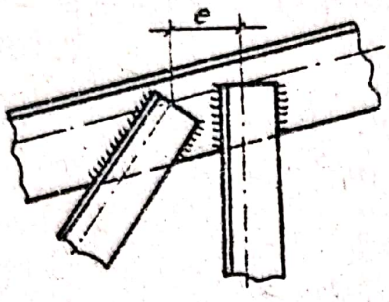


Fig. IV.4.

cu zăbrele metalice la care montanţii şi diagonalele sînt prinse direct de tălpi (fig. IV.4), anumite grinzi cu zăbrele din lemn etc.

In aceste cazuri, în bare apar efecte de încovoiere datorate excentricităţilor de prindere, dar ponderea lor este în general mică şi nu afectează capacitatea de rezistenţă a acestor tipuri de structuri, chiar dacă nu se ţine cont în calculele statice de dezaxările constructive.

IV.1.3. Condiţii de nedeformabilitate geometrică şi determinare statică.

Stiind că cea mai simplă figură geometrică articulată edeformabilă este triunghiul, rezultă că sistemele alcătuite din triunghiuri - cum sînt majoritatea structurilor cu zăbrele - sînt în general nedeformabile.

Vom stabili o relaţie generală de verificare a nedeformabilităţii geometrice şi a asigurării condiţiei de fixare a unui sistem plan de bare articulate, folosind următoarele notaţii:

n = numărul de noduri ale sistemului;

b = numărul de bare ale sistemului;

r = numărul de legături simple exterioare care fixează sistemul în plan.

Stiind că pentru fixarea unui punct în plan sînt necesare două legături, rezultă că numărul total de legături necesare pentru fixarea a n noduri este 2n. Pe de altă parte, nu-

mărul efectiv de legături ale unui sistem cu zăbrele este egal cu b + r Deci, dacă este îndeplinită condiţia:

$$2n \leqslant b + r \qquad \text{(IV.1)}$$

adică numărul de legături pe care le are sistemul este egal sau mai mare decît numărul de legături necesare, sistemul este nedeformabil şi fixat în plan.

Cazul particular al relaţiei (IV.1):

$$2n = b + r \qquad \text{(IV.2,a)}$$

sau:

$$2n - (b + r) = 0 \qquad \text{(IV.2,b)}$$

ne arată că sistemul are numărul de legături strict necesare şi se numeşte "condiţie de nedeformabilitate geometrică şi determinare statică.

Intr-adevăr, dacă sînt respectate ipotezele analizate în par.IV.1.2, mărimile care trebuiesc determinate prin calculul static la o structură cu zăbrele, sînt reacţiunile din r legături simple şi eforturile axiale din b bare, deci există în total r + b necunoscute. Cum - în aceleaşi ipoteze - fiecare nod reprezintă un sistem de forţe concurente, rezultă că numărul total de ecuaţii distincte de echilibru static este 2n (cîte două ecuaţii de proiecţie în feicare nod). In consecinţă, cînd numărul de ecuaţii de echilibru static este egal cu numărul de necunoscute adică 2n = b + r - relaţia (IV.2.a) - sistemul este static determinat.

Trebuie reţinută însă o observaţie importantă şi anume că este necesară respectarea condiţiei de nedeformabilitate geometrică atît pe ansamblul structurii, cît şi pe porţiuni. Pentru justificarea acestei observaţii, se consideră grinda cu zăbrele din fig.IV.5.a, la care se constată simplu că:

$$2n = 2 \times 14 = 28$$

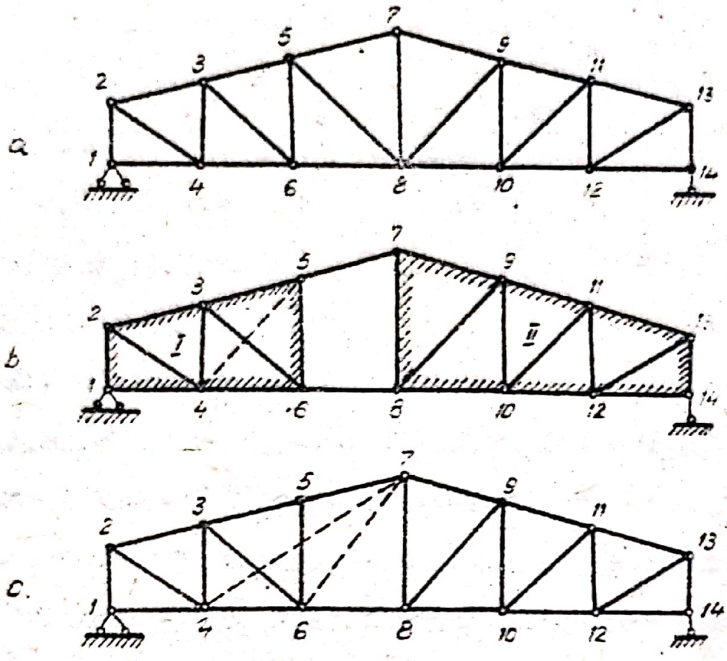


Fig IV.5

b = 25

r = 3

deci 2n = b + r, adică sistemul este nedeformabil și static determinat.

Dacă se scoate diagonala 5–8 și se introduce în schimb diagonala 4–5 (fig.IV.5,b) relația (IV.2,a) este în continuare satisfăcută, dar se vede ușor că sistemul rezultat, alcătuit din porțiunile nedeformabile 1-2-5-6 și 7-8-13-14, legate între ele prin barele 5-7 și 6-8 articulate la capete, este un ansamblu cu deplasări (un mecanism), Dovada cea mai elocventă este existența patrulaterului articulat 5-6-7-8, care este o figură geometrică deformabilă.

Dacă însă în locul barei scoase 5–8 se introduce fie bara 6-7, fie bara 4-7 (fig.IV.5,c), fie altă bară care leagă un nod de pe porțiunea nedeformabilă I cu un nod de pe porțiunea nedeformabilă II, grinda în ansamblu rămîne nedeformabilă geometric. Aceasta, deoarece cele două porțiuni rămîn legate prin trei bare, ceea ce nu permite producerea unor deplasări relative între porțiunile respective. Și această legare cu trei bare are anumite restricții în sensul că barele nu trebuie să fie toate paralele sau concurente.

In fig.IV.6 de exemplu este prezentat un sistem alcătuit

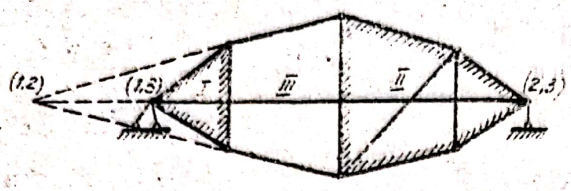


Fig. IV.6

din porțiunile nedeformabile I și II, legate cu bara III. Relația (IV.2.a) este evident, satisfăcută, dar se constată ușor că centrele instantanee relative de rotație (1,1), (1,3) și (2,3) sînt coliniare, proprietate caracteristică sistemelor cinematice. Inseamnă că sistemul, deși are numărul de legături specific structurilor static determinate, are totuși posibilități de deplasare. Un astfel de sistem se numește "formă critică" și se caracterizează prin apariția în anumite bare a unor eforturi de valori foarte mari (teoretic infinite). Evident că aceste sisteme trebuiesc evitate și una din căile de recunoaștere a lor, numită "calea cinematică", este cea analizată în legătură cu exemplul din fig.IV.6, constînd din identificarea a trei porțiuni ale căror centre intantanee relative de rotație sînt coliniare. Asupra acestor sisteme se va mai reveni în cadrul capitolului de față.

Trebuie reținută în orice caz concluzia importantă că înlocuirea unui număr de bare cu altele, trebuie făcută cu atenție pentru a nu se forma sisteme cinematice sau forme critice.

Desigur că scoaterea uneia sau a mai multor bare se mai poate compensa și prin introducerea unui număr corespunzător de legături exterioare. In felul acesta s-a procedat la grinda cu zăbrele din fig.IV.7.a, la care s-a suprimat o bară și s-a introdus în schimb un reazem simplu. S-a obținut astfel grinda cu zăbrele din fig.IV.7.b, care este un sistem geometric nede-

a b

Fig. IV.7

formabil şi static determinat, ca şi grinda iniţială, întrucît relaţia generală (IV.2.a) este satisfăcută. Este vorba de fapt de două grinzi cu zăbrele simplu rezemate, cu un reazem comun. Cele patru reacţiuni simple ce trebuie determinate la acest sistem, se vor calcula cu ajutorul a trei ecuaţii obişnuite de echilibru static, la care se adaugă relaţia suplimentară, de moment zero în reazemul intermediar:

$$M^{st(dr)} = 0$$

Astfel de sisteme sînt denumite "sisteme cu mai mult decît trei condiţii simple de rezemare" şi din această categorie fac parte şi structurile Gerber cu zăbrele, care se vor analiza într-un paragraf separat.

IV.1.4. Sisteme plane cu zăbrele utilizate în construcţii.

Tipurile principale de sisteme plane de bare articulate utilizate ca structuri de rezistenţă în construcţii au fost enumerate în par.I.4. Aici le vom reaminti numai, urmînd ca în subcapitolele următoare să se analizeze modul de efectuare a calculului lor static:

1. Grinzi simple cu zăbrele.
2. Grinzi cu zăbrele cu console şi articulaţii (grinzi Gerber cu zăbrele).
3. Arce cu zăbrele.

4. Cadre cu zăbrele.

In cele ce urmează se prezintă metodele generale de determinare a eforturilor din barele sistemelor cu zăbrele, iar în continuare se vor analiza particularităţile de aplicare a acestor metode - sau a unor metode specifice - la diversele tipuri de structuri amintite, atît pentru calculul la sarcini fixe, cît şi pentru calculul la sarcini mobile.

IV.1. Metode de determinare a eforturilor în barele sistemelor cu zăbrele.

Pentru calculul eforturilor care apar în barele sistemelor cu zăbrele, se utilizează aceleaşi metode ca şi pentru rezolvarea structurilor alcătuite din bare cu secţiune plină (metoda secţiunilor şi metoda bazată pe utilizarea principiului deplasărilor virtuale).

Ne ocupăm întîi, de metoda secţiunilor care - după cum se ştie - constă în secţionarea structurii şi scrierea condiţiilor de echilibru ale porţiunii din stînga sau din dreapta, ecuaţii din care rezultă tocmai eforturile din secţiunea respectivă.

In cazul sistemelor cu zăbrele, aplicarea acestei căi generale se poate face în două moduri, cărora le corespund următoarele procedee de rezolvare:

1. Metoda secţiunilor.
   a. Procedeul analitic (metoda Ritter),
   b. Procedeul grafic (metoda Culmann).
2. Metoda izolării (separării) nodurilor.
   a. Procedeul analitic.
   b. Procedeul grafic (epura Cremona).

Desigur că aplicarea oricăruia din procedeele enumerate,

este precedată de determinarea reacţiunilor sistemului, această etapă efectuîndu-se ca şi la sistemele cu secţiune plină analizate în capitolele precedente, în funcţie de modul de rezemare şi de încărcările care acţionează structura. Se vor folosi deci relaţiile generale de echilibru (de proiecţii sau de momente) ale sistemului, aplicate fie analitic, fie grafic.

IV.2.1. Metoda secţiunilor.

Constă - aşa cum s-a mai precizat - în efectuarea unor secţiuni complete în structură şi scrierea ecuaţiilor de echilibru ale părţii din stînga sau dreapta fiecărei secţiuni, după ce s-a înlocuit efectul părţii îndepărtate prin eforturile din barele secţionate. Cum pentru un corp se pot scrie în plan trei ecuaţii distincte de echilibru static, rezultă că pentru a putea determina toate aceste eforturi din secţiune, este necesar ca numărul de bare secţionate cu eforturi necunoscute să fie de maximum trei. In plus, trebuie ca direcţiile celor trei bare cu eforturi necunoscute secţionate să nu fie toate paralele sau concurente în acelaşi punct, deoarece în aceste cazuri numărul de ecuaţii distincte de echilibru static se reduce la două.

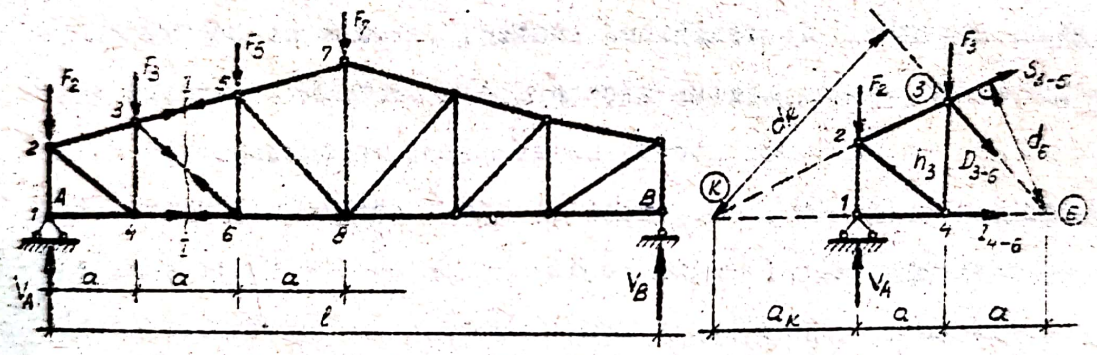
Altfel spus, principiul acestei metode constă în exprimarea condiţiilor de echilibru al rezultantei forţelor cunoscute (acţiuni, reacţiuni, eventual forţe axiale din anumite bare) cu eforturile necunoscute din barele secţionate. Si deoarece aceste condiţii de echilibru se pot exprima analitic sau se pot realiza pe cale grafică, rezultă că avem la îndemînă două procedee de lucru, cunoscute sub denumirile de metoda Ritter şi metoda Culmann.

Mai trebuie precizat că din cele două procedee, cel care se aplică în mod curent este procedeul analitic. In plus,

întrucît pe această cale se poate determina direct forţa axială din oricare bară a structurii, procedeul este folosit mai ales ca o metodă de verificare a eforturilor; el poate fi însă la fel de bine utilizat şi ca metodă de proiectare, servind deci la determinarea eforturilor din toate barele unei anumite structuri.

IV.2.1.1. Procedeul analitic (metoda Ritter)

Aplicarea acestui procedeu se va exemplifica pe grinda cu zăbrele din fig.IV. 8, la care ne propunem să determinăm forţele axiale din barele panoului al doilea.



a

b.

Fig IV. 8

Făcînd secţiunea I-I şi izolînd partea din stînga acestei secţiuni (fig.IV.8.b), vom putea determina eforturile din cele trei bare secţionate (I_{4-6}, S_{3-5}, D_{3-6}). Cele trei ecuaţii de echilibru pe care le scriem sînt alese în aşa fel încît - dacă este posibil - fiecare dintre ele să conţină cîte o singură necunoscută. Astfel:

- Pentru determinarea efortului I_{4-6} din talpa inferioară, scriem ecuaţia de momente în raport cu nodul 3, în care se intersectează celelalte două bare secţionate (talpa superioară şi diagonala)

$$M_{(3)} = 0;\ V_A \cdot a - F_2 \cdot a - I_{4-6} \cdot h_3 = 0$$

din care:

$$I_{4-6} = \frac{V_A \cdot a - F_2 \cdot a}{h_3} = \frac{M_3^0}{h_3} \qquad (IV.3)$$

unde cu M_3^0 s-a notat momentul în dreptul nodului 3, la o grindă simplu rezemată A-B, încărcată cu sarcinile care acționează grinda cu zăbrele.

- Pentru determinarea efortului S_{3-5} din talpa superioară, scriem ecuația de momente în raport cu nodul 5, unde se întîlnesc talpa inferioară și diagonala:

$$M_{(6)} = 0: \; V_A \cdot 2a - F_2 \cdot 2a - F_3 \cdot a + S_{3-5} \cdot d_6 = 0$$

din care:

$$S_{3-5} = -\frac{V_A \cdot 2a - F_2 \cdot 2a - F_3 \cdot a}{d_6} = -\frac{M_6^0}{d_6} \qquad (IV.4)$$

unde s-a notat cu M_6^0 momentul în dreptul nodului 6 la o grindă simplu rezemată A-B, încărcată cu sarcinile care acționează grinda cu zăbrele.

Semnul minus rezultat, ne arată că în bara 3-5 a tălpii superioare, efortul nu este de întindere (cum l-am figurat în fig.IV.8,b), ci de compresiune. De altfel, este evident că - după modul de deformare a grinzii - barele de la talpa inferioară a acestei grinzi simplu rezemate vor fi toate întinse (ele ocupă poziția fibrei inferioare de la grinda cu secțiune plină), iar cele de la talpa superioară vor fi toate comprimate (constituind fibra superioară a grinzii).

- Pentru determinarea efortului D_{3-6} din diagonală, scriem ecuația de momente în raport cu punctul K de intersecția direcțiilor celor două bare din tălpi, secționate:

$$M_{(k)} = 0: \; -V_A a_k + F_2 \cdot a_k + F_3 (a_k + a) + D_{3-6} \cdot d_k = 0$$

din care: $$D_{3-6} = \frac{V_A \cdot a_k - F_2 \cdot a_k - F_3 (a_k + a)}{d_k} \qquad (IV.5)$$

In felul acesta, făcînd secţiuni convenabile şi alegînd judicios ecuaţiile de echilibru, se pot determina eforturile din toate barele grinzii considerate.

Urmează ca alte particularităţi rezultate din aplicarea acestui procedeu, să fie analizate pe categorii de structuri, în subcapitolele următoare.

IV.2.1.2. Procedeul grafic (metoda Culmann)

Constă în descompunerea rezultantei forţelor (acţiuni, reacţiuni) din stînga sau dreapta secţiunii pe direcţiile celor trei bare secţionate, eforturile din bare fiind componentele cu semn schimbat ale rezultantei respective:

Astfel,pentru determinarea eforturilor din barele panoului al doilea al grinzii cu zăbrele din fig.IV.9, se procedează astfel:

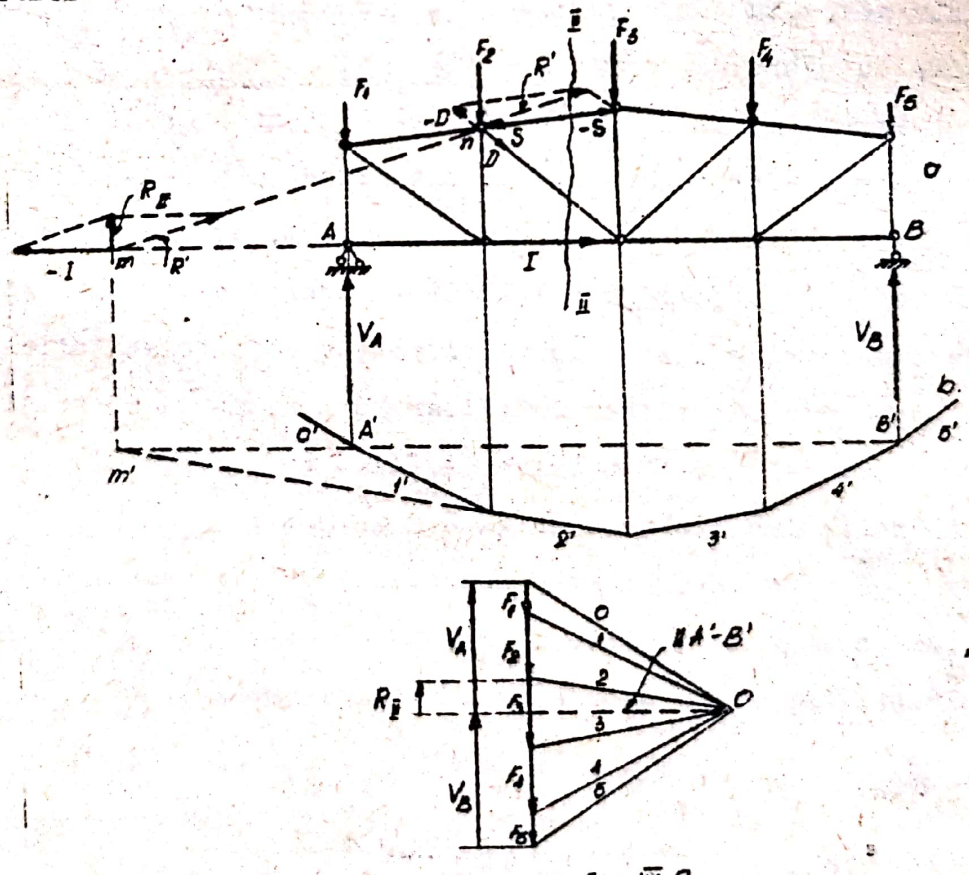


Fig. IV.9

- se determină rezultanta R_{II} a forţelor V_A, F_1 şi F_2 din stînga secţiunii II-II, a cărei mărime se găseşte în poligonul de forţe (construit anterior pentru aflarea reacţiunilor); suportul rezultantei R_{II} trece prin punctul m' de intersecţie a liniei de închidere A'-B', cu latura 2' a poligonului funicular;

- considerînd rezultanta R_{II} aplicată în punctul m de intersecţii cu direcţia uneia din barele secţionate, se descompune această rezultantă după direcţia barei respective (talpa inferioară) şi direcţia care uneşte punctul m, cu punctul n de intersecţie a celorlalte două bare secţionate; se obţin astfel componentele - I şi R';

- considerînd componenta R' aplicată în n, se descompune această forţă după direcţia barei din talpa superioară şi a diagonalei, obţinîndu-se componentele - S şi -D;

- cele trei componente luate cu semn schimbat, reprezintă eforturile I, S şi D din barele secţionate.

Evident că se poate face descompunerea rezultantei luată cu semn schimbat şi se obţin astfel direct eforturile cu semnele lor.

Dacă punctul m' care stabileşte suportul rezultantei rezultă prea îndepărtat de grindă, se poate face descompunerea separată a forţelor din stînga (sau dreapta) secţiunii şi apoi se suprapun efectele (pentru a micşora dimensiunile construcţiei grafice).

IV. 2.2. <u>Metoda izolării nodurilor</u>.

Este de fapt o formă particulară a metodei secţiunilor, în care se secţionează succesiv, barele din jurul a cîte unui nod. Rezultă astfel pentru fiecare nod cîte un sistem de forţe concurente, alcătuit din acţiuni, reacţiuni şi forţele axiale

din barele secționate. Exprimînd analitic sau realizînd grafic echilibrul acestor sisteme de forțe concurente, se determină eforturile din barele sistemului cu zăbrele respectiv.

IV.2.2.1. Procedeul analitic.

Deoarece la un sistem cu zăbrele static determinat numărul de necunoscute este r + b (r reacțiuni simple și b eforturi din barele structurii), iar numărul de ecuații distincte de echilibru static este 2n (n = numărul nodurilor), rezultă că procedeul este aplicabil pentru rezolvarea oricărui sistem plan static determinat de bare articulate, obținîndu-se în general un sistem de 2n ecuații cu r + b = 2n necunoscute.

Procedeul este însă practic mai ales atunci cînd se poate găsi o astfel de ordine de parcurgere a nodurilor, încît în fiecare nod să nu existe decît cel mult cîte două bare secționate cu eforturi necunoscute. În felul acesta, din cele două ecuații de echilibru static ale unui nod, rezultă necunoscutele respective și calculul sistemului este foarte simplu. La sistemele cu zăbrele simple și chiar la unele sisteme mai complicate, această condiție este îndeplinită și de aceea rezolvarea pe această cale este mult utilizată în practica de proiectare, folosindu-se însă mai ales procedeul grafic, datorită timpului mai scurt cerut de aplicarea acestuia.

Aplicarea procedeului analitic este exemplificată pe grinda cu zăbrele din fig.IV.10,a. Se consideră că reacțiunile au fost determinate în prealabil și se trece direct la calculul eforturilor axiale din cîteva bare. Nodurile grinzii cu zăbrele au fost numerotate în ordinea lor de parcurgere, dictată de considerentele precizate anterior.

Calculul se începe din nodul 1 (sau 14), unde există numai două bare cu eforturi necunoscute.

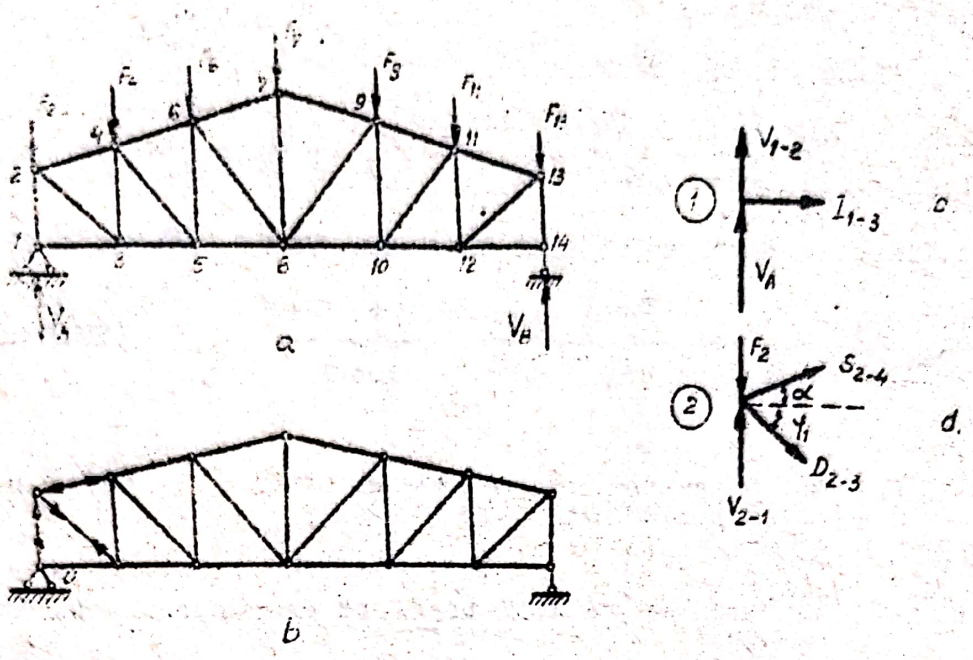


Fig IV 10

- Izolînd nodul 1 (fig.IV.10.c), şi scriind ecuaţiile de echilibru static, rezultă:

$$\Sigma X = 0: \quad I_{1-3} = 0$$

$$\Sigma Y = 0: \quad V_A + V_{1-2} = 0 \quad \text{deci} \quad V_{1-2} = -V_A \qquad (IV.6)$$

Intrucît la izolarea nodului eforturile necunoscute au fost considerate pozitive (eforturi de întindere), rezultă că efortul din montant - care a ieşit din calcul cu semnul minus- este de compresiune.

Facem aici precizarea (valabilă şi pentru procedeul grafic), că din calcul se obţin eforturile din bare - deci acţiunea barelor asupra nodurilor - ceea ce înseamnă că eforturile figurate cu săgeţile spre noduri reprezintă compresiune şi cele figurate cu săgeţile spre mijlocul barelor reprezintă întindere (fig.IV.10.b).

- Izolînd nodul 2, rezultă sistemul de forţe concurente din fig.IV.10.d, în care V_{2-1} este cunoscut şi a fost reprezentat în consecinţă ca efort de compresiune. Ecuaţiile de echili-

bru static conduc la:

$$\sum X = 0: \; S_{2-4} \cdot \cos \alpha + D_{2-3} \cos \varphi = 0$$

$$\sum Y = 0: \; V_{2-1} - F_2 + S_{2-4} \cdot \sin \alpha - D_{2-3} \cdot \sin \varphi = 0$$

Din cele două ecuaţii şi ţinînd cont de (IV.6), rezultă:

$$S_{2-4} = -\left(\frac{V_A - F_2}{\sin \varphi + \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \alpha} \right) \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha} \qquad \text{(IV.7.a)}$$

$$D_{2-3} = \frac{V_A - F_2}{\sin \varphi + \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \alpha} \qquad \text{(IV.7.b)}$$

Deci, în bara 2-4 rezultă un efort de compresiune, în timp ce diagonala 2-3 este supusă la întindere (fig.IV.10.b).

Procedeul se aplică similar în continuare, parcurgînd nodurile în ordinea indicată. Se ajunge astfel la nodul 13, în care nu mai avem necunoscut decît efortul din montantul 13-14, deci una din ecuaţiile de echilibru ($\sum X = 0$) este o ecuaţie de verificare. Se obţin de asemenea două ecuaţii de verificare în nodul 14, deci în total trei ecuaţii de verificare. Aceasta, datorită faptului că din cele 2n ecuaţii distincte de echilibru static, trei au fost utilizate în prealabil la determinarea reacţiunilor ($\sum M_{(A)} = 0$, $\sum M_{(B)} = 0$ şi $\sum X = 0$); deci, din cele 2 n ecuaţii de proiecţie pe care le putem scrie în cele n noduri, numai (2 n-3) mai sînt distincte.

In continuare se analizează cîteva cazuri particulare, care permit determinarea directă a eforturilor din anumite bare, sau identificarea unor bare în care eforturile sînt nule(bare inactive). Aceasta simplifică calculul şi face posibilă aplicarea metodei izolării nodurilor şi la unele sisteme mai complicate cu zăbrele, la care nu este respectată condiţia ca în fiecare nod să avem numai cîte două bare cu eforturi necunoscute. Este vorba de următoarele situaţii:

a) <u>Dacă într-un nod concură numai două bare cu direcţii diferite şi în nodul respectiv nu acţionează nici o forţă, eforturile în cele două bare sînt nule</u>. Este cazul nodului 2 de la grinda cu zăbrele din fig.IV.11.a, care este izolat în fig.IV.11.b. Scriind cele două ecuaţii de echilibru, rezultă:

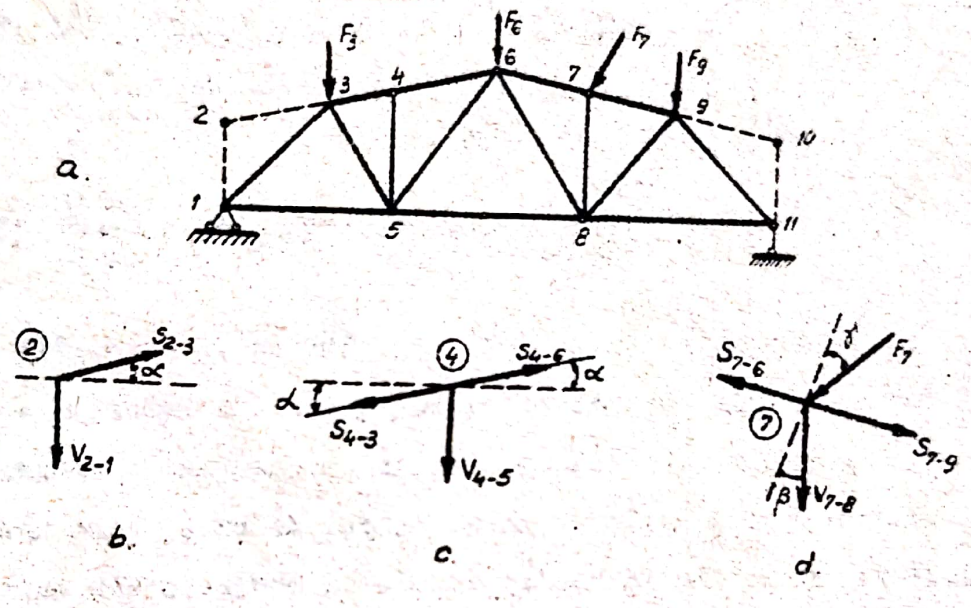


Fig. IV.11

$$\sum X = 0: \; S_{2-3} \cdot \cos\alpha = 0 \quad \text{deci } S_{2-3} = 0 \qquad \text{(IV.8.a)}$$

$$\sum Y = 0: \; -V_{2-1} + S_{2-3} \cdot \sin\alpha = 0 \text{ deci } V_{2-1} = 0 \qquad \text{(IV.8.b)}$$

Astfel, barele 2-1 şi 2-3, ca şi barele 9-10 şi 10-11 sînt în acest caz bare inactive şi dacă prezenţa lor nu este reclamată de alte considerente, se poate renunţa la ele.

b) <u>Dacă într-un nod concură trei bare dintre care două în prelungire şi în nod nu acţionează nici o forţă, efortul în cea de a treia bară este egal cu zero</u>. Izolînd la aceeaşi grindă din fig.IV.10.a nodul 4 (fig.IV.10.c), rezultă într-adevăr:

$$\sum X = 0: \; -S_{4-3}\cos\alpha + S_{4-6}\cos\alpha = 0 \text{ deci: } S_{4-3} = S_{4-6} \qquad \text{(IV.9.a)}$$

$$\Sigma X = 0: \quad -S_{4-3}\sin\alpha - S_{4-6}\sin\alpha - V_{4-5} = 0$$

și ținînd cont de (IV.9.a), se obține:

$$V_{4-5} = 0 \qquad (IV.9.b)$$

c) Dacă în același caz ca precedentul în nod acționează și forță cu o direcție oarecare, efortul în cea de a treia bară se poate determina direct din ecuația de proiecție pe o direcție perpendiculară pe barele în prelungire. Procedînd astfel în modul 7 (fig.IV.11.d), rezultă:

$$-P_7\cos\gamma - V_{7-8}\cos\beta = 0 \text{ deci: } V_{7-8} = -P_2\frac{\cos\gamma}{\cos\beta} \qquad (IV.10)$$

Din cazurile b) și c) rezultă că în montanții 4-5 și respectiv 7-8, există efort numai dacă în nodurile 4 și respectiv 7 sînt aplicate forțe, în caz contrar eforturile respective fiind egale cu zero. Astfel de bare, care preiau eforturi numai din încărcări locale în nodurile din care fac parte se numesc "bare suplimentare".

In acest caz este vorba de montanți suplimentari, dar chiar dacă în nodurile 4 și respectiv 7 nu se aplică sarcini, prezența acestor bare poate avea un rol important prin aceea că reduce lungimile de flambaj ale barelor 3-6 și 6-9 în care apar, evident, eforturi de compresiune.

IV.2.2.2. Procedeul grafic (epura Cremona)

Varianta grafică a metodei izolării nodurilor, constă în construirea succesivă a cîte unui poligon închis pentru forțele care concură în fiecare nod (acțiuni, reacțiuni, forțe axiale din bare). Aplicarea acestui procedeu este condiționată de existența în fiecare nod a numai două bare cu eforturi necunoscute ca mărime, poligonul corespunzător închizîndu-se

tocmai *prin* ducerea paralelelor la direcţiile acestor două bare.

Pentru sistematizarea construirii epurei Cremona, se procedează astfel (fig.IV.12):

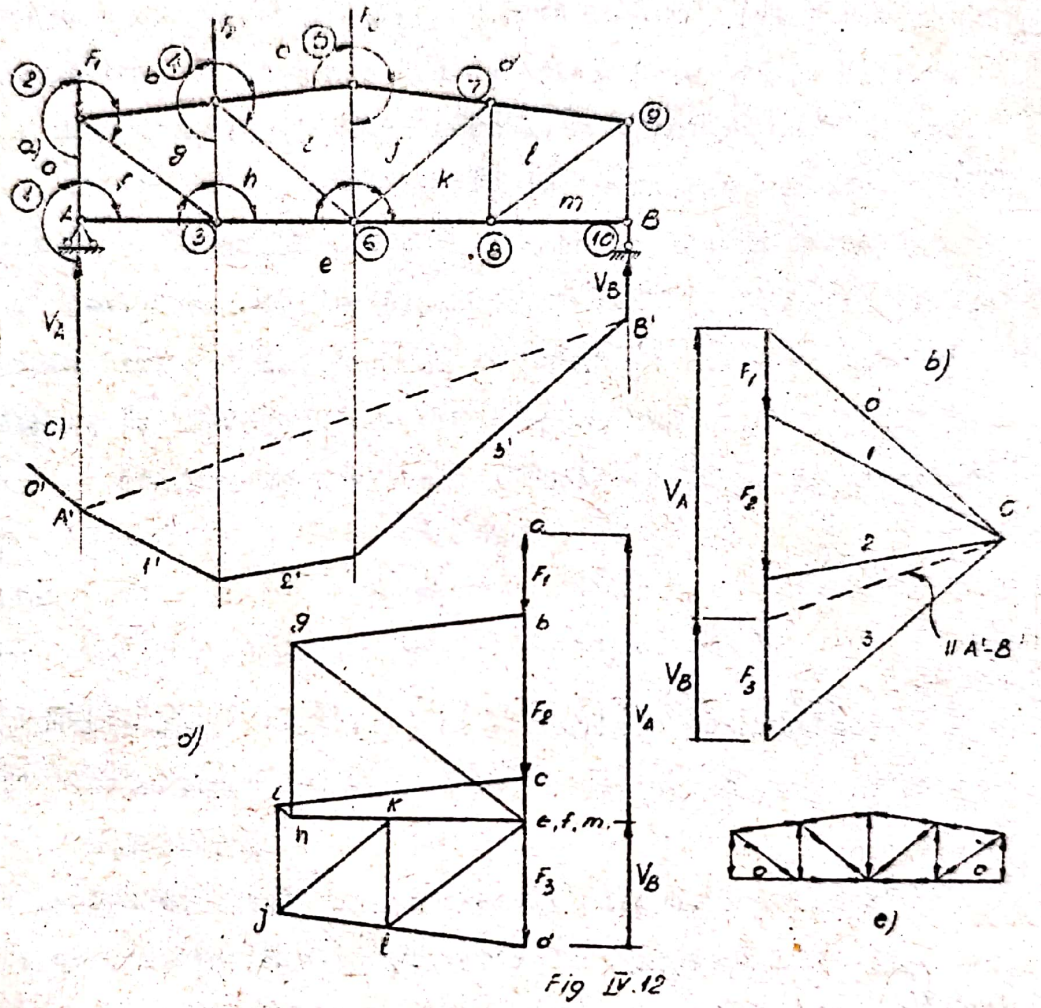


Fig IV.12

- Se notează cu o literă (sau cifră) fiecare zonă dintre două forţe (acţiuni, reacţiuni, eforturi). Astfel, în epură vor apare, la capetele fiecărei forţe, simbolurile zonelor pe care le separă forţa respectivă.

- Se stabileşte un sens (orar sau antiorar) de parcurgere a forţelor concurente din fiecare nod (pentru exemplul prezentat în fig.IV.12, s-a ales sensul orar), care se păstrează în toate nodurile.

- Se determină reacţiunile sistemului, folosindu-ne de poligonul forţelor şi poligonul funicular (fig.IV.10.b,c).

- Se construieşte apoi epura Cremona, plecînd de la un nod care are două bare cu eforturile necunoscute şi realizînd poligonul închis pentru fiecare nod, alcătuit din forţele cunoscute şi paralelele la cele două direcţii ale barelor cu eforturi necunoscute, în ordinea indicată de sensul de parcurgere (orar sau antiorar) ales.

Pentru grinda cu zăbrele din fig.IV.12.a, se începe epura din nodul 1, unde se cunoaşte reacţiunea V_A (e-a în epură) şi se duc paralele la direcţia montantului 1-2 (din a) şi barei 1-3 din talpa inferioară (din e). Aceaste două paralele se întîlnesc în e, care coincide deci cu f şi rezultă:

$$V_{1-2} = \overrightarrow{a-f} \quad \text{(compresiune)}$$

$$I_{1-3} = f-e = 0$$

Reamintim că eforturile care rezultă, sînt eforturile din bare, deci sensul spre nod reprezintă compresiune (fig. IV.12.e).

In nodul 2, mergînd în sensul orar ales, se cunosc efortul V_{2-1} (f-a în epură) şi forţa F_1 (a-b în epură), apoi se închide poligonul cu o paralelă la bara 2-4 din talpa superioară dusă din b şi o paralelă la diagonala 2-3 dusă din f. La intersecţia acestor direcţii, rezultă punctul g şi eforturile din cele două bare sînt:

$$S_{2-4} = \overrightarrow{b-g} \quad \text{(compresiune)}$$

$$D_{2-3} = \overrightarrow{g-f} \quad \text{(întindere)}$$

In continuare se trece la nodul 3, unde se cunosc eforturile $I_{3-1} = 0$ (e-f în epură), D_{3-2} (f-g în epură) şi se în-

chide poligonul cu o paralelă după din g la direcţia montantului 3-4 şi o paralelă dusă din e la direcţia barei 3-6 din talpa inferioară. Punctul de intersecţie este h şi rezultă eforturile:

$$V_{3-4} = \overrightarrow{g-h} \quad \text{(compresiune)}$$

$$I_{3-6} = \overrightarrow{h-e} \quad \text{(întindere)}$$

Se procedează în mod analog în celelalte noduri, în ordinea indicată de numerotarea din fig.IV.12.a, determinîndu-se eforturile din toate barele.

Se va observa că atunci cînd se ajunge la nodul 9, numai montantul 9-10 mai are efort necunoscut, deoi prin ducerea unei paralele la direcţia acestei bare, poligonul corespunzător acestui nod trebuie să se închidă (poligonul m-l-d-m în epură). Pentru nodul 10 trebuie să rezulte de asemenea un poligon de forţe închis (e-m-d-e în epură). Este de fapt vorba de regăsirea celor trei condiţii de verificare, rezultate din faptul că din cele 2 n condiţii distincte de echilibru static, 3 au fost utilizate la determinarea reacţiunilor.

Observaţii.

1. Eforturile din bare rezultă la aceeaşi scară la care sînt reprezentate acţiunile şi reacţiunile.

2. Dacă sistemul este simetric, legăturile simetrice şi încărcarea de asemenea simetrică, se construieşte epura numai pentru jumătate din barele sistemului.

3. Se observă că fiecărui nod al structurii îi corespunde un poligon închis în epură şi invers: nodului g de exemplu din epură, în care se întîlnesc direcţiile g-b, g-f şi g-h, îi corespunde în schema grinzii conturul 2-3-4, alcătuit din barele 2-4, 2-3 şi 3-4, care mărginesc zona g şi sînt paralele cu

direcţiile concurente în g în epură. Din acest motiv, epura Cremona poartă denumirea de "reciproca sistemului cu zăbrele".

Ultima observaţie poate fi folosită ca o cale de verificare a corectitudinii epurei.

IV.2.3. Utilizarea principiului deplasărilor virtuale.

Aplicarea principiului deplasărilor virtuale are şi în acest caz avantajul că permite calculul direct şi simplu (dintr-o singură ecuaţie) al efortului axial din oricare bară a unui sistem cu zăbrele static determinat.

Transformarea sistemului în mecanism pentru deplasări virtuale, se face prin înlocuirea barei al cărei efort dorim să-l determinăm, cu perechea de eforturi corespunzătoare. Urmează apoi stabilirea centrelor instantanee de rotaţie, construirea diagramelor de deplasări necesare şi scrierea ecuaţiei de echilibru prin lucru mecanic virtual, din care rezultă mărimea efortului căutat.

Folosirea acestei căi de determinare a eforturilor la sisteme plane de bare articulate, este exemplificată pe grinda cu zăbrele simplu rezemată din fig.IV.13,a, la care se calculează următoarele eforturi:

a) Efortul din bara 6-8 a tălpii inferioare.

Prin înlocuirea barei cu perechea de eforturi I_{6-8}, rezultă mecanismul pentru deplasări virutale din fig.IV.13.b, alcătuit din corpurile I şi II. Centrul instantaneu absolut de rotaţie (1,T) se găseşte în articulaţia A, iar în nodul 5 se găseşte centrul instantaneu relativ de rotaţie (1,2); centrul instantaneu absolut de rotaţie (2,T) se găseşte la intersecţia direcţiei (1,T)-(1,2) cu direcţia reazemului simplu din B. Se construiesc apoi diagramele de deplasări pe verticală (fig.IV.13.c) şi pe orizontală (fig.IV.13.d), după care se

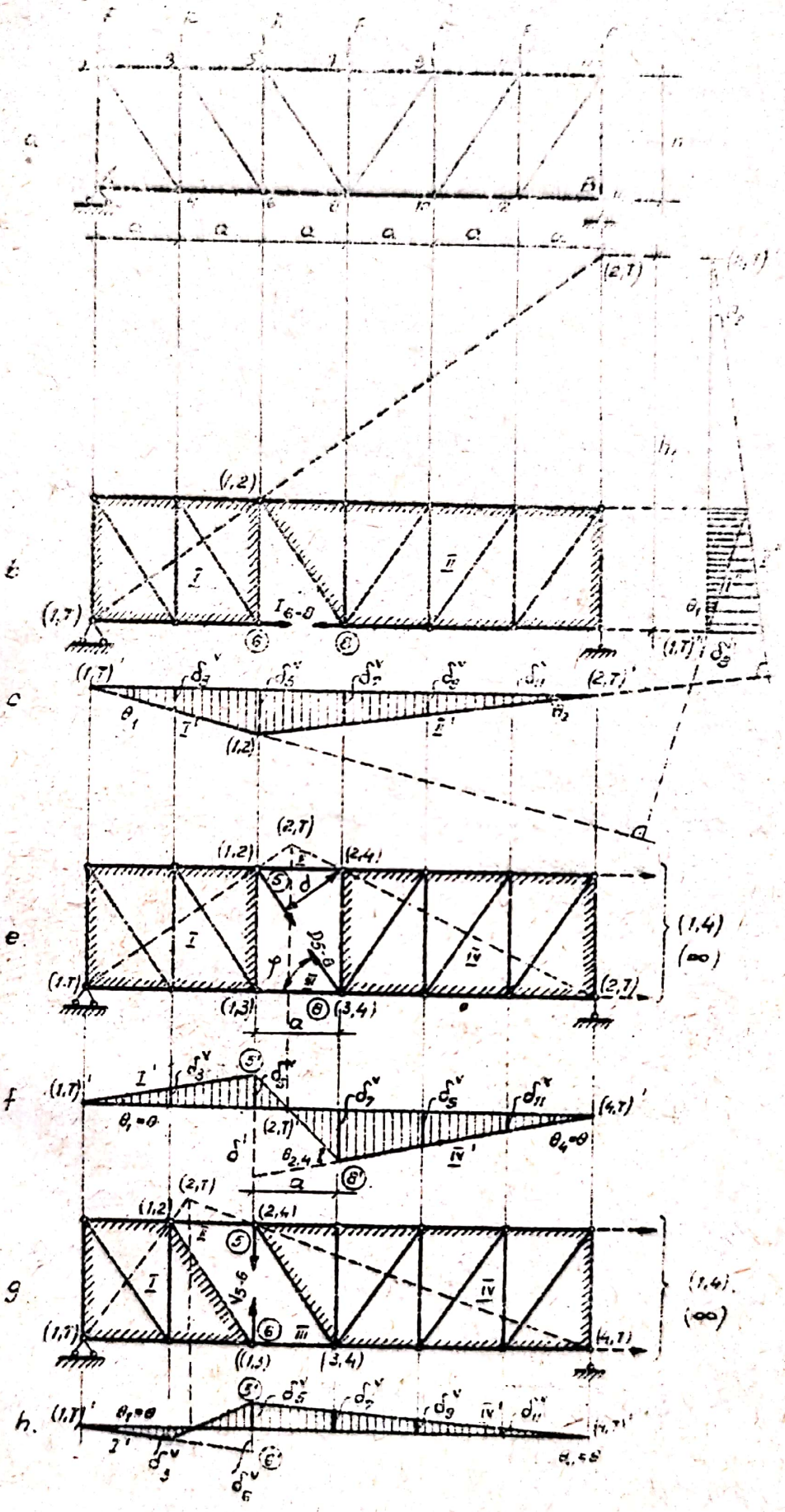


Fig. IV. 13

scrie ecuaţia de echilibru prin lucru mecanic virtual:

$$F(\delta_3^v + \delta_5^v + \delta_7^v + \delta_9^v + \delta_{11}^v) - I_{6-8} \cdot \delta_6^h - I_{6-8} \cdot \delta_8^h = 0$$

de unde rezultă:

$$I_{6-8} = \frac{F(\delta_3^v + \delta_5^v + \delta_7^v + \delta_9^v + \delta_{11}^v)}{\delta_6^h + \delta_8^h} \qquad \text{(IV.11.a)}$$

Din diagrama deplasărilor pe verticală se poate găsi o relaţie între rotirile θ_1 şi θ_2:

$$\delta_5^v = 2a \cdot \theta_1 = 4a \cdot \theta_2 \quad \text{deci} \quad \theta_1 = 2\theta_2 \qquad \text{(IV.12)}$$

In felul acesta deplasările care intră în relaţie(IV.11), se pot exprima toate în funcţie de parametrul θ_2, după cum urmează:

- din diagrama deplasărilor pe verticală:

$$\delta_3^v = a \cdot \theta_1 = 2a \cdot \theta_2$$

$$\delta_5^v = 2a \cdot \theta_1 = 4a \cdot \theta_2$$

$$\delta_7^v = 3a \cdot \theta_2 \; ; \; \delta_9^v = 2a \cdot \theta_2 \; ; \; \delta_{11}^v = a \cdot \theta_2$$

- din diagrama deplasărilor pe orizontală:

$$\delta_6^h = 0$$

$$\delta_8^h = h_1 \cdot \theta_2 \qquad \text{(IV.13)}$$

şi ştiind că triunghiurile (1,T), (1,2), 6 şi (1,T), (2,T), B sînt asemenea, rezultă:

$$\frac{h}{2a} = \frac{h_1}{6a} \quad \text{de unde:} \quad h_1 = 3h$$

deci, înlocuind în (IV.13):

$$\delta_8^h = 3h \cdot \theta_2$$

Inlocuind toate expresiile deplasărilor în expresia (IV.11.a) a efortului I_{6-8}, obţinem:

$$I_{6-8} = \frac{F(2a + 4a + 3a + 2a + a)\,\theta_2}{a + 3h \cdot \theta_2} = \frac{4Fa}{h} \quad \text{(IV.11.b)}$$

valoare care se poate verifica foarte uşor prin metoda secţiunilor.

b) Efortul din diagonala 5-8

Se înlocuieşte diagonala cu perechea de eforturi D_{5-8} şi se obţine mecanismul pentru deplasări virtuale din fig.IV.13.e, alcătuit din 4 corpuri, pentru care centrele restantanee necesare rezultă astfel:

- centrele instantanee de rotaţie (1,T), (1,2), (2,4), (1,3) şi (3,4) se obţin direct;

- centrul instantaneu relativ de rotaţie (1,4) se găseşte - conform teoremei coliniarităţii - la intersecţia direcţiilor (1,2) - (2,4) şi (1,3) - (3,4), deci la infinit pe direcţie orizontală;

- centrul instantaneu absolut (4,T) se găseşte la intersecţia direcţiei (1,T)- (1,4) [orizontala dusă din (1,T)], cu direcţia reazemului simplu din B;

- centrul instantaneu absolut (2,T) se găseşte la intersecţia direcţiilor (1,T) - (1,2) şi (4,T) - (2,4);

Se construieşte apoi diagrama deplasărilor pe verticală din fig.IV.13.f.

Ecuaţia de echilibru prin lucru mecanic virtual este următoarea:

$$F(- \delta_3^v - \delta_5^v + \delta_7^v + \delta_9^v + \delta_{11}^v) - D_{5-8} \cdot \delta_5^D - D_{5-8} \cdot \delta_8^D = 0$$

Din această relaţie în care s-au notat cu δ_5^D şi δ_8^D deplasările nodurilor 5 şi respectiv 8 pe direcţia diagonalei 5-8, rezultă:

$$D_{5-8} = \frac{F(-\delta_3^v - \delta_5^v + \delta_7^v + \delta_9^v + \delta_{11}^v)}{\delta_5^D + \delta_8^D} \qquad \text{(IV.14.a)}$$

Intrucît centrul relativ de rotaţie (1,4) este la infinit, rezultă că în diagrama deplasărilor pe verticală II' şi IV' sînt paralele (corpurile I şi IV se deplasează paralel unul faţă de celălalt) şi în consecinţă $\theta_1 = \theta_4 = \theta$.

Deplasările de la numărătorul relaţiei (IV.14.a) se pot deci scrie:

$$\delta_3^v = a \cdot \theta_1 = a \cdot \theta \; ; \quad \delta_5^v = 2a \cdot \theta_1 = 2a \cdot \theta \; ;$$

$$\delta_7^v = \delta_8^v = 3a \cdot \theta_4 = 3a \cdot \theta \; ; \quad \delta_9^v = 2a \cdot \theta_4 = 2a \cdot \theta \; ;$$

$$\delta_{11}^v = a \cdot \theta_4 = a \cdot \theta$$

Numitorul relaţiei (IV.14.a) reprezintă suma deplasărilor nodurilor 5 şi 8 pe direcţia diagonalei 5-8, adică deplasarea relativă dintre cele două noduri:

$$\delta_5^D + \delta_8^D = \delta_{5-8}^{rel\,(D)} \qquad \text{(IV.15)}$$

Această deplasare se poate exprima ca produsul dintre unghiul θ_{2-4} de rotire relativă între corpurile II şi IV şi raza vectoare d, măsurată din centrul relativ de rotaţie (2,4) perpendicular pe direcţia deplasării dintre nodurile 5 şi 8 (fig.IV.13.e):

$$\delta_{5-8}^{rel\,(D)} = \theta_{2-4} \cdot d \qquad \text{(IV.16)}$$

Din fig.IV.13.f se vede că:

$$\theta_{2-4} = \frac{\delta_6^v + \delta^v}{a} = \frac{2a\theta + 4a\theta}{a} = 6\theta$$

iar din fig.IV.13.e rezultă:

$$d = a \cdot \sin \varphi$$

deci, înlocuind în (IV.16):

$$\delta^{rel(D)}_{\overline{5-8}} = 6\theta \cdot a \cdot \sin \varphi$$

Înlocuind toate deplasările în expresia (IV.14.a), obţinem:

$$D_{\overline{5-8}} = \frac{F(-a-2a+3a+2a+a)\theta}{6a \cdot \sigma \cdot \sin \varphi} = \frac{0,5\ F}{\sin \varphi} \qquad \text{(IV.14.b)}$$

c) <u>Efortul din montantul 5-6</u>.

Pentru mecanismul din fig.IV.13.g, obţinut prin înlocuirea montantului cu perechea de eforturi V_{5-6}, centrele instantanee de rotaţii ale corpurilor I, IV şi II se determină la fel ca în cazul precedent. După ce se construieşte diagrama deplasărilor pe verticală din fig.IV.13.h, se scrie următoarea ecuaţie de echilibru prin lucru mecanic virtual:

$$F(\delta_3^v - \delta_5^v - \delta_7^v - \delta_9^v - \delta_{11}^v) - V_{5-6} \cdot \delta_5^v - V_{5-6} \cdot \delta_6^v = 0$$

din care rezultă:

$$V_{5-6} = \frac{F(\delta_3^v - \delta_5^v - \delta_7^v - \delta_9^v - \delta_{11}^v)}{\delta_5^v + \delta_6^v} \qquad \text{(IV.17.a)}$$

Deoarece centrul instantaneu relativ de rotaţie (1,4) este la infinit, $\sigma_1 = \sigma_4 = \sigma$ şi deci deplasările din relaţia (IV.17.a) au expresiile:

$$\delta_{1'} = a\theta_1 = a\theta$$
$$\delta_5 = 4a\theta_4 = 4a\theta$$
$$\delta_7 = 3a\,\theta_4 = 3a\theta$$
$$\delta_8 = 3a\,\theta_4 = 2a\,\theta$$
$$\delta_{11} = a\,\theta_4 = a\,\theta$$
$$\delta_6 = 2a\,\theta_1 = 2a\,\theta$$

Inlocuind în (IV.17.a), se obţine:

$$V_{5-6} = \frac{F(a-4a-3a-2a-a).\theta}{4a.\theta + 2a.\theta} = -1{,}5\,F \qquad (IV.17.b)$$

Semnul minus ne indică faptul că efortul din montantul 5-6 este de compresiune (perechea de eforturi V_{5-6} au fost puse iniţial în fig.IV.13.g ca eforturi de întindere).

Observaţii: 1. La construirea tuturor diagramelor de deplasări utilizate la acest exemplu, s-a considerat că deplasarea mecanismului s-a dat în sens invers perechii de eforturi introduse, adică totdeauna îndepărtînd nodurile din capetele barei înlocuite. Această convenţie se va păstra şi mai departe, la determinarea liniilor de influenţă pe cale cinematică.

2. Pentru determinarea deplasărilor necesare scrierii ecuaţiei de echilibru prin lucru mecanic virtual, se poate construi şi o epură de deplasări. O astfel de aplicaţie se va face în legătură cu rezolvarea grinzilor cu zăbrele complexe (paragr.IV.3.4.1 - punctul b).

IV.3. Grinzi cu zăbrele.

IV.3.1. Generalităţi.

Grinzile cu zăbrele, sisteme utilizate frecvent ca structuri de rezistenţă la acoperişurile construcţiilor industriale ca şi la podurile pentru căi terestre de comunicaţie, pot fi

clasificate după mai multe criterii, după cum urmează:

a) După forma conturului:

1. Grinzi cu zăbrele cu tălpi paralele (fig.IV.14.a.b)

2. Grinzi cu zăbrele cu tălpi poligonale sau curbe (fig.IV.14.c.d).

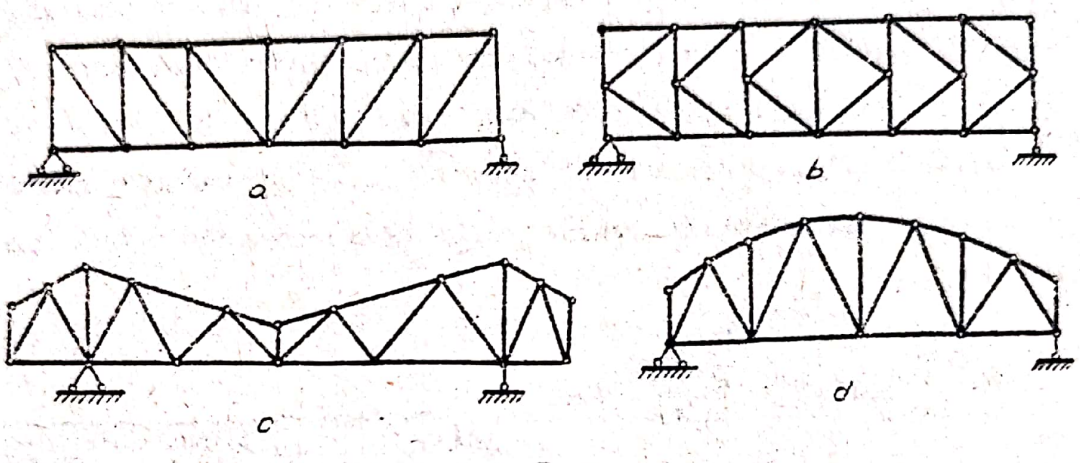


Fig IV 14

De notat că la ultimul tip de grinzi, nodurile tălpii superioare sînt dispuse pe o curbă(de obicei o parabolă), barele fiind însă rectilinii, atît pentru uşurinţa execuţiei, cît şi pentru a nu rezulta în bare efecte de încovoiere datorate curburii.

b) După modul de alcătuire:

1. Grinzi cu zăbrele simple - alcătuite din triunghiuri alăturate, nesuprapuse. Este cazul grinzilor prezentate în fig.IV.14.

După modul de distribuire a zăbrelelor, sistemele simple sînt de mai multe tipuri.

- cu sistem de zăbrele dreptunghiular - cînd tălpile sînt legate prin montanţi şi cîte o diagonală pe fiecare panou (fig.14.d);

- cu sistem de zăbrele triunghiular - cînd tălpile sînt legate printr-o succesiune de diagonale alternînd ca sens

(fig.IV.14,c);

- cu sistem de diagonale în K - atunci cînd tălpile sînt legate prin montanți și cîte o pereche de diagonale pe fiecare panou (fig.IV.14.b).

2. Grinzi cu zăbrele compuse - rezultate din combinarea sau suprapunerea mai multor sisteme simple. Se mai numesc și grinzi cu zăbrele cu bare suplimentare, chiar dacă numărul de bare respectă condiția de determinare statică ($2n = b + r$). In fig.IV.15 sînt prezentate cîteva tipuri de grinzi cu zăbrele compuse, rezultate în special din necesitatea de a mări numărul

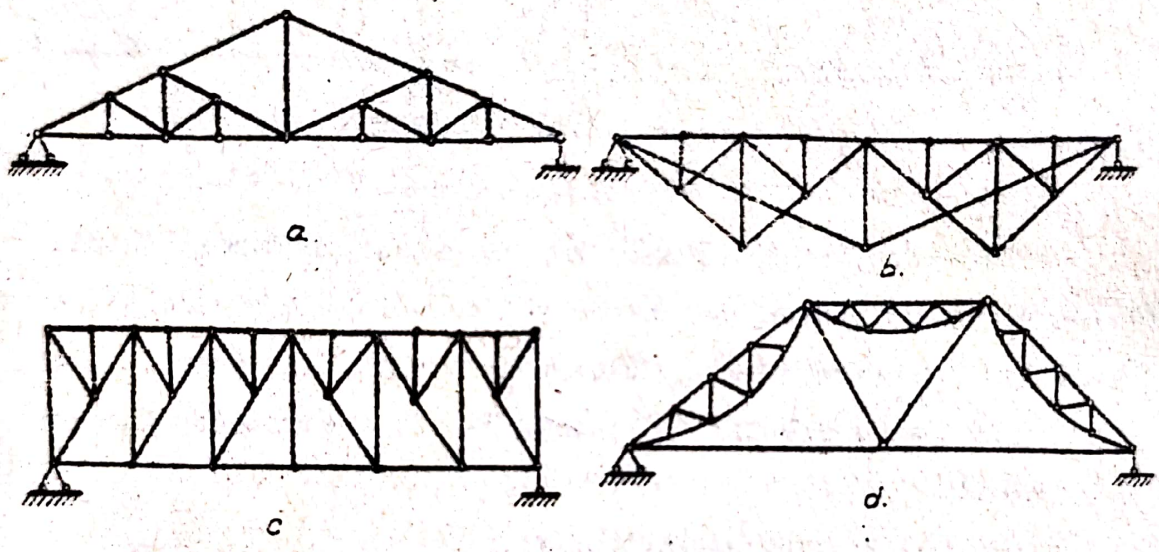


Fig. IV 15

de noduri de la talpa superioară (pentru reducerea lungimilor de flambaj) sau de la talpa inferioară (pentru o mai bună distribuire a încărcărilor).

3. Grinzi cu zăbrele complexe, care prin alcătuirea lor nu se pot încadra în grupa sistemelor simple sau compuse. Sînt sisteme cu alcătuiri mai complicate, rezultate fie din necesități constructive fie în cazul grinzilor pentru structuri de poduri - și din considerente estetice.

In fig.IV.16 sînt prezentate cîteva exemple de sisteme

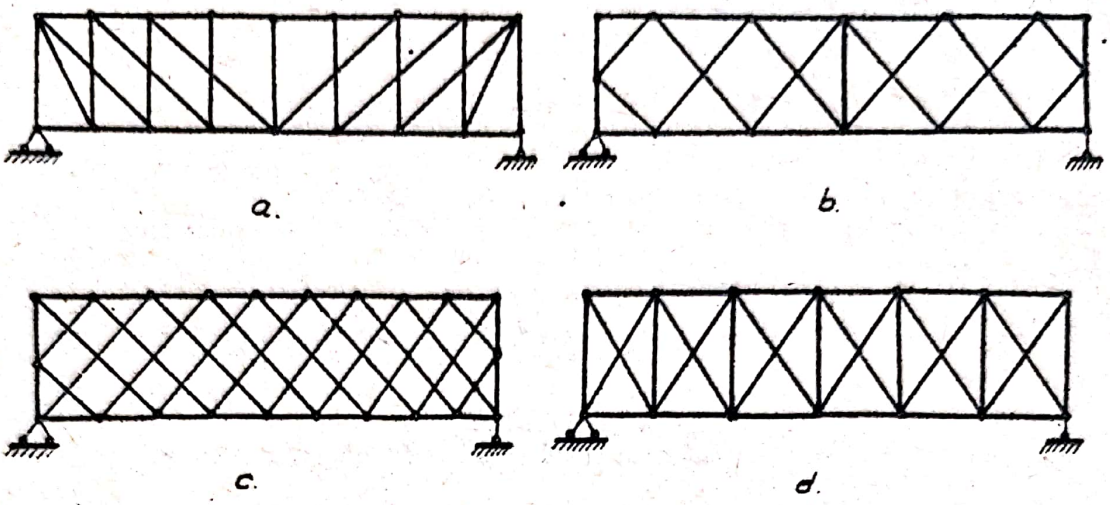


Fig. IV.16

complexe și anume: grindă cu zăbrele sistem dublu dreptunghiular (a), grindă cu zăbrele sistem dublu triunghiular (b), grindă cu zăbrele cu diagonale multiple (c) și grindă cu zăbrele sistem combinat (d).

Trebuie notat că sistemul (c) este odată static nedeterminat ($2n = 2 \times 22 = 44$, $b + r = 42 + 3 = 45$), iar sistemul (d) este de 6 ori static nedeterminat dacă diagonalele sînt bare rigide, sau static determinat dacă diagonalele sînt realizate din cabluri(în acest ultim caz, pe fiecare panou va lucra numai diagonala întinsă).

In fig.IV.17 sînt prezentate cîteva realizări mai importante, a căror structură de rezistență o constituie grinzile cu zăbrele.

In continuare, se analizează modul de calcul al celor trei categorii de grinzi cu zăbrele (simple, compuse, complexe), la acțiunea sarcinilor fixe și a sarcinilor mobile.

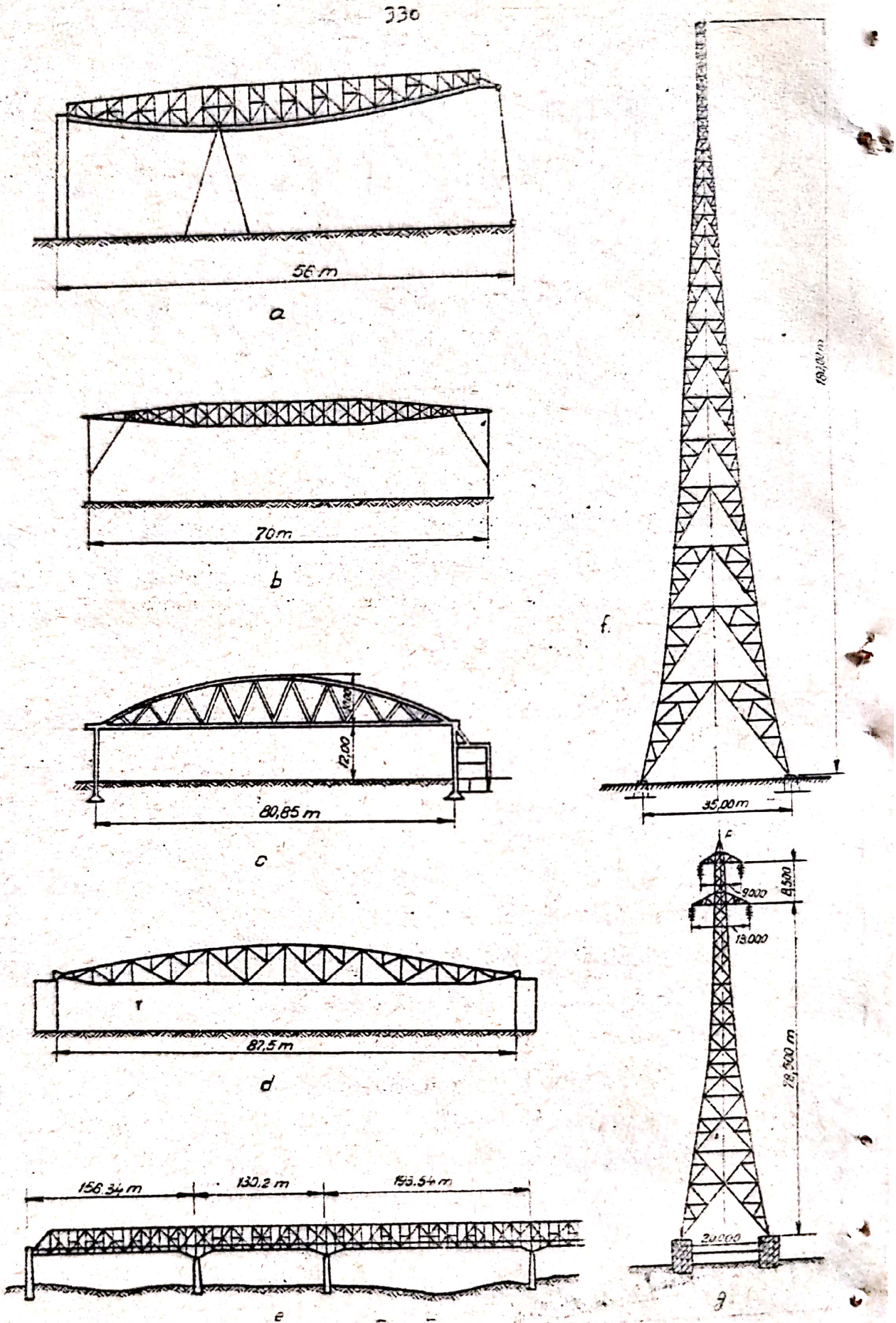

56 m
a
70 m
b
12,00
80,85 m
c
87,5 m
d
156,34 m
130,2 m
193,54 m
e
f
35,00 m
9000
8,500
13,000
78,500 m
20000
g

Fig IV 17

IV.3.2. Grinzi cu zăbrele simple.

IV.3.2.1. Calculul la sarcini fixe.

Pentru determinarea eforturilor din barele acestor sisteme cu zăbrele se folosesc metodele generale analizate în subcapitolul IV.2, adică metoda secţiunilor şi metoda izolării nodurilor (nu se mai revine asupra utilizării principiului deplasărilor virtuale, care este aceeaşi pentru toate sistemele şi a fost expusă în paragraful IV.2.3).

Intrucît metoda izolării nodurilor sub formă grafică (epură Cremona) este absolut generală, nu se va mai reveni asupra ei şi în cele ce urmează se vor analiza doar cîteva particularităţi de aplicare practică a procedeelor analitice şi unele principii de alcătuire raţională, în funcţie de tipurile de grinzi cu zăbrele simple utilizate în construcţii.

a) Grinzi cu tălpi paralele.

Rezolvarea pe cale analitică a acestor grinzi (fig.IV.18. a) se face astfel:

- Pentru determinarea eforturilor din barele tălpilor şi din diagonale, se fac secţiuni de tipul I-I şi rezultă (fig. IV.18.d):

$$M_{(3)} = 0: \; V_A \cdot a - F_2 \cdot a - I_{4-6} \cdot h = 0$$

deci:
$$I_{4-6} = \frac{V_A \cdot a - F_2 \cdot a}{h} = \frac{M_3^0}{h} \qquad (IV.18)$$

$$M_{(6)} = 0: \; V_A \cdot 2a - F_2 \cdot 2a - F_2 \cdot a + S_{3-5} \cdot h = 0$$

deci:
$$S_{3-5} = - \frac{V_A \cdot 2a - F_2 \cdot 2a - F_3 \cdot a}{h} = - \frac{M_3^0}{h} \qquad (IV.19)$$

$$\Sigma Y = 0: \; V_A - F_2 - F_3 - D_{3-6} \cdot \sin \varphi = 0$$

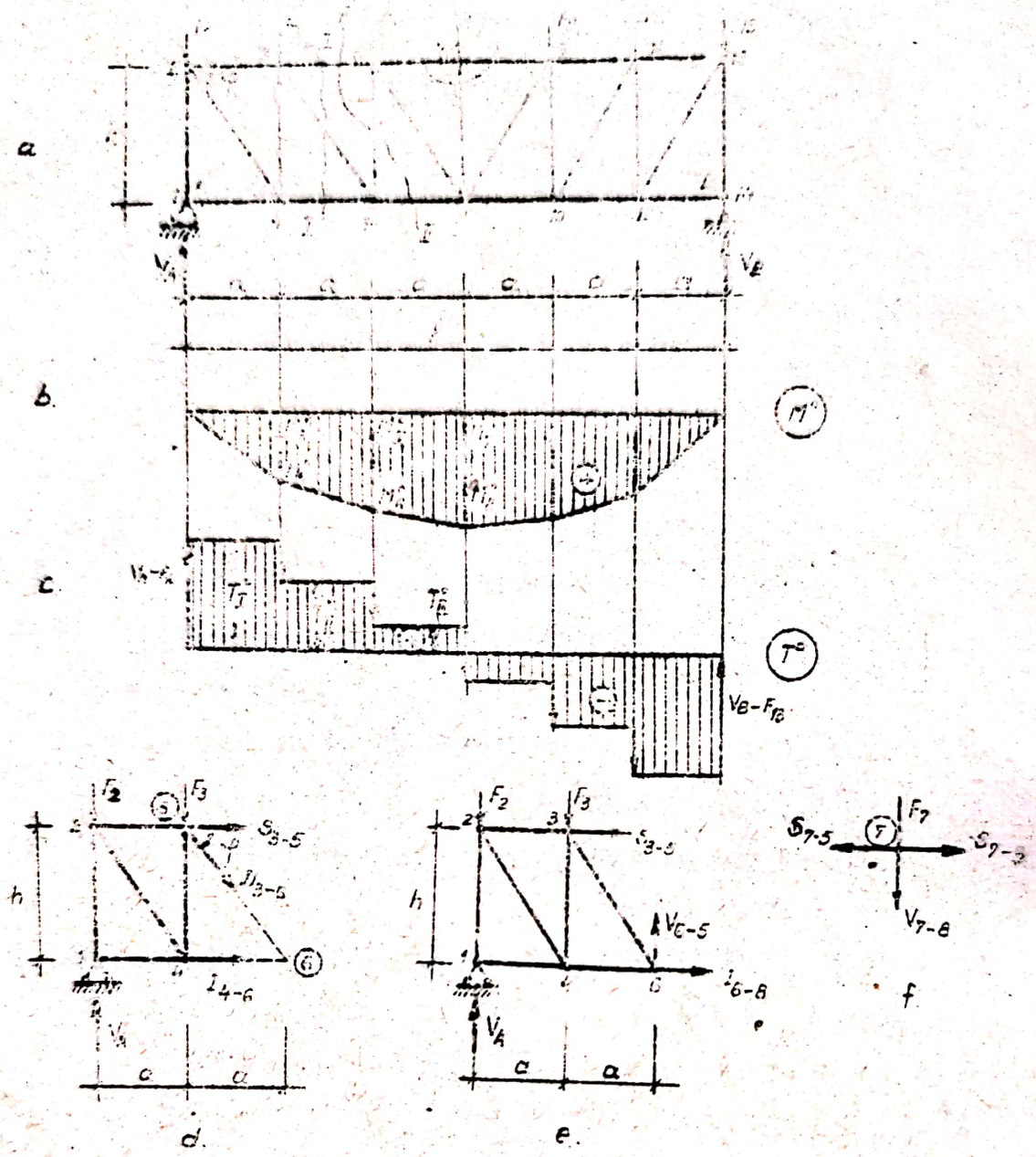


Fig. IV.18

deci:

$$D_{3-6} = \frac{V_A - F_2 - F_3}{\sin\varphi} = \frac{T^0_{II}}{\sin\varphi} \qquad \text{(IV.20)},$$

- Pentru determinarea eforturilor din montanții curenți, se face secțiuni de tipul I-I și rezultă (fig.IV.18.c):

$$\sum Y = 0 : V_A - F_2 - F_3 + V_{6-5} = 0$$

deci:

$$V_{6-5} = -(V_A - F_2 - F_3) = -T^0_{II} \qquad (IV.21.a)$$

Observaţie: Dacă sarcinile se aplică la talpa inferioară atunci ecuaţia de proiecţie pe orizontală este:

$$V_A - F_4 - F_6 - V_{6-5} = 0$$

deci:

$$V_{6-5} = -(V_A - F_4 - F_6) = -T^0_{III} \qquad (IV.21.b)$$

ceea ce arată că eforturile din montanţi depind de talpa pe care acţionează sarcinile, lucru care nu se întîmplă în ceea ce priveşte eforturile din barele tălpilor şi din diagonale.

Se mai constată că eforturile din barele tălpilor, din diagonale şi montanţi, se determină în funcţie de momentele şi forţele tăietoare ale unei grinzi simplu rezemate de deschidere l şi încărcată cu sarcinile care acţionează grinda cu zăbrele, ale cărei diagrame sînt trasate în fig.IV.18.b şi c.

O altă constatare importantă se referă la faptul că la sistemul considerat, rezultă eforturi axiale de întindere în diagonale şi eforturi de compresiune în montanţi, (fig.IV.19.a) ceea ce este avantajos, datorită faptului că barele cu lungimea

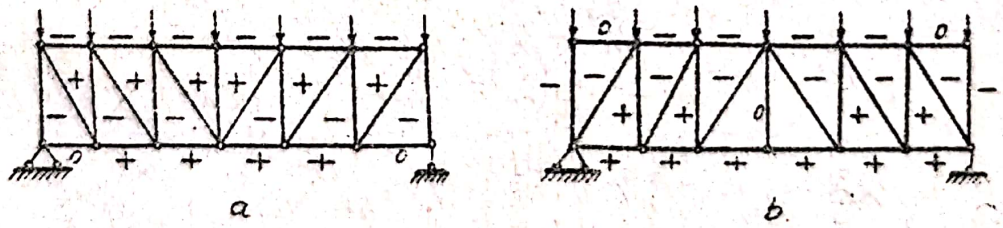


Fig. IV. 19

cea mai mare (diagonalele) sînt întinse, reducîndu-se astfel pericolul de pierdere a stabilităţii. Soluţia cu diagonalele dispuse invers (ascendente pe prima jumătate a grinzii şi des-

cendente pe a doua jumătate - fig.IV.19.b), cînd se constată uşor că semnele eforturilor din zăbrele se inversează, este de aceea mai puţin recomandabilă.

- Pentru determinarea eforturilor din momentul central, se izolează nodul 7 (fig.IV.18.f) şi rezultă:

$$\Sigma Y = 0 : \quad F_7 + V_{7-8} = 0$$

deci:

$$V_{7-8} = - F_7 \qquad \text{(IV.22.a)}$$

Dacă sarcinile se aplică la talpa inferioară, rezultă, evident:

$$V_{7-8} = 0 \qquad \text{(IV.22.b)}$$

deci este vorba de un montant suplimentar, a cărui existenţă este totuşi necesară chiar şi în cazul aplicării sarcinilor în nodurile tălpii inferioare, pentru obţinerea unor lungimi cît mai mici ale barelor comprimate ale tălpii superioare.

b) Grinzi cu tălpi poligonale.

Aplicarea formei analitice (Ritter) a metodei secţiunilor pentru aceste tipuri de grinzi, a fost discutată în legătură cu grinda din fig.IV.8, încît pentru sistemul din fig.IV.20.a vom putea scrie direct:

- Folosind secţiunea I-I (fig.IV.20.b):

$$I_{4-6} = \frac{M_3^0}{d_3} = \frac{M_3^0}{h_3 \cdot \cos\beta} \qquad \text{(IV.23)}$$

$$S_{3-5} = - \frac{M_6^0}{d_6} = \frac{M_6^0}{h_6 \cdot \cos\alpha} \qquad \text{(IV.24)}$$

$$D_{3-6} = \pm \frac{M_K}{d_K} \qquad \text{(IV.25)}$$

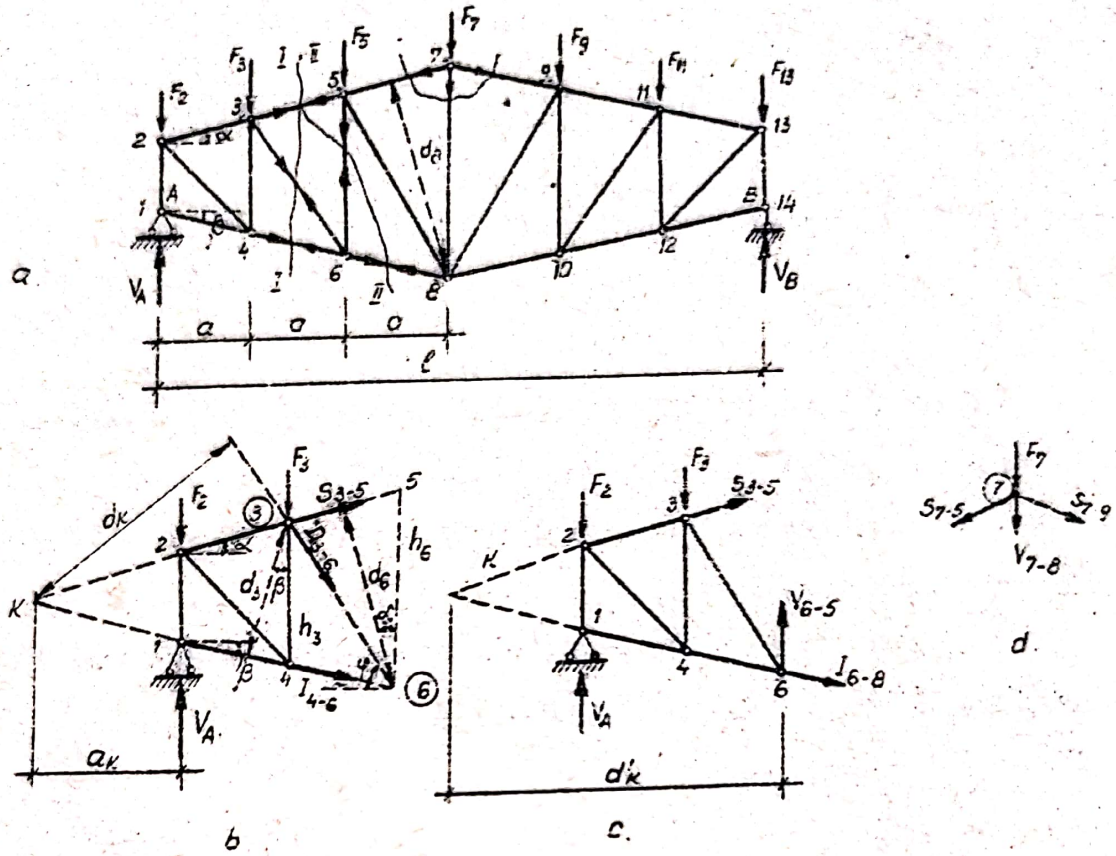


Fig. IV.20

Pentru a analiza semnul efortului din diagonală, scriem ecuaţia de echilibru prin proiecţia pe orizontală a forţelor din stînga secţiunii I-I:

$$\Sigma X = 0 : D_{3-6}\cdot\cos\varphi + S_{3-5}\cdot\cos\alpha + I_{4-6}\cdot\cos\beta = 0$$

şi ţinînd cont de (IV.23) şi (IV.24), rezultă:

$$D_{3-6}\cos\varphi = \frac{M_6^0}{h_6} - \frac{M_3^0}{h_3} \qquad (IV.26)$$

Relaţia (IV.26) ne arată că semnul efortului din diagonală depinde de valoarea relativă a celor două rapoarte dintre momentele la grinda simplu rezemată încărcată cu sarcinile care acţionează grinda cu zăbrele şi înălţimile grinzii în dreptul nodurilor 6 şi 3, deci în ultimă instanţă de variaţia

relativă a momentelor M^0 și a înălțimii grinzii cu zăbrele pe distanța panoului II.

În funcție de această variație efortul din diagonală poate fi de întindere sau compresiune.

Folosind secțiunea II-II (fig.IV.20.c):

$$V_{6-5} = \mp \frac{M_K}{d_k} \qquad (IV.27)$$

Pentru semnul eforturilor din montanți, rămîne valabilă observația făcută în legătură cu eforturile din diagonale, adăugînd că în cazul diagonalelor întinse, montanții sînt comprimați și invers.

Efortul din momentul central se determină prin izolarea nodului 7 (fig.IV.20.d) și rezultă:

$$\sum X = 0: \quad S_{7-5} \cdot \cos\alpha - S_{7-9} \cdot \cos\alpha = 0$$

deci:

$$S_{7-5} = S_{7-9} \qquad (IV.28)$$

$$\sum Y = 0: \quad F_7 + S_{7-5} \cdot \sin\alpha + S_{7-9} \cdot \sin\alpha + V_{7-8} = 0$$

și ținînd cont de (IV.28):

$$V_{7-8} = -F_7 - 2S_{7-5} \cdot \sin\alpha = -F_7 + 2\frac{M^0_8}{d_8}\sin\alpha \qquad (IV.29)$$

Deci, montantul central nu mai este în acest caz un montant suplimentar, avînd efort axial chiar dacă în nodul 8 nu este aplicată o sarcină.

c) Grinzi cu diagonale în E.

Așa după cum rezultă din relațiile (IV.18), (IV.19), (IV.23) și (IV.24), prin mărirea înălțimii grinzilor cu zăbrele se pot reduce valorile eforturilor din barele tălpilor. Cum însă de obicei montanții sînt comprimați, apare problema asigurării

stabilităţii acestor bare. Una din posibilităţile de realizare a acestui deziderat este crearea unor noduri intermediare pe înălţimea montanţilor, ceea ce se obţine prin utilizarea sistemului de zăbrele în K, avînd căte două diagonale pe fiecare panou (fig.IV.21.a,b).

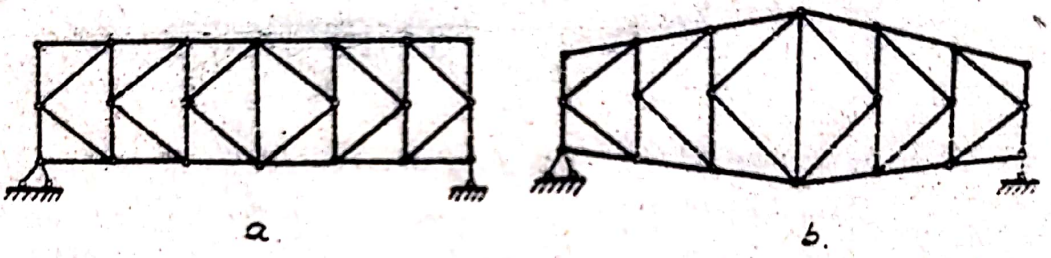


Fig. IV 21

Calculul acestor sisteme cu zăbrele se face prin folosirea combinată a metodei secţiunilor şi metodei izolării nodurilor.

Se consideră pentru exemplificare grinda cu zăbrele cu tălpi paralele din fig.IV.22.a.

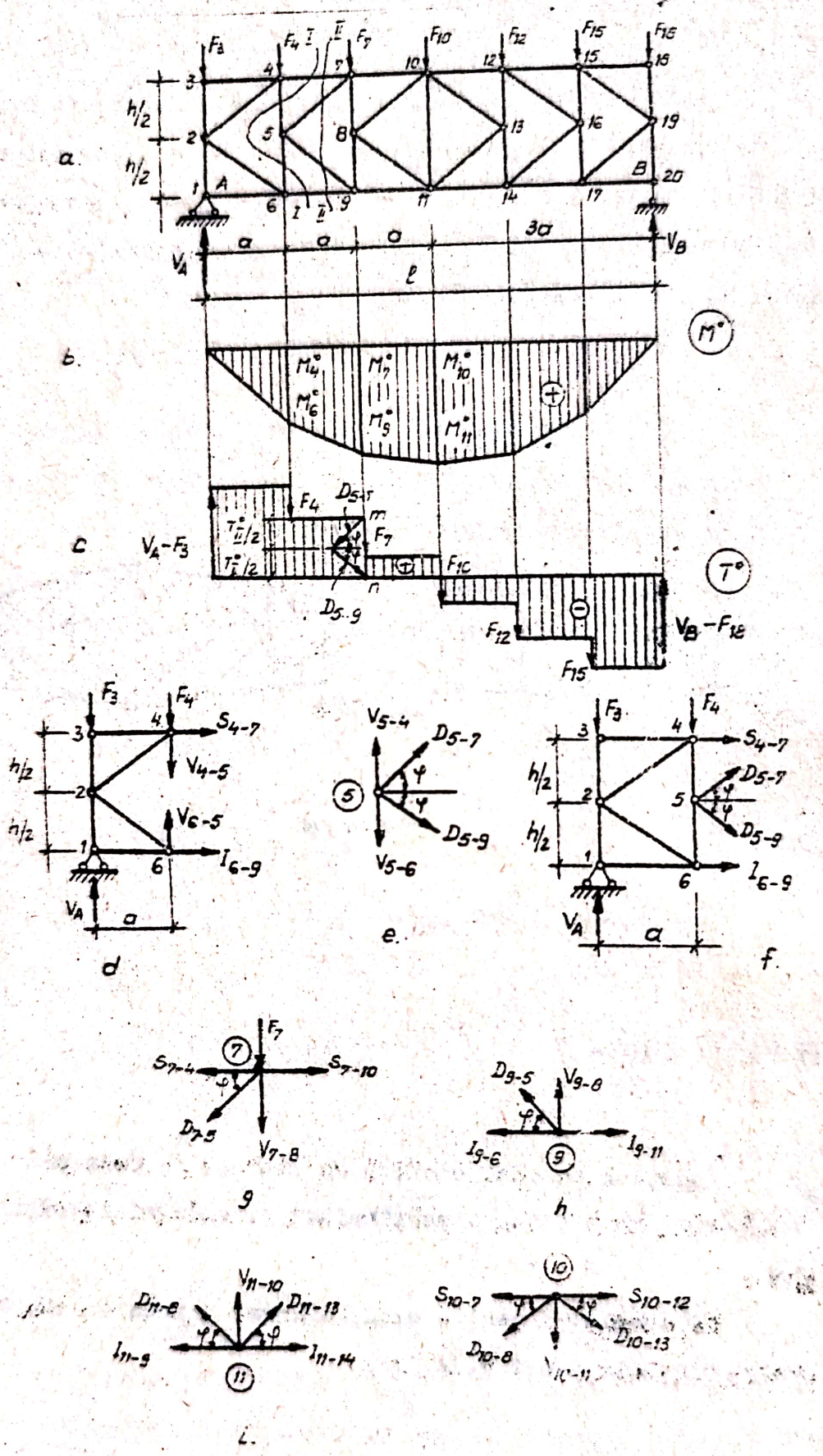

a.
b.
c
d
e.
f.
g
h.
i.
F_3
F_4
F_7
F_{10}
F_{12}
F_{15}
F_{18}
$h/2$
V_A
V_B
a
$3a$
l
M°
T°
$V_A - F_3$
$V_B - F_{18}$
D_{5-7}
D_{5-9}
S_{4-7}
V_{4-5}
V_{6-5}
I_{6-9}
V_{5-4}
V_{5-6}
S_{7-4}
S_{7-10}
D_{7-5}
V_{7-8}
D_{9-5}
V_{9-8}
I_{9-6}
I_{9-11}
V_{11-10}
D_{11-8}
D_{11-13}
I_{11-9}
I_{11-14}
S_{10-7}
S_{10-12}
D_{10-8}
D_{10-13}

Fig. IV 22

Pentru calculul eforturilor din barele tălpilor, se fac secţiuni de tipul I-I (fig.IV.22.a şi d) şi se scriu ecuaţii de momente în raport cu puncte de intersecţie a cîte trei bare:

$$M_{(4)} = 0: \quad V_A \cdot a - F_3 \cdot a - I_{6-9} \cdot h = 0$$

deci:

$$I_{6-9} = \frac{V_A \cdot a - F_3 \cdot a}{h} = \frac{M_4^0}{h} \qquad (IV.30)$$

$$M_{(6)} = 0: \quad V_A \cdot a - F_3 \cdot a + S_{4-7} \cdot h = 0$$

deci:

$$S_{4-7} = - \frac{V_A \cdot a - F_3 \cdot a}{h} = - \frac{M_6^0}{h} \qquad (IV.31)$$

Valorile M_4^0 şi M_6^0 sînt egale (fig.IV.22.b), deci eforturile din barele 6-9 şi 4-7 ale tălpilor, de pe acelaşi panou, sînt egale şi de sens contrar.

Pentru a determina eforturile din diagonale, se secţionează nodurile intermediar (fig.IV.22,e) şi rezultă:

$$\Sigma X = 0: \quad D_{5-7} \cdot \cos \varphi + D_{5-9} \cdot \cos \varphi = 0$$

deci:

$$D_{5-7} = - D_{5-9} \qquad (IV.32)$$

ceea ce ne arată că în diagramele de pe acelaşi panou, eforturile sînt egale şi de sens contrar.

Făcînd apoi secţiuni de tipul II-II (fig.IV.22.a şi f), şi scriind ecuaţia de proiecţie pe verticală, rezultă:

$$\Sigma Y = 0: \quad V_A - F_3 - F_4 + D_{5-7} \cdot \sin \varphi - D_{5-9} \cdot \sin \varphi = 0$$

sau, ţinînd cont de (IV.32):

$$D_{5-7} = - \frac{V_A - F_3 - F_4}{2 \sin \varphi} = - \frac{T_{II}^0}{2 \sin \varphi} \qquad (IV.33)$$

şi:

$$D_{5-9} = - D_{5-7} = \frac{T^0_{II}}{2 \sin \varphi} \qquad (IV.34)$$

In fig.IV.22.c sînt indicate mărimile acestor eforturi, obţinute direct prin ducerea din m şi n a unor paralele la direcţiile celor două diagonale în diagrama T^0, pe înălţimea segmentelor $T^0_{II}/2$.

Eforturile din montanţi se determină prin izolarea nodurilor:

- Pentru cazul sarcinilor aplicate în nodurile tălpii superioare:

- izolînd nodul 7 (fig.IV.22.g):

$$\Sigma X = 0: \quad F_7 + D_{7-5} \cdot \sin \varphi + V_{7-\bar{8}} = 0$$

sau, ţinînd cont şi de (IV.33):

$$V_{7-\bar{8}} = - D_{7-5} \cdot \sin \varphi - F_7 = \frac{T^0_{II}}{2} - F_7 \qquad (IV.35.a)$$

- izolînd nodul 9 (fig.IV.22.h):

$$\Sigma Y = 0: \quad D_{9-5} \cdot \sin \varphi + V_{9-\bar{8}} = 0$$

sau, ţinînd cont şi de (IV.34):

$$V_{9-\bar{8}} = - D_{9-5} \cdot \sin \varphi = - \frac{T^0_{II}}{2} \qquad (IV.36.a)$$

- Pentru cazul sarcinilor aplicate la nodurile tălpii inferioare:

- izolînd nodul 7, rezultă:

$$V_{7-\bar{8}} = \frac{T^0_{II}}{2} \qquad (IV.35.b)$$

- izolînd nodul 9, rezultă

$$V_{9-\bar{8}} = F_9 - \frac{T^0_{II}}{2} \qquad (IV.36.b)$$

Efortul din montantul central se determină de asemenea prin izolarea nodurilor:

- dacă sarcinile sînt aplicate în nodurile tălpii superioare, se izolează nodul 11 (fig.IV.22.i) și rezultă:

$$\Sigma Y = 0: \quad D_{11-\bar{8}} \sin\varphi + D_{11-13} \sin\varphi + V_{11-10} = 0$$

și știind că:

$$D_{11-\bar{8}} = \frac{T^o_{III}}{2\sin\varphi}; \quad D_{11-13} = -\frac{T^o_{IV}}{2\sin\varphi}$$

se obține:

$$V_{11-10} = -D_{11-\bar{8}}\sin\varphi - D_{11-13}\sin\varphi = \frac{T^o_{IV}-T^o_{IV}}{2} = \frac{F_{10}}{2} \qquad (IV.37.a)$$

- Dacă sarcinile acționează în nodurile tălpii inferioare, se izolează nodul 10(fig.IV.22.j) și rezultă:

$$\Sigma Y = 0: \quad D_{10-\bar{8}} \sin\varphi + D_{10-13} \sin\varphi + V_{10-11} = 0$$

și știind că:

$$D_{10-\bar{8}} = -\frac{T^o_{III}}{2\sin\varphi}; \quad D_{10-13} = \frac{T^o_{IV}}{2\sin\varphi}$$

se obține:

$$V_{10-11} = -D_{10-\bar{8}}\sin\varphi - D_{10-13}\sin\varphi = \frac{T^o_{III}-T^o_{IV}}{2} = \frac{F_{11}}{2} \qquad (IV.37.b)$$

Se constată și la acest tip de grinzi cu zăbrele că numai eforturile din montanți au valori diferite dacă sarcinile se aplică în nodurile tălpii superioare sau în nodurile tălpii inferioare; pentru celelalte tipuri de bare, eforturile nu sînt influențate de această modificare a poziției sarcinilor.

IV.3.2.2. <u>Calculul la sarcini mobile.</u>

Determinarea eforturilor maxime produse în barele sistemelor cu zăbrele de către convoaiele de sarcini mobile se face prin utilizarea liniilor de influență, care reprezintă în acest caz variații ale eforturilor din bare, produse de acțiu-

nea unei sarcini unitare mobile.

Pentru respectarea ipotezei de transmitere a sarcinilor numai în nodurile sistemului, se va subînţelege totdeauna existenţa în aceste noduri a unor elemente transversale(antretoaze) şi a unei căi indicate de acţionare a sarcinilor mobile (longeroni).

Elementele generale în legătură cu liniile de influenţă au fost analizate la structurile prezentate în capitolele precedente şi de aceea se trece direct la exemplificarea modului de trasare a liniilor de influenţă pentru eforturile din barele grinzilor cu zăbrele simple, pe cele două căi - analitică şi cinematică.

IV.3.2.2.1. Determinarea liniilor de influenţă pe cale analitică.

Pentru stabilirea expresiei eforturilor produse de acţiunea unitară mobilă, se folosesc metodele generale (metoda secţiunilor sau metoda izolării nodurilor), în funcţie de tipul de grindă şi de bara al cărei efort maxim dorim să-l determinăm.

a) Grinzi cu tălpi paralele.

Aşa cum s-a văzut la calculul la acţiunea sarcinilor fixe, eforturile din barele acestui tip de grinzi cu zăbrele se pot exprima în funcţie de momentele şi forţele tăietoare la o grindă simplu rezemată de aceeaşi deschidere cu grinda dată. Aceasta facilitează trasarea liniilor de influenţă, aşa cum se va vedea în legătură cu grinda din fig.IV.23.a.

- Linia de influenţă a efortului din bara 4-6.

Făcînd secţiunea I-I, se poate scrie:

$$I_{4-6} = \frac{M_3^0}{h}$$

deci linia de influenţă a efortului din această bară, se obţine

trasînd linia de influenţă a momentului M_3^D şi împărţind toate ordonatele prin h (fig.IV.23,b).

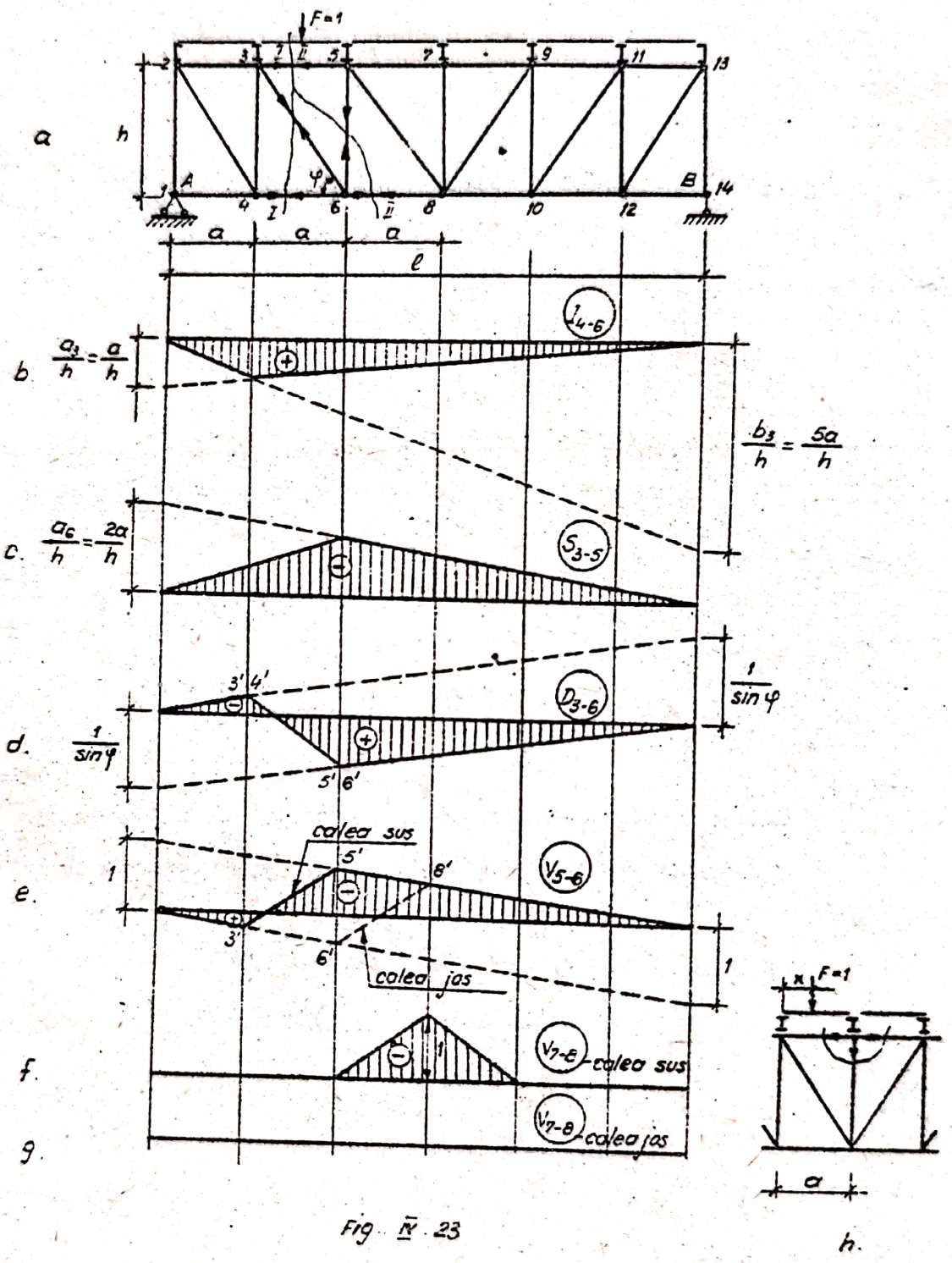


Fig. IV.23

-Linia de influenţă a efortului din bara 3-5.

Folosind secţiunea I-I, putem scrie:

$$S_{3-5} = - \frac{M_6^0}{h}$$

linia de influenţă fiind trasată în fig.IV.23.c (este linia de influenţă a momentului M_6^0, cu semn schimbat şi cu toate ordonatele împărţite prin h);

-<u>Linia de influenţă a efortului din diagonala 3-6</u>.

Scriind ecuaţia de proiecţie pe verticală a forţelor din stînga secţiunii I-I, se obţine:

$$D_{3-6} = \frac{T_{II}^0}{\sin \varphi}$$

deci linia de influenţă se obţine din cea a forţei tăietoare din panoul II la grinda simplu rezemată, la care toate ordonatele se împart cu sin φ (fig.IV.23.d)

-<u>Linia de influenţă a efortului din montantul 5-6</u>.

Făcînd secţiunea II-II, se poate scrie:

- pentru calea pe talpa superioară (calea sus):

$$V_{6-5} = - T_{II}^0$$

linia de influenţă fiind trasată în fig.II.23.e, cu corecţia pentru transmiterea indirectă a sarcinii unitare între nodurile 3 şi 5;

- pentru calea pe talpa inferioară (calea jos):

$$V_{6-5} = - T_{III}^0$$

corecţia fiind făcută în acest caz între nodurile 6 şi $\bar{8}$ (fig. IV.23.e).

Se reconfirmă astfel dependenta eforturilor din montanţi, de talpa pe care se găsesc încărcările.

- <u>Pentru efortul din montantul central 7-$\bar{8}$</u>.

Considerînd sarcina unitară pe panoul 5-7 şi izolînd nodul 7 (fig.IV.23.h), rezultă:

$$V_{7-8} + \frac{1 \cdot x}{a} = 0 \quad \text{deci} \quad V_{7-8} = -\frac{1 \cdot x}{a}$$

- pentru $x = 0$: $V_{7-8} = 0$
- pentru $x = a$: $V_{7-8} = -1$

şi procedînd la fel şi pentru cazul sarcinii unitare pe panoul 7-9, se obţine linia de influenţă din fig.IV.23.f.

Evident că atunci cînd sarcina unitară se găseşte pe alte panouri decît 5-7 sau 7-9, încărcarea din nodul 7 este zero, deci efortul din montantul central este nul, montantul fiind o bară suplimentară în sensul că preia eforturi numai din încărcări locale.

Dacă sarcina unitară este la talpa inferioară (calea jos), încărcarea din nodul 7 este tot timpul zero, deci în montantul central nu apare efort axial (fig.IV.23.g).

b) <u>Grinzi cu tălpi poligonale.</u>

Pentru eforturile din barele tălpilor grinzii cu zăbrele din fig.IV.24.a, liniile de influenţă se trasează simplu, întrucît folosind de exemplu secţiunea I-I, rezultă:

$$I_{3-5} = \frac{M_4^0}{d_4}$$

$$S_{2-4} = \frac{M_3^0}{d_3}$$

Liniile de influenţă corespunzătoare sînt reprezentate în fig.IV.24.b şi c, cu observaţia că la prima linie de influenţă, pentru calea jos (calea se va realiza desigur, pe talpa rectilinie), este necesară corecţia pentru transmiterea indirectă a sarcinii unitare, pe panoul 3-5.

Pentru efortul din diagonala 3-4, folosim ecuaţia de momente faţă de punctul K de intersecţie a barelor 2-4 şi 3-5 şi considerăm cele două poziţii caracteristice ale sarcinii unitare:

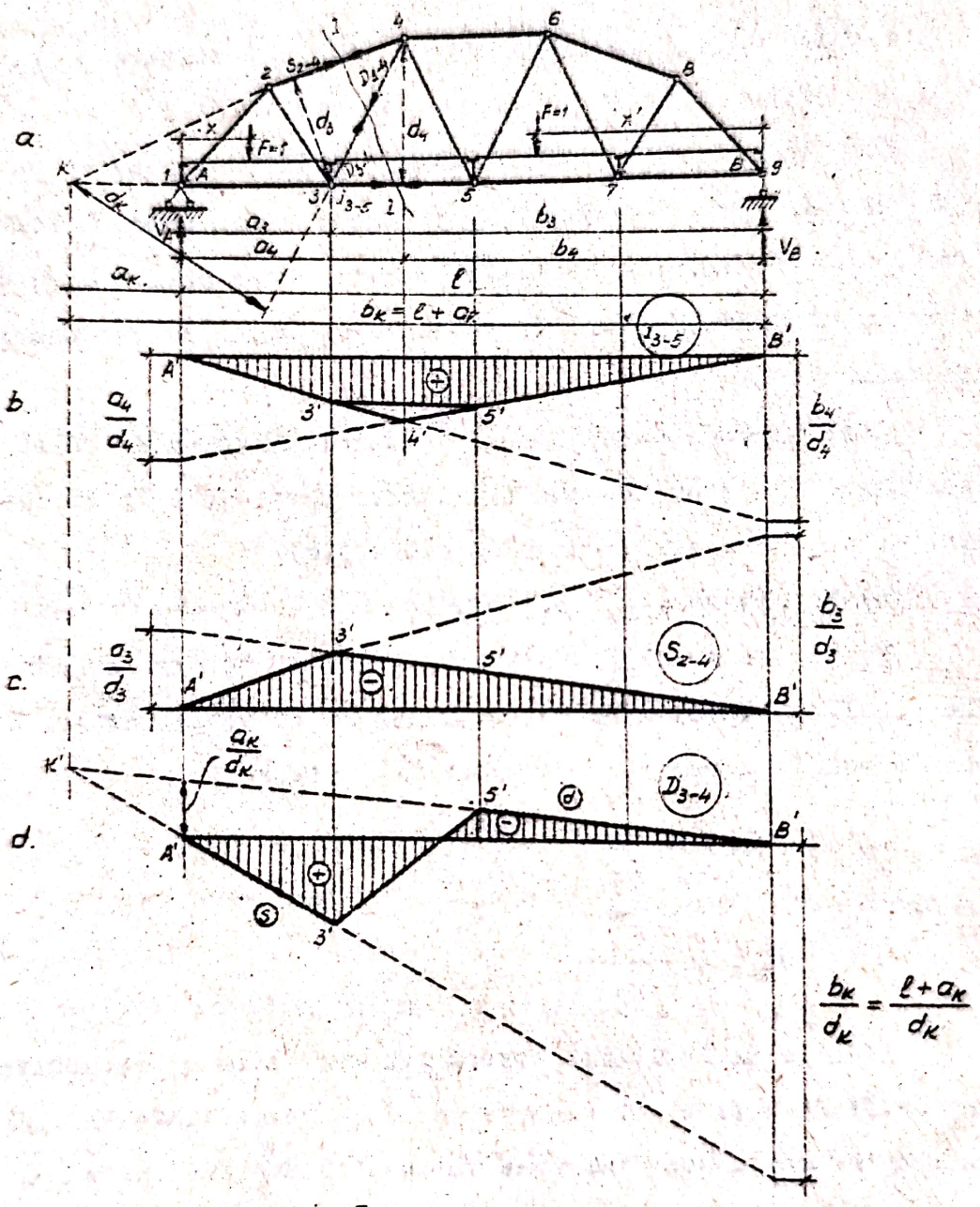


Fig IV. 24

Scanned with OKEN Scanner

F = 1 la stînga panoului secţionat:

$$M_{(k)}^{(dr)} = 0: \; D_{3-4} \cdot d_k - V_B \cdot b_k = 0$$

$$\text{deci: } D_{3-4} = V_B \frac{b_k}{d_k} = \frac{1.x}{\ell} \cdot \frac{b_k}{d_k}$$

şi se obţine:

- pentru $x = 0$: $D_{3-4} = 0$
- pentru $x = \ell$: $y_B = \frac{b_k}{d_k}$

valori cu care se trasează ramura de stînga (s) a liniei de influenţă.

F = 1 în dreapta panoului secţionat:

$$M_{(k)}^{(st)} = 0 : D_{3-4} \cdot d_k - V_A \cdot a_k = 0$$

deci:

$$D_{3-4} = - V_A \frac{a_k}{d_k} = -\frac{1.x'}{\ell} \cdot \frac{a_k}{d_k}$$

şi se obţine:

- pentru $x' = \ell$: $y_A = - \frac{a_k}{d_k}$

- pentru $x' = 0$: $D_{3-4} = 0$

valori cu care se trasează ramura de dreapta (d) a liniei de influenţă.

Ramura de stînga este valabilă pînă în dreptul nodului 3, cea de treapta pînă în dreptul nodului 5, şi unind liniar între ordonatele respective din 3' şi 5', se obţine linia de influenţă din fig.IV.24.d.

Dacă se calculează ordonatele celor două ramuri în dreptul punctului k, se obţine:

- pentru ramura de stînga:

$$x = a_k : \quad y_k^{(s)} = -\frac{a_k}{\ell} \cdot \frac{b_k}{d_k}$$

- pentru ramura de dreapta:

$$x' = b_k : \quad y_k^{(d)} = -\frac{b_k}{\ell} \cdot \frac{a_k}{d_k}$$

deci, cele două ramuri ale liniei de influenţă se intersectează în dreptul proiecţiei punctului K.

Pe baza celor analizate pînă aici, se poate deduce un procedeu general pentru determinarea liniilor de influenţă ale eforturilor din barele grinzilor cu zăbrele simplu rezemate.

Astfel, dacă expresia efortului axial N_{ij} este de forma:

$$N_{ij} = \frac{M_k}{d_k} \qquad (IV.38)$$

unde K este un punct situat între reazemele grinzii sau în afara lor, iar d_k este braţul efortului N_{ij} faţă de punctul K; dacă se notează cu a_k şi b_k distanţele de la punctul K la reazemele A şi respectiv B ale grinzii, linia de influenţă se construieşte ştiind că:

- ramura de stînga are ordonata zero în dreptul reazemului A şi ordonata b_k/d_k în dreptul reazemului B, fiind valabilă din A' pînă în dreptul nodului din stînga secţiunii făcute pentru determinarea expresiei efortului N_{ij};

- ramura de dreapta are ordonata a_k/d_k în dreptul reazemului A şi ordonata zero în dreptul reazemului B, fiind valabilă de la B' pînă în dreptul nodului din dreapta secţiunii făcute pentru aflarea expresiei efortului N_{ij};

- cele două ramuri se intersectează în dreptul proiecţiei punctului K;

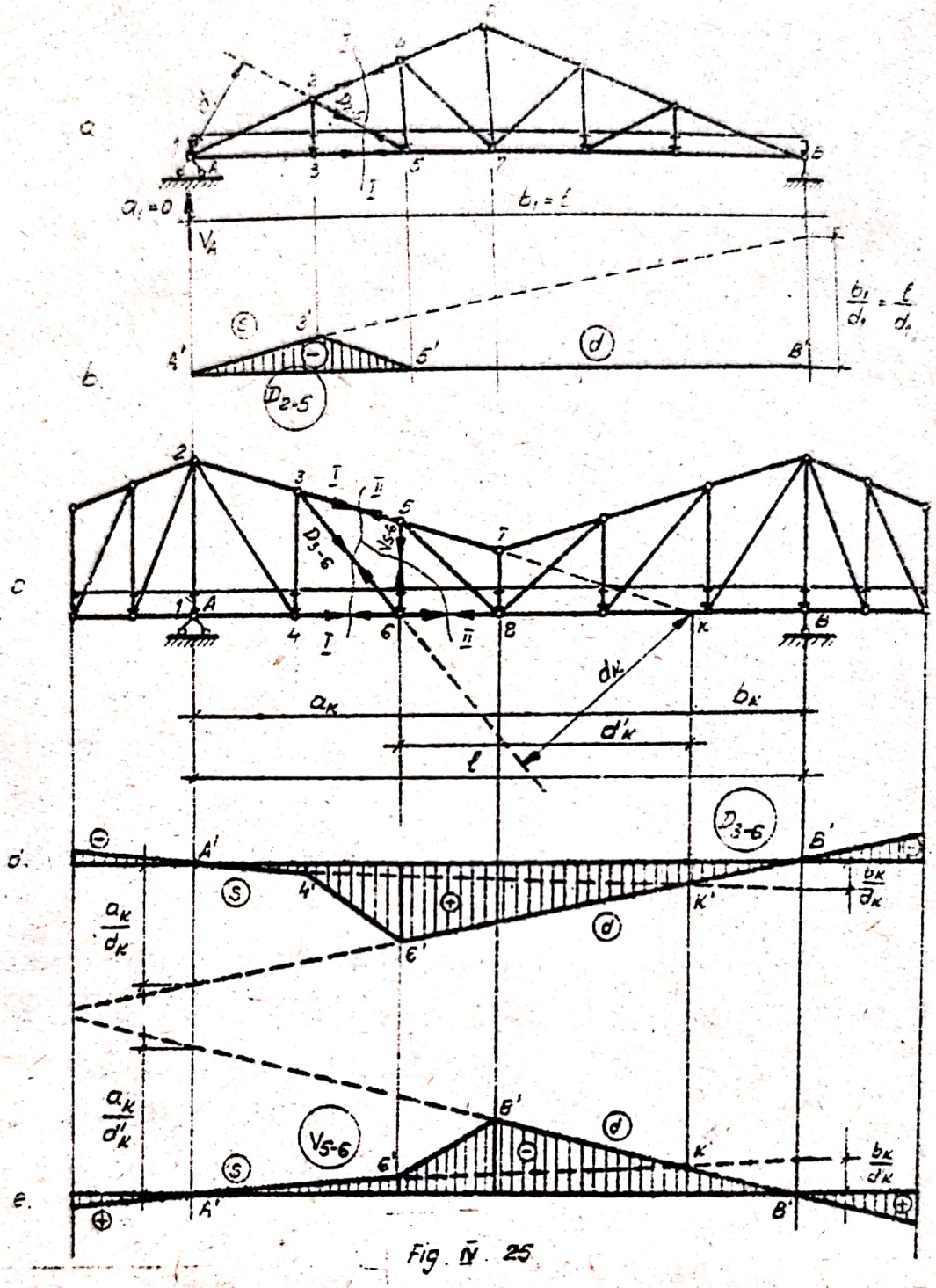


Fig. IV. 25

- între ordonatele din dreptul nodurilor din stînga şi din dreapta secţiunii, linia de influenţă are variaţia liniară.

Ca primă aplicaţie, se prezintă determinarea liniei de influenţă pentru efortul din diagonala 2-5 a grinzii cu zăbrele triunghiulare din fig.IV.25.a.

Expresia efortului din diagonală se obţine făcînd secţiunea I-I şi scriind ecuaţia de momente în raport cu intersecţia

barelor 2-4 și 3-5, deci cu punctul 1 și rezultă:

$$D_{2-5} = -\frac{M_1}{d_1}$$

Deci distanțele punctului față de care se scrie momentul în raport cu cele două reazeme A și B sînt $a_1 = 0$ și respectiv $b_1 = l$, cele două ramuri ale liniei de influență avînd deci caracteristicile:

- ramura de stînga, ordonatele $y_A = 0$ și $y_B = \frac{b_1}{d_1} = \frac{\ell}{d_1}$

- ramura de dreapta, ordonatele $y_A = \frac{a_1}{d_1} = 0$ și $y_B = 0$,

aceasta din urmă confundîndu-se deci cu linia de referință.

Considerînd valabilitatea celor două ramuri din A'pînă în 3'și respectiv din B'pînă în 5'și unind liniar între ordonatele corespunzătoare, se obține linia de influență din fig. IV.25.b.

Se vede astfel că în diagonala 2-5 apar eforturi numai dacă există încărcare în nodul 3 sau 2, pentru încărcări în celelalte noduri această diagonală fiind o bară inactivă.

A doua aplicație se referă la liniile de influență pentru eforturile din diagonala 3-6 și montantul 5-6 ale grinzii cu zăbrele din fig.IV.25.c.

Astfel, folosind secțiunea I-I, rezultă:

$$D_{3-6} = \frac{M_k}{d_k}$$

și se obține linia de influență din fig.IV.25.d, cele două ramuri intersectîndu-se în dreptul punctului K și fiind valabile între A'și 4'și respectiv între B'și 6'și fiind prelungite și pe consolele grinzii.

Folosind secțiunea II-II:

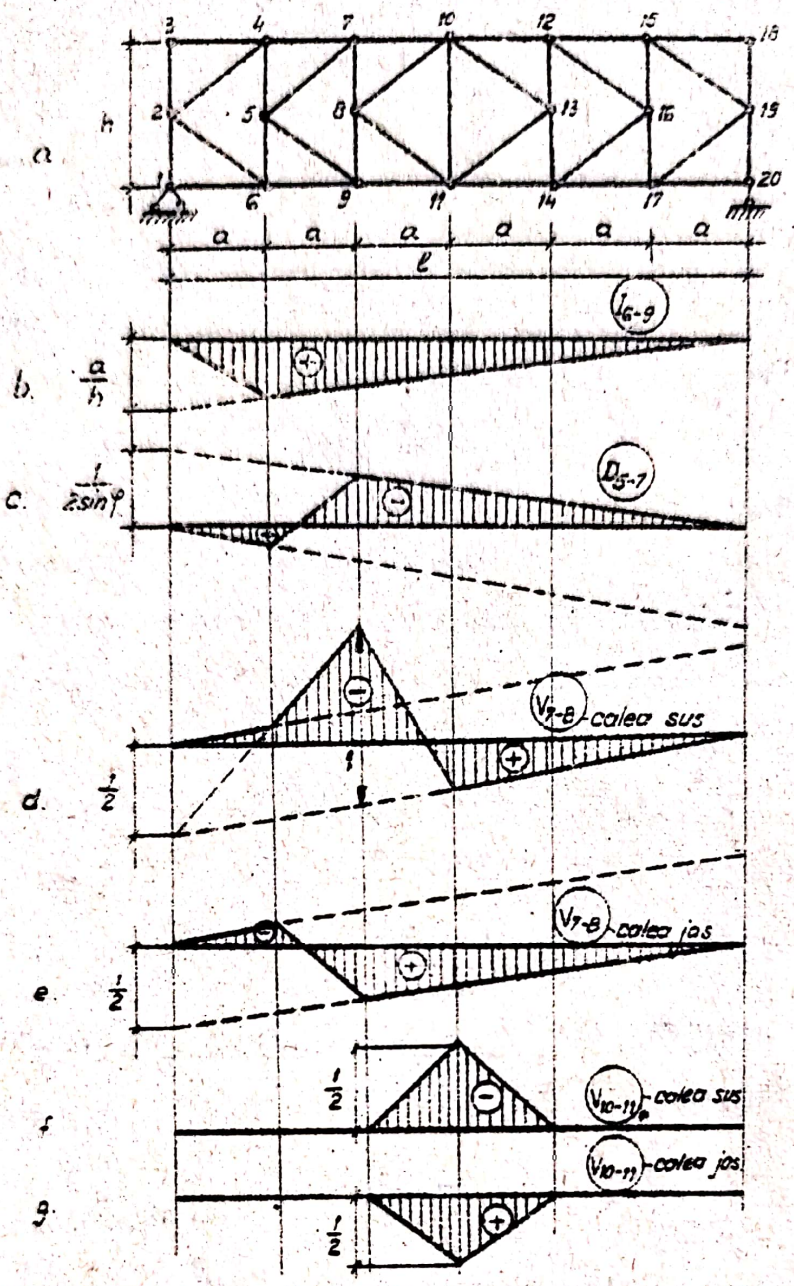


Fig. IV.26

prezentată în fig.IV.26.d.

β) sarcina unitară la talpa inferioară, efind expresia efortului V_{7-8} este dată de relaţia (IV.35.b):

$$V_{7-8} = \frac{T^{\beta}_{II}}{2}$$

linia de influenţă fiind reprezentată în fig.IV.26.e.

- Pentru efortul din montantul central, liniile de influenţă se trasează pe baza relaţiilor (IV.37.a) şi respectiv (IV.37.b):

$$V_{10-11} = -\frac{F_{10}}{2} \quad \text{pentru calea sus}$$

şi $V_{10-11} = +\frac{F_{11}}{2}$ pentru calea jos

ceea ce înseamnă triunghiuri pe panourile III şi IV ale grinzii, cu ordonatele 1/2 în dreptul nodului 10 şi respectiv 11 (fig.IV.26.f şi g), situaţia fiind asemănătoare cu cea a montantului 7-8 de la grinda cu zăbrele din fig.IV.23, analizată în subcapitolul IV.3.2.1 - punctul a.

IV.3.2.2.2. Determinarea liniilor de influenţă pe cale cinematică

Se utilizează calea generală bazată pe principiul deplasărilor virtuale, care în cazul acesta constă în suprimarea barei corespunzătoare efortului pentru care trasăm linia de influenţă, înlocuirea barei cu perechea de eforturi respective şi construirea diagramei deplasărilor pe verticală a mecanismului obţinut. Rezultă în felul acesta alura liniei de influenţă.

Dacă deplasarea se dă în sens invers eforturilor (pozitive) introduse în locul barei suprimate - deci îndepărtînd cele două noduri din capetele barei respective - linia de influenţă are semnul plus pe porţiunile deplasate sub linia de referinţă şi minus pe porţiunile deplasate în sus.

Pentru stabilirea unui procedeu general de determinare a scării liniei de influenţă, se consideră în fig.IV.27.a cazul unei bare oarecare i-j dintr-un sistem cu zăbrele,

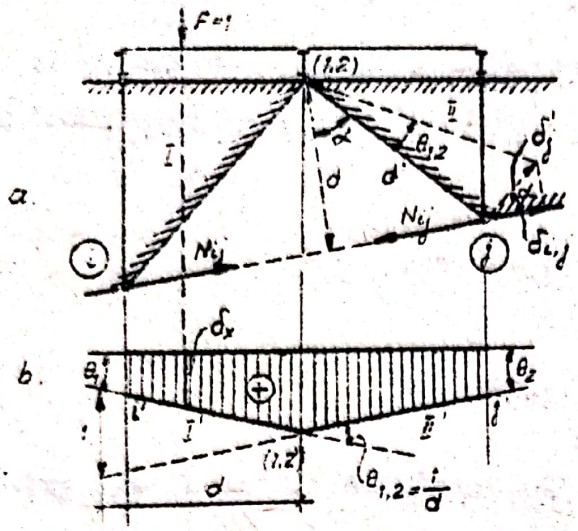


Fig. IV.27

pentru care rezultă diagrama de deplasări pe verticală din fig. IV.27.b.

Relaţia de echiliburu prin lucru mecanic virtual este:

$$1 \cdot \delta_x - N_{ij} \cdot \delta_i^{(N)} N_{ij} \cdot \delta_j^{(N)} = 0$$

unde $\delta_i^{(N)}$ şi $\delta_j^{(N)}$ sînt deplasările nodurilor i şi respectiv j, pe direcţia barei i-j pentru al cărei efort trasăm linia de influenţă.

Rezultă deci:

$$N_{ij} = \frac{\delta_x}{\delta_i^{(N)} + \delta_j^{(N)}}$$

ceea ce înseamnă că scara liniei de influenţă se obţine pentru:

$$\delta_i^{(N)} + \delta_j^{(N)} = \delta_{i-j}^{(N)} = 1 \qquad \text{(IV.39)}$$

unde s-a notat cu $\delta_{i-j}^{(N)}$ deplasarea relativă dintre nodurile i şi j, pe direcţia barei i-j.

Cum această deplasare nu apare în mărime adevărată în diagrama deplasărilor pe verticală decît în cazul liniilor de influenţă ale eforturilor din montanţi, în celelalte cazuri se scrie această deplasare în funcţie de unghiul relativ de rotire θ_{1-2} dintre corpurile I şi II din care fac parte nodurile i şi j şi de raza vectoare corespunzătoare. Astfel, dacă se consideră nodul i fix, nodul j are deplasarea perpendiculară pe raza vectoare d'şi egală cu:

$$\delta_j' = \theta_{1-2} \cdot d'$$

iar proiecţia acestei deplasări pe direcţia i-j este:

$$\delta_{i-j}^{(N)} = \delta_j' \cdot \cos\alpha = \theta_{1-2} \cdot d' \cdot \cos\alpha = \theta_{1-2} \cdot d$$

Din condiţia:

$$\delta_{i,j}^{(N)} = \theta_{1-2} \cdot d = 1$$

rezultă că soara liniei de influenţă este determinată dacă se consideră:

$$\theta_{1-2} = \frac{1}{d} \qquad \text{(IV.40)}$$

ceea ce revine la a lua o ordonată relativă verticală unitară între diagramele I' şi II; la distanţa d măsurată pe orizontală faţă de (1,2) (fig.IV.27.b)

Odată precizate aceste elemente generale, trasarea liniilor de influenţă pe cale cinematică reprezintă simple aplicaţii pentru diferite tipuri de grinzi cu zăbrele şi diverse bare, ceea ce se face în continuare. Se vor scrie doar relaţiile de determinare a soării şi se vor comenta anumite cazuri mai deosebite de stabilire a unor centre instantanee de rotaţie.

a) <u>Grinzi cu tălpi paralele</u>

Se consideră grinda cu zăbrele din fig.IV.28.a.

- <u>Linia de influenţă pentru efortul</u> S_{3-5} este trasată în fig.IV.28.b,c şi pentru stabilirea soării se consideră:

$$\delta_{3-5} = 1 = \theta_{1-2} \cdot h \qquad \text{deci} \quad \theta_{1-2} = \frac{1}{h} \qquad \text{(IV.41)}$$

Dacă se calculează ordonata de pe reazemul A, se obţine: $y_A = \theta_{1-2} \cdot 2a = \frac{2a}{h}$

adică aceeaşi valoare obţinută şi analitic (fig.IV.23.c).

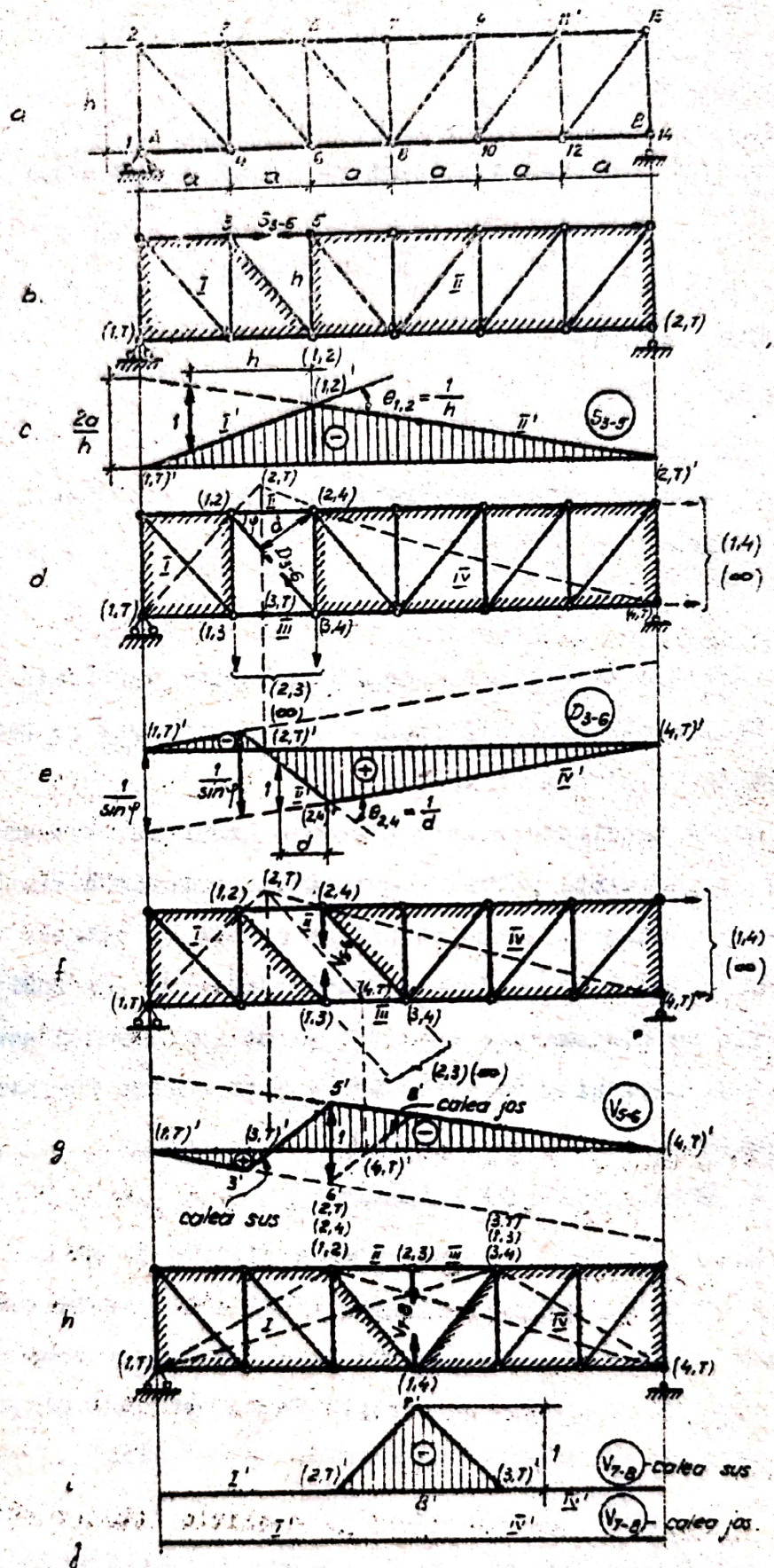

a
b.
c
d
e.
f
g
h
i
j
S_{3-5}
D_{3-6}
V_{5-6}
V_{7-8}
calea jos
calea sus
$\theta_{1,2} = \frac{1}{h}$
$\theta_{2,4} = \frac{1}{d}$
$\frac{2a}{h}$
$\frac{1}{\sin\varphi}$
(1,4)
(∞)
(2,3)(∞)

Fig. IV 28

- Linia de influenţă pentru efortul D_{3-6} este trasată în fig.IV.28.d,e pentru calea sus (cînd în lanţul cinematic intră corpurile I, II şi IV), fiind aceeaşi şi pentru calea jos (corpurile I, III şi IV). Pentru scară, se consideră:

$$\delta^{(2)}_{3-6} = 1 = \omega_{2-4} \cdot d \qquad \text{deci} \qquad \omega_{2-4} = \frac{1}{d} = \frac{1}{a \cdot \sin\varphi} \qquad \text{(IV.42)}$$

Dacă se calculează ordonata de la distanţa a de centrul relativ (2,4), se obţine:

$$y = \omega_{2-4} \cdot a = \frac{1}{\sin\varphi}$$

adică distanţa dintre cele două drepte paralele dedusă şi analitică (fig.IV.23.d).

- Linie de influenţă pentru efortul V_{5-6}, este trasată în fig.IV.28.f, g, pentru calea sus (lanţul cinematic alcătuit din corpurile I, II şi IV) şi pentru calea jos (lanţul cinematic alcătuit din corpurile I, III şi IV). Cele două linii de influenţă sînt de data aceasta diferite prin panoul pe care se face schimbarea de semne. Scara rezultă direct, considerînd:

$$\delta^{(v)}_{5-6} = 1 \qquad \text{(IV.43)}$$

- Pentru trasarea liniei de influenţă a efortului din montantul central 7-8, determinarea centrelor instantanee de rotaţie a corpurilor II, III şi IV se face astfel (fig.IV.28.h),

- centrul instantaneu absolut (4,T) se găseşte la intersecţie direcţiei (1,T) - (1,4), cu direcţia reazemului simplu din B;

- centrul instantaneu relativ (2,4), se găseşte la intersecţia direcţiilor (1,2)-(1,4) şi (3,4)-(2,3);

- centrul instantaneu relativ (1,3) se găseşte la intersecţia direcţiilor (1,4) - (3,4) şi (1,2 - (2,3);

- centrul instantaneu absolut (2,T) se găseşte la intersecţia direcţiilor (1,T) - (1,2) şi (4,T) - (2,4);

- centrul instantaneu absolut (3,T) se găseşte la intersecţia direcţiilor (1,T) - (1,3) şi (4,T) - (3,4).

Intrucît corpurile I şi IV au cîte două puncte fixe - (1,T) şi (2,T) şi respectiv (4,T) şi (3,T) - rezultă că ele sînt fixe în întregime, deci:

- pentru calea sus, alura liniei de influenţe este dată de diagrama de deplasări a corpurilor II şi III (fig.IV.28.i), scara fiind determinată din condiţia:

$$\delta^{(v)}_{7-8} = 1 \qquad \text{(IV.44)}$$

- pentru calea jos (corpurile I şi IV) linia de influenţă este în întregime zero (fig.IV.28.j), ceea ce confirmă calitatea de bară suplimentară a montantului 7-8.

Se regăsesc astfel toate liniile de influenţă trasate în fig.IV.23 pe cale analitică.

b) <u>Grinzi cu tălpi poligonale</u>.

Ca exemplu se consideră grinda cu zăbrele din fig.IV.29, a, pentru care sînt trasate următoarele linii de influenţă:

- <u>Linia de influenţă pentru efortul din bara 3-5</u> a tălpii superioare (fig.IV.29.b, c) la care scara se stabileşte din condiţia:

$$\delta^{(s)}_{3-5} = 1 = \sigma_{1,2}\, d_4 \text{ deci } \sigma_{1,2} = \frac{1}{d_4} \qquad \text{(IV.45)}$$

ceea ce revine la a considera, la distanţa d_4 de (1,2) măsurată pe orizontală, ordonata relativă dintre deplasările corpurilor I şi II egală cu 1. In acest fel, ordonata pe reazemul A este a_4/d_4, valoare care se obţine, evident, şi pe cale analitică.

- <u>Linia de influenţă pentru efortul din bara 4-7</u> a tălpii

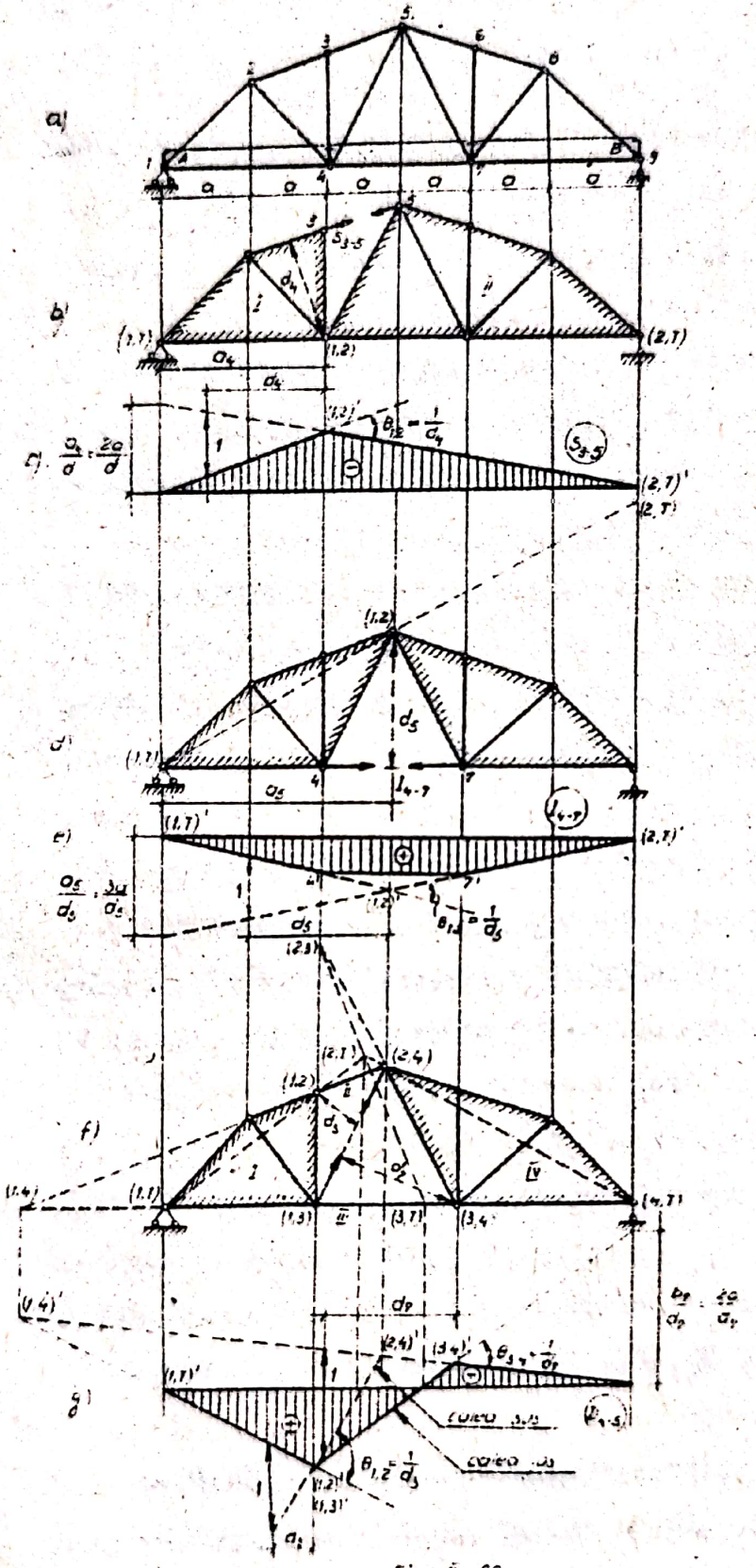

a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)
(1,7)
(1,2)
(2,7)
(2,7)'
(1,2)'
(1,7)'
(2,7)'
(2,4)
(1,4)
(1,1)
(1,3)
(3,7)
(3,4)
(4,7)
(1,4)'
(2,4)'
(3,4)'
(1,7)'
(1,2)'
(1,3)'
S_{3-5}
d_4
a_4
d_5
a_5
d_3
d_2
d_p
a_p
$\frac{a_4}{d} = \frac{2a}{d}$
$\frac{a_5}{d_5} = \frac{3a}{d_5}$
$\frac{b_p}{d_p} = \frac{2a}{a_p}$
$\theta_{1,2} = \frac{1}{d_4}$
$\theta_{1,2} = \frac{1}{d_5}$
$\theta_{3,4} = \frac{1}{d_p}$
$\theta_{1,2} = \frac{1}{d_3}$
I_{4-7}
D_{4-5}
calea sus
calea sus

Fig. IV 29

inferioare(fig.IV.29.d,e),la care scara se determină din condiția: $\delta^{(1)}_{4-7} = 1 = \varepsilon_{1,2}\, d_5$ deci $\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{d_5}$ (IV.46)

și la care mai este necesară - pentru cazul deplasării sarcinii unitare pe talpa inferioară - corecția între nodurile 4 și 7.

- Linia de influență pentru efortul din diagonala 4-5, care necesită unele explicații.

Determinarea centrelor instantanee de rotație se face în acest caz în felul următor (fig.IV.29.f):

- centrul absolut de rotație (1,T) se găsește în articulația A;

- centrul relativ de rotație (1,4), se determină prin intersecția direcțiilor (1,2) - (2,4) și (1,3) - (3,4);

- centrul absolut de rotație (4,T) se găsește la intersecția direcției (1,T) - (1,4), cu direcția reazemului simplu din B;

Intrucît centrul absolut de rotație (3,T) - necesar trasării liniei de influență pentru calea jos - nu se poate determina direct, datorită faptului că direcțiile (1,T) - (1,3) și (4,T) - (3,4) se suprapun, se procedează astfel:

- se determină centrul absolut (2,T), la intersecția direcțiilor (1,T) - (1,2) și (4,T) - (2,4);

- se determină centrul relativ de rotație (2,3), la intersecția direcțiilor (1,2) - (1,3) și (2,4) - (3,4);

- se determină apoi centrul absolut de rotație (3,T) prin intersecția direcției (2,T) - (2,3) cu direcțiile suprapuse(1,T) - (1,3) și (4,T) - (3,4).

Rezultă astfel liniile de influență din fig.IV.29.g, atît pentru calea jos, cît și pentru calea sus, (eventual cale suspendată de nodurile tălpii superioare). Scara se determină din condițiile:

- pentru calea jos:

$$\delta^{(2)}_{4-5} = 1 = \omega_{3,4} \cdot d_7 \quad \text{deci} \quad \omega_{3,4} = \frac{1}{d_7} \qquad \text{(IV.47.a)}$$

- pentru calea sus:

$$\delta^{(2)}_{4-5} = 1 = \omega_{1,2} \cdot d_3 \quad \text{deci:} \quad \omega_{1,2} = \frac{1}{d_3} \qquad \text{(IV.47.b)}$$

c) Grinzi cu diagonale în K.

Se consideră grinda cu zăbrele cu talpa superioară poligonală, din fig.IV.30.a și se trasează următoarele linii de influență:

- Linia de influență pentru efortul din bara 7-10 a tălpii superioare.

Prin scoaterea barei 7-10 și înlocuirea sa cu perechea de eforturi axiale S_{7-10} (fig.IV.30.b), rezultă un mecanism la care porțiunea notată cu I rămîne nedeformabilă, întrucît se constată că toate centrele absolute de rotație ale celor patru triunghiuri care o alcătuiesc, se găsesc în articulația A.

In felul acesta, diagrama deplasărilor pentru I și II se construiește simplu (fig.IV.30.c), iar scara liniei de influență rezultă din condiția:

$$\delta^{(s)}_{7-10} = 1 = \omega_{1,3} \cdot d_9 \quad \text{deci} \quad \omega_{1,3} = \frac{1}{d_9} \qquad \text{(IV.48)}$$

- Linia de influență pentru efortul din diagonala 5-9, care necesită determinarea centrelor instantanee de rotație, în următoarea ordine (fig.IV.30.d):

- centrul absolut de rotație (1,T) se găsește în articulația A;

- centrul relativ de rotație (1,3) se găsește la intersecția direcțiilor (1,2) - (2,3) și (1,4) - (3,4);

- centrul relativ de rotație (1,6) se găsește la intersecția direcțiilor (1,3) - (3,6) și (1,5) - (5,6);

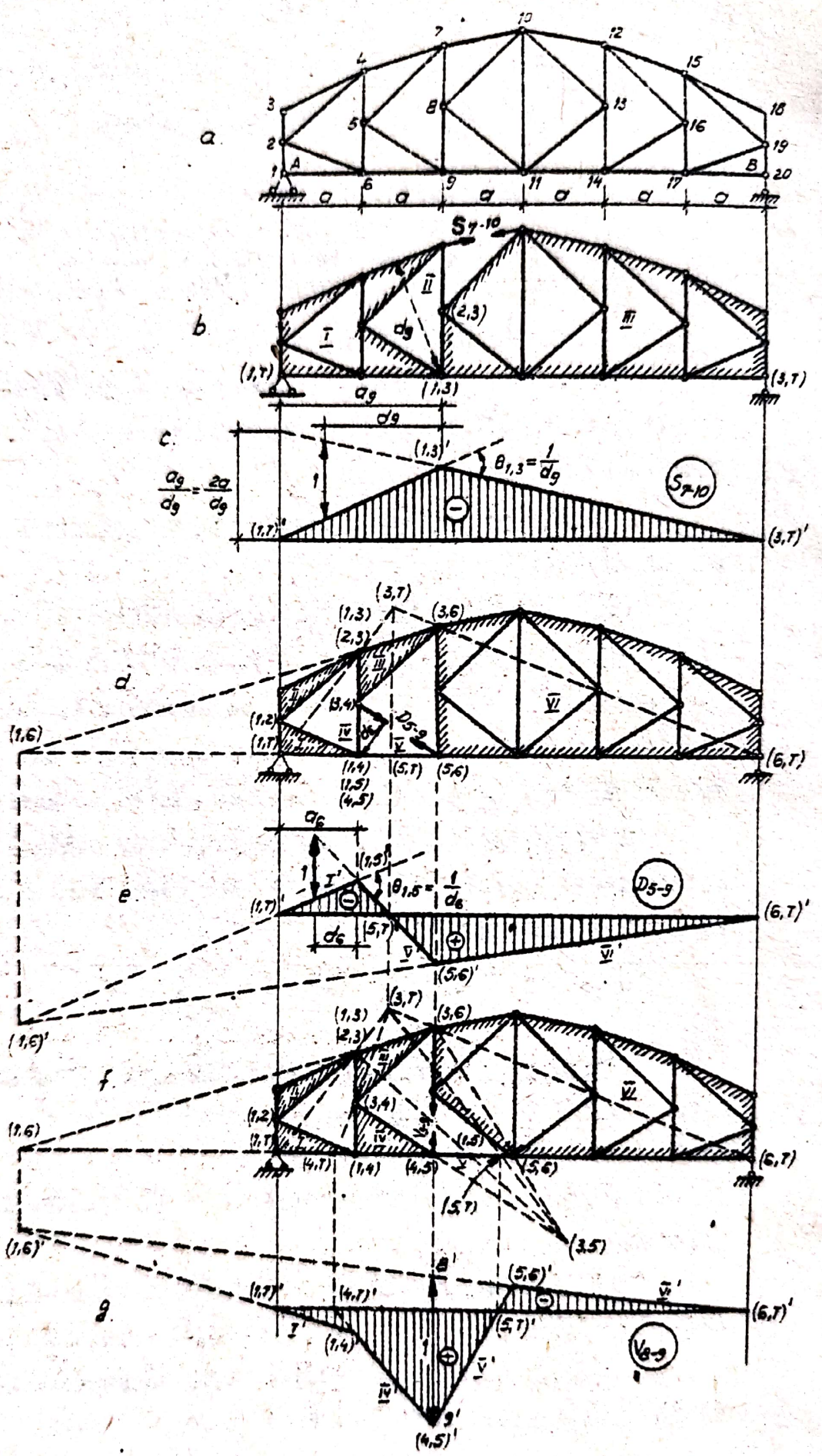

a
b
c
d
e
f
g
S_{7-10}
$\frac{a_9}{d_9} = \frac{2a}{d_9}$
$\theta_{1,3} = \frac{1}{d_9}$
D_{5-9}
$\theta_{1,5} = \frac{1}{d_6}$
V_{8-9}

Fig. IV 30

- centrul absolut de rotaţie (6,T) se găseşte la intersecţia direcţiei (1,T) - (1,6) cu direcţia rezemului simplu din B;

- centrul absolut de rotaţie (3,T) se găseşte la intersecţia direcţiilor (1,T) - (1,3) şi (6,T) - (3,6);

- centrul relativ de rotaţie (3,5) se găseşte la intersecţia direcţiilor (3,4) - (4,5) şi (3,6) - (5,6);

- centrul absolut de rotaţie (5,T) se găseşte la intersecţia direcţiei (3,T) - (3,5), cu direcţiile suprapuse (1,T) - (1,5) şi (6,T) - (5,6).

Apoi se trasează diagrama deplasărilor din fig. IV.30.e (corpurile I, V, VI - pentru calea jos) şi scara liniei de influenţă se determină din condiţia:

$$\delta^{(D)}_{5-9} = 1 = \sigma_{1,5} \cdot d_6 \quad \text{deci} \quad \sigma_{1,5} = \frac{1}{d_6} \qquad \text{(IV.49)}$$

- <u>Linia de influenţă pentru efortul din montantul 8-9</u>, care necesită determinarea centrelor de rotaţie după cum urmează (fig.IV.30.f):

- centrul absolut de rotaţie (1,T) se găseşte în articulaţia A;

- centrul relativ de rotaţie (1,3) se găseşte la intersecţia direcţiilor (1,2) - (2,3) şi (1,4) - (3,4);

- centrul relativ de rotaţie (3,5) se găseşte la intersecţia direcţiilor (3,4) - (4,5) şi (3,6) - (5,6);

- centrul relativ de rotaţie (1,5) se găseşte la intersecţia direcţiilor (1,3) - (3,5) şi (1,4) - (4,5);

- centrul relativ de rotaţie (1,6) se găseşte la intersecţia direcţiilor (1,3) - (3,6) şi (1,5) - (5,6);

- centrul absolut de rotaţie (6,T) se găseşte la intersecţia direcţiei (1,T) - (1,6) cu direcţia reazemului simplu

din B;

- centrul absolut de rotaţie (3,T) se găseşte la intersecţia direcţiilor (1,T) - (1,3) şi (6,T) - (3,6);

- centrul absolut de rotaţie (4,T) se găseşte la intersecţia direcţiilor (1,T) - (1,4) şi (3,T) - (3,4);

- centrul absolut de rotaţie (5,T) se găseşte la intersecţia direcţiilor (3,T) - (3,5) şi (4,T) - (4,5).

Apoi se trasează diagrama deplasărilor pentru corpurile I, IV, V, VI (calea jos - fig.IV.30,g) şi scara se determină direct din condiţia:

$$\delta_{g-9}^{(v)} = 1 \qquad \text{(IV.50)}$$

IV.3.2.3. Influenţa formei tălpilor asupra eforturilor din bare.

Eforturile din barele sistemelor cu zăbrele depind de mai mulţi factori, printre care sistemul de rezemare, schema de încărcare şi alcătuirea geometrică (forma tălpilor şi dispunerea zăbrelelor). Realizarea unor sisteme cît mai raţionale, este legată de studierea modului în care aceşti factori influenţează distribuţia eforturilor în bare, atît sub aspect calitativ (eforturi de întindere sau de compresiune), cît şi sub aspect cantitativ (mărimea eforturilor), această distribuţie fiind unul din parametrii care determină în ultimă instanţă proiectarea economică din punct de vedere al costului, a structurilor în general.

Există de altfel posibilitatea de a optimiza proiectarea structurilor de rezistenţă, alegînd diferite criterii ale acestei optimizări, problemă care-şi găseşte rezolvarea mai ales prin utilizarea metodelor de calcul în domeniul plastic, care nu fac însă obiectul lucrării de faţă.

In cele ce urmează, se prezintă numai modul în care diferite forme ale tălpilor grinzilor cu zăbrele influenţează distribuţia eforturilor în bare, aspect care permite totuşi stabilirea unor concluzii legate de o alcătuire judicioasă a acestor structuri.

Se consideră astfel trei tipuri de grinzi simplu rezemate, având acelaşi sistem de zăbrele (sistem dreptunghiular) şi încărcate cu o sarcină uniform distribuită aplicată indirect la talpa superioară. Este vorba de grinda cu tălpi paralele, grinda cu nodurile tălpii superioare aşezate pe o parabolă şi grinda triunghiulară. Se va studia mai întîi pentru cele trei tipuri de grinzi, modul de repartiţie a eforturilor în lungul structurii, sub aspectul semnului şi al mărimii relative a acestor eforturi.

a) <u>Grinda cu tălpi paralele (fig.IV.31.a)</u>

Eforturile din barele acestei grinzi se pot exprima - aşa după cum s-a văzut anterior - în funcţie de momentele încovoietoare şi forţele tăietoare la o grindă simplu rezemată de aceeaşi deschidere şi acţionată de încărcările din nodurile grinzii cu zăbrele (fig.IV.31.b) şi ale cărei diagrame sînt reprezentate în fig.IV.31.c,d.

Astfel, folosind metoda secţiunilor, rezultă următoarele expresii ale eforturilor din barele tălpilor:

$$I_{1-4} = \frac{M_2^0}{h} = 0;\quad I_{4-6} = \frac{M_3^0}{h};\quad I_{6-8} = \frac{M_5^0}{h} \qquad \text{ş.a.m.d.}$$

sau, în general:

$$I_{i-j} = \frac{M_k^0}{h} \qquad \text{(IV.51)}$$

$$S_{2-3} = -\frac{M_4^0}{h};\quad S_{3-5} = -\frac{M_6^0}{h} \qquad \text{ş.a.m.d.}$$

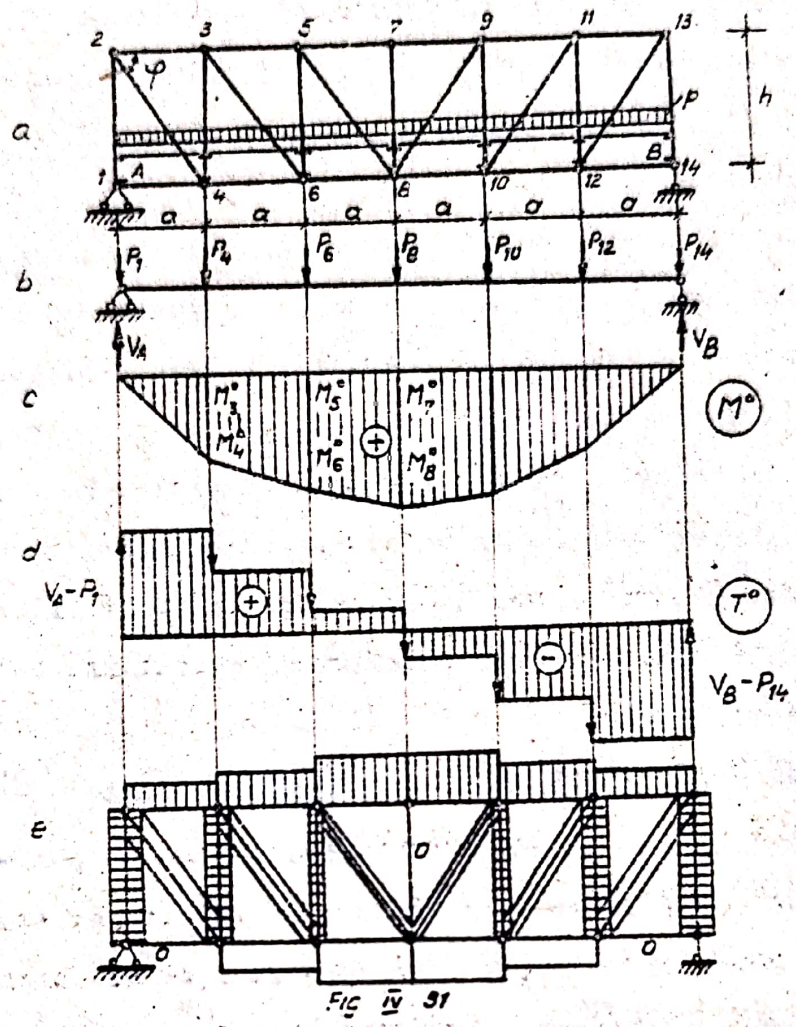


Fig. IV.31

sau, în general:

$$S_{i-j} = - \frac{M_k^0}{h} \qquad \text{(IV.52)}$$

Intrucît h este același și momentele M_k^0 cresc de la capetele grinzii spre mijloc, rezultă că și eforturile din barele tălpilor cresc în același mod. Acest lucru este reprezentat schematic în fig.IV.31,e, unde s-au trasat diagramele de forțe axiale din bare, haşurate pentru compresiune și nehaşurate pentru întindere (convenție care se va păstra și pentru reprezentările ulterioare).

Eforturile din diagonale au expresiile:

$$D_{2-4} = \frac{T_I^0}{\sin\varphi}\,; \quad D_{3-6} = \frac{T_{II}^0}{\sin\varphi} \qquad \text{ş.a.m.d.}$$

sau, în general:

$$D_{i-j} = \frac{T_k^0}{\sin \varphi} \qquad \text{(IV.53)}$$

iar eforturile din montanți:

$$V_{1-2} = - T_I^0 \; ; \quad V_{3-4} = - T_{II}^0 \qquad \text{ș.a.m.d.}$$

sau, în general:

$$V_{i-j} = - T_k^0 \qquad \text{(IV.54)}$$

Relațiile (IV.53) și (IV.54) arată că eforturile din montanți și diagonale descresc de la capetele grinzii spre mijloc, datorită descreșterii ordonatelor T_k^0 ($\sin \varphi$ fiind constant). In fig.IV.31.e este de asemenea reprezentat acest lucru prin diagramele de forțe axiale corespunzătoare și respectînd convenția stabilită în legătură cu semnele.

b) <u>Grinda cu nodurile tălpii superioare dispuse pe o parabolă (fig.IV.32.a)</u>

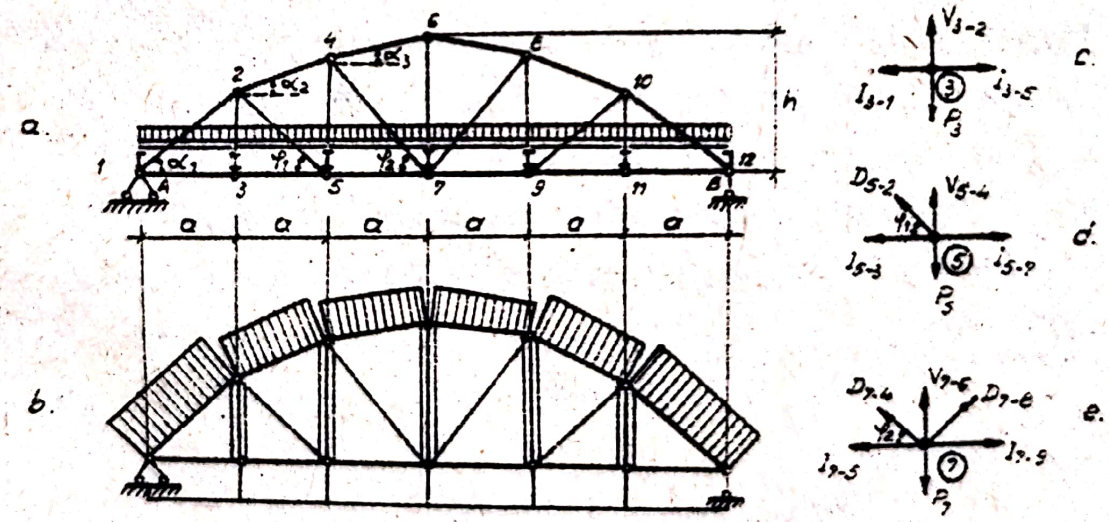


Fig. IV. 32

La această grindă, eforturile din barele tălpii inferioare au expresiile:

$$I_{1-3} = I_{3-5} = \frac{M_2^0}{h_2} \; ; \quad I_{5-7} = \frac{M_4^0}{h_4} \qquad \text{ș.a.m.d.}$$

sau, în general:

$$I_{i-j} = \frac{M_k^0}{h_k} \qquad (IV.55)$$

Cum vîrfurile diagramei M^0 (fig.IV.41.c) se găsesc pe o parabolă şi nodurile tălpii superioare a grinzii de asemenea, rezultă că M_k^0 şi h_k au aceeaşi lege de variaţie, deci rapoartele M_k^0/h_k sînt constante şi prin urmare eforturile din toate barele tălpii inferioare au aceeaşi valoare (fig.IV.32.b)

Eforturile din barele tălpii superioare se calculează cu relaţiile:

$$S_{1-2} = -\frac{M_3^0}{h_3 \cos \alpha_1} \; ; \; S_{2-4} = -\frac{M_5^0}{h_5 \cos \alpha_2} \quad \text{ş.a.m.d.}$$

sau, în general:

$$S_{i-j} = -\frac{M_k^0}{h_k \cos \alpha_t} \qquad (IV.56)$$

Intrucît rapoartele M_k^0/h_k sînt constante iar α_t scade de la capetele grinzii spre mijloc, rezultă că eforturile din barele tălpii superioare descresc în acelaşi sens, dar variaţia lor nu este mare, întrucît unghiul α_t nu are variaţii mari de la un panou la altul.

Pentru determinarea eforturilor din diagonale, se izolează nodurile de la talpa inferioară şi rezultă (pentru nodul 5 - fig.IV.32.d):

$$\Sigma X = 0: \; D_{5-2} \cos \varphi_1 + I_{5-2} - I_{5-7} = 0$$

şi deoarece:

$$I_{5-2} = I_{5-7}, \text{ se obţine}$$

$$D_{5-2} = 0$$

iar din izolarea celorlaltor noduri rezultă în general:

$$D_{i-j} = 0 \qquad (IV.57)$$

Tot prin izolarea nodurilor tălpii inferioare se pot cal-

cula şi eforturile din montanţi şi anume (nodul 5 - fig.IV.32.d):

$$\Sigma Y = 0: V_{5-4} + D_{5-2} \sin \varphi_1 - P_5 = 0$$

sau, întrucît $D_{5-2} = 0$:

$$V_{5-4} = P_5$$

sau, în general (vezi şi fig.IV.32.c,e):

$$V_{i-j} = P_i \qquad \text{(IV.58)}$$

Datorită simetriei grinzii şi a încărcării, sarcinile P_i din nodurile tălpii inferioare sînt egale, deci eforturile de întindere din toţi montanţii au aceeaşi valoare (fig.IV.32. b).

Se poate conchide că în cazul încărcării cu o sarcină uniform distribuită la talpa inferioară, grinda cu nodurile tălpii superioare dispuse pe o parabolă se comportă ca un sistem compus dintr-un arc alcătuit din bare articulate, un tirant alcătuit de asemenea dintr-un lanţ de bare articulate şi montanţii care transmit încărcările de la tirant la arc. Evident că pentru altă ipoteză de încărcare, vor apare eforturi axiale şi în diagonale.

c) <u>Grinda triunghiulară (fig.IV.33.a)</u>

Eforturile din barle tălpii inferioare au în acest caz expresiile:

$$I_{1-3} = I_{3-5} = \frac{M_2^0}{h_2}; \quad I_{5-7} = I_{7-9} = \frac{M_4^0}{h_4} \quad \text{ş.a.m.d.}$$

sau, în general:

$$I_{i-j} = \frac{M_k^0}{h_k} \qquad \text{(IV.59)}$$

şi deoarece h_k variază continuu liniar deci creşte mai repede decît M_k^0 (fig.IV.31.c), rezultă că eforturile din barele tălpii

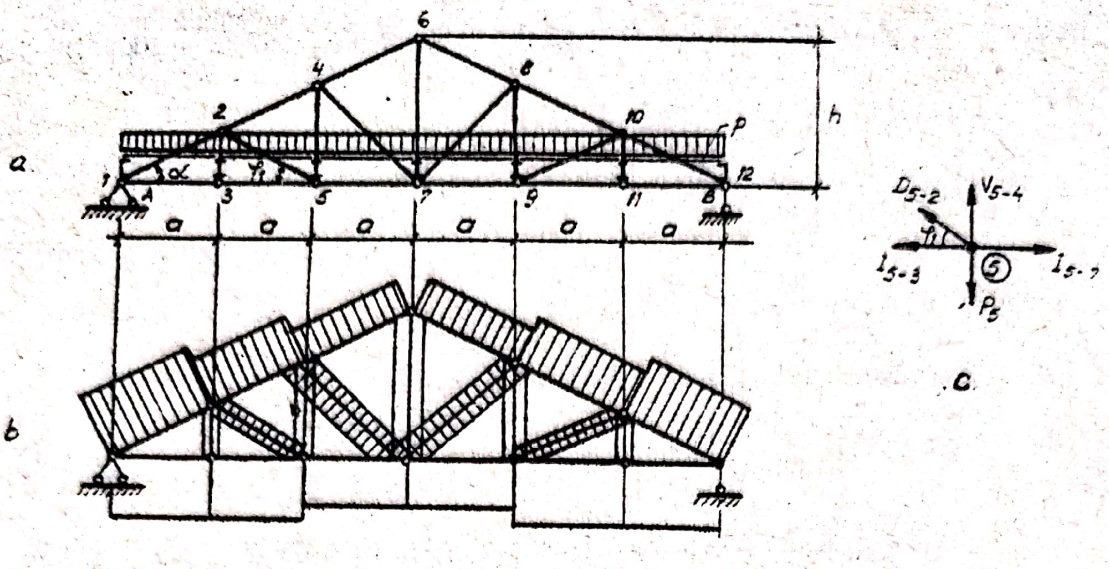


Fig. IV.33

inferioare cresc de la capetele grinzii spre mijloc, fiind în același timp egale pe cîte două panouri vecine (acest lucru se verifică ușor prin izolarea nodurilor 3,7 etc. ale tălpii inferioare și scrierea ecuațiilor de proiecție pe orizontală).

Eforturile din barele tălpii superioare au, la rîndul lor, expresiile:

$$S_{1-2} = -\frac{M_3^0}{h_3 \cos \alpha} \; ; \; S_{2-4} = -\frac{M_5^0}{h_5 \cos \alpha} \quad \text{ș.a.m.d.}$$

sau, în general:

$$S_{i-j} = -\frac{M_k^0}{h_k \cos \alpha} \qquad \text{(IV.60)}$$

ceea ce înseamnă că și eforturile din aceste bare cresc de la capetele grinzii spre mijloc (fig.IV.33.b).

Dacă se izolează nodurile tălpii inferioare, rezultă (nodul 5- fig.IV.33.c):

$$\Sigma X = 0 \quad D_{5-2} \cos \varphi_1 + I_{5-3} - I_{5-7} = 0$$

de unde:

$$D_{5-2} \cos \varphi_1 = I_{5-7} - I_{5-3} = \frac{M_4^0}{h_4} - \frac{M_2^0}{h_2}$$

sau, în general:

$$D_{i-j} \cos \varphi_d = \frac{M^0_k}{h_k} - \frac{M^0_{k-2}}{h_{k-2}} \qquad (IV.61)$$

Pe baza observaţiei că h_k creşte mai repede decît ordonatele M^0_k, rezultă că diferenţele rapoarteler din relaţiile de tipul (IV.61) sînt negative (diagonalele sînt comprimate), ele descrescînd de la capetele grinzii spre mijloc, ceea ce se întîmplă deci şi cu mărimile eforturilor din diagonale.

Scriind ecuaţiile de proiecţie pe verticală pentru nodurile izolate ale tălpii inferioare (nodul 5 - fig.IV.33,c):

$$\Sigma Y = 0: \quad V_{5-4} + D_{5-2} \sin \varphi_1 - P_5 = 0$$

de unde:

$$V_{5-4} = - D_{5-2} \sin \varphi_1 + P_5 = - \left(\frac{M^0_4}{h_4} - \frac{M^0_2}{h_2} \right) tg \varphi_1 + P_5$$

sau, în general:

$$V_{i-j} = - \left(\frac{M^0_k}{h_k} - \frac{M^0_{k-2}}{h_{k-2}} \right) tg \varphi_d + P_i \qquad (IV.62)$$

Intrucît-aşa cum s-a arătat-diferenţele din paranteză sînt negative, rezultă că primul termen este pozitiv, deci montanţii preiau eforturi de întindere. In plus,deoarece forţele P_i din noduri sînt constante, eforturile din montanţi variază ca şi cele din diagonale, adică creso de la capetele grinzii spre mijloc (fig.IV.33.c).

Din cele analizate pînă aici, se mai pot deduce o serie de concluzii, dintre care mai importantă este cea în legătură cu natura eforturilor din diagonale (barele care au lungimea cea mai mare), element esenţial în problemele de stabilitate.

S-a văzut astfel că - pentru ipoteza de încărcare cu o sarcină distribuită la talpa inferioară - diagonalele sînt în-

tinse la grinda cu tălpi paralele, nu preiau eforturi la grinda cu talpa superioară parabolică şi sînt comprimate la grinda triunghiulară, rezultat sintetizat în fig.IV.34.a.

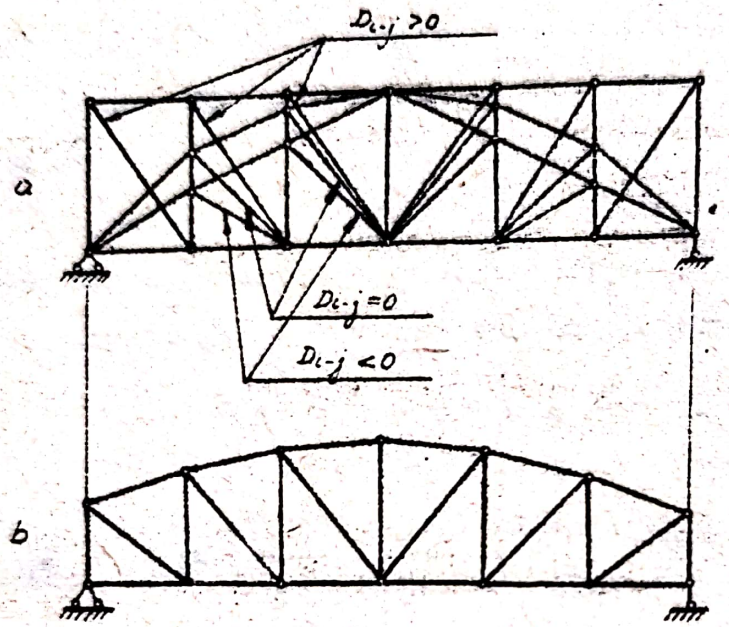


Fig. IV.34

Deci, din punctul de vedere considerat, mai raţionale sînt grinzile cu tălpi paralele sau cu talpa poligonală, grinda triunghiulară - la care diagonalele sînt comprimate - nefiind recomandabilă mai ales în cazul unor deschideri sau încărcări importante, cînd apariţia unor eforturi de compresiune de valori mari în diagonale trebuie evitată. Tot un sistem raţional este de asemenea şi grinda din fig.IV.34.b, numită "grinda semiparabolică" şi reprezentînd de fapt o soluţie intermediară între grinda cu tălpi paralele şi cea cu talpa superioară parabolică.

Se mai reţine de asemenea concluzia că eforturile din montanţi au semne inverse faţă de cele din diagonale, fiind comprimaţi de grinda cu tălpi paralele şi întinşi la grinda cu talpa parabolică şi la cea triunghiulară.

IV.3.3. Grinzi cu zăbrele compuse.

Așa cum s-a mai precizat, aceste sisteme numite și grinzi cu zăbrele cu bare suplimentare, rezultă prin combinarea sistemelor simple, din necesitatea creierii unui număr mai mare de noduri la talpa superioară sau inferioară, ceea ce conduce la o repartizare mai uniformă a încărcărilor și la o distribuire mai rațională a eforturilor în structură.

IV.3.3.1. Calculul la sarcini fixe.

Determinarea eforturilor din barele grinzilor cu zăbrele sisteme compuse se poate face pe două căi:

a) Folosind metoda secțiunilor combinată cu metoda izolării nodurilor.

Pentru grinda din fig.IV.35.a de exemplu, aplicarea metodei secțiunilor nu este posibilă pe anumite panouri, deoarece secțiunile pe care le-am face ar intersecta cîte patru bare (secțiunile I-I, III-III ș.a.m.d.). Pe de altă parte,

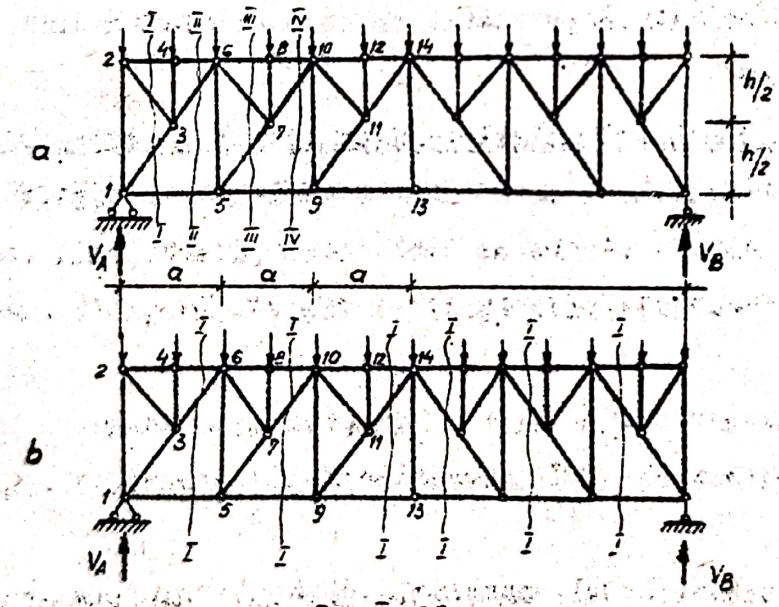


Fig. IV.35

nici aplicarea directă a metodei izolării nodurilor nu este practică, deoarece în toate nodurile grinzii concură mai mult de două bare.

Combinînd însă cele două metode, se poate obţine o rezolvare simplă după cum urmează (se prezintă una din variantele posibile):

- se fac secţiunile de tip I-I (fig.IV.35.b) şi se determină eforturile din barele tălpii inferioare:

$$I_{1-5}=\frac{M^{o}_{5}}{h}\ ;\ I_{5-9}=\frac{M^{o}_{10}}{h};\ I_{9-13}=\frac{M^{o}_{14}}{h}\quad \text{ş.a.m.d.}$$

- se aplică metoda izolării nodurilor, parcurgînd nodurile în ordinea numerotării lor în fig.IV.35.

Se constată că în fiecare nod nu mai sînt decît cîte două bare cu eforturi necunoscute (nodurile 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 13 14 etc.) sau cîte o singură bară cu efort necunoscut (nodurile 4, 8, 12 etc.).

Se poate astfel construi o epură Cremona, în nodurile 1, 5, 9 etc., folosindu-se ca mărimi cunoscute eforturile I_{1-5}, I_{5-9}, I_{9-13} determinate în prealabil pe cale analitică prin metoda secţiunilor.

b) Prin descompunerea sistemului compus în sisteme simple, mod de rezolvare exemplificat pe grinda cu zăbrele din fig.IV.36.a.

Sistemele simple în care se face descompunerea sînt cele din fig.IV.36.b (sistemul principal) şi fig.IV.36.c,d (sisteme secundare).

Încărcările corespunzătoare acestor sisteme sînt:

- pentru sistemele III, sarcinile F din nodurile 3, 7, 11 şi 15;

- pentru sistemele II, sarcinile directe F din nodurile 5 şi 13, la care se adaugă componentele F/2 transmise de sistemele secundare III, sarcinile totale din nodurile 5 şi 13 fiind deci 2F;

- pentru sistemul I, sarcina directă F din nodul 9, la

care se adaugă componentele F transmise de sistemele secundare II și componentele F/2 transmise de sistemele secundare III, sarcină totală din nodul 9 fiind deci 4F.

Mai există, evident, componentele F transmise de sistemele secundare II și componentele F/2 transmise de sistemele secundare III în nodurile 1 și 16 (care se anulează în reazeme cu reacțiunile corespunzătoare 3F/2), astfel că încărcarea totală pe sistemul I este:

$$4F + 2\,(F + F/2\,) = 7F \qquad \text{(IV.63)}$$

egală cu încărcarea totală a sistemului real.

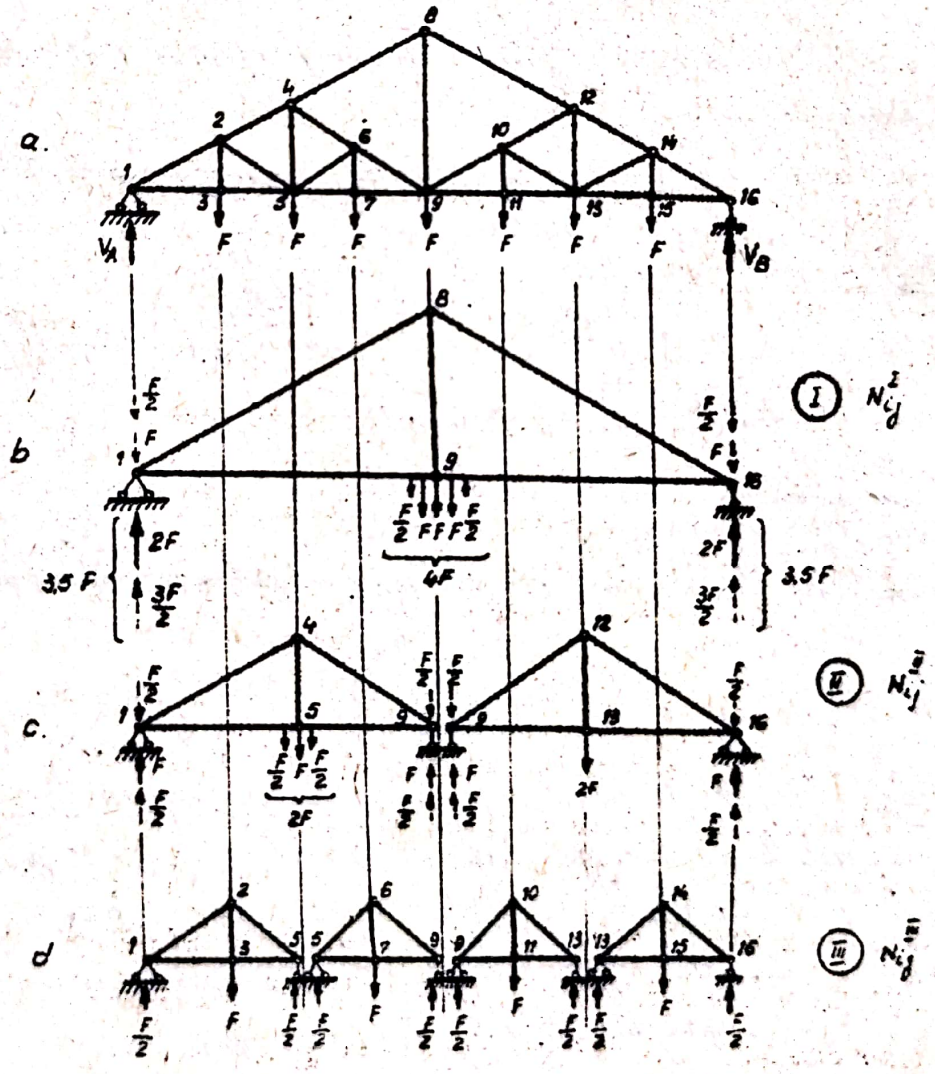


Fig IV 36

Datorită simetriei geometrice a structurii şi simetriei încărcărilor considerate, se rezolvă pe jumătate cîte unul din fiecare sistem simplu - folosind metoda secţiunilor sau metoda izolării nodurilor - şi rezultă:

- pe sistemul I: I^{I}_{1-9}, S^{I}_{1-8} şi V^{I}_{8-9};
- pe sistemul II: I^{II}_{1-5}, S^{II}_{1-4} şi V^{II}_{4-5};
- pe sistemul III: I^{III}_{1-3}, S^{III}_{1-2} şi V^{III}_{2-3}

Eforturile totale din barele grinzii cu zăbrele reale se obţin apoi prin suprapunere de efecte, ţinînd cont de sistemele din care face parte fiecare bară. Această operaţiune este sistematizată în tabelul IV.1.

Tabel IV.1

Bare / Sistem	Talpa inferioară				Talpa superioară			Montanţi				Diagonale			
	1-3	3-5	5-7	7-9	1-2	2-4	4-8	2-3	4-5	6-7	8-9	2-5	5-6	4-6	6-9
I	I^{I}_{1-9}	I^{I}_{1-9}	I^{I}_{1-9}	I^{I}_{1-9}	S^{I}_{1-8}	S^{I}_{1-8}	S^{I}_{1-8}	–	–	–	V^{I}_{8-9}	–	–	–	–
II	I^{II}_{1-5}	I^{II}_{1-5}	I^{II}_{1-5}	I^{II}_{1-5}	S^{II}_{1-4}	S^{II}_{1-4}	–	–	V^{II}_{4-5}	–	–	–	–	S^{II}_{4-9}	S^{II}_{4-9}
III	I^{III}_{1-3}	I^{III}_{1-3}	I^{III}_{1-3}	I^{III}_{1-3}	S^{III}_{1-2}	–	–	V^{III}_{2-3}	–	V^{III}_{2-3}	–	S^{III}_{1-2}	S^{III}_{1-2}	–	S^{III}_{1-2}
N_{ij}	I_{1-3}	I_{3-5}	I_{5-7}	I_{7-9}	S_{1-2}	S_{2-4}	S_{4-8}	V_{2-3}	V_{4-5}	V_{6-7}	V_{8-9}	D_{2-5}	D_{5-6}	D_{4-6}	D_{6-9}

Aşa după cum rezultă din tabelul IV.1, sînt bare care fac parte din unul, două sau trei sisteme şi ele se vor încărca numai atunci cînd există sarcini în nodurile sistemelor respective. Acest mod de rezolvare, pune deci în evidenţă şi rolul fiecărei bare în structură, precum şi ipotezele de încărcare la care trebuie calculate anumite bare, sau ipotezele de încărcare la care anumite bare ale grinzii sînt inactive.

Un alt exemplu de grindă cu zăbrele compusă este cea din fig.IV.37.a, la care barele tălpii superioare sînt alcătuite

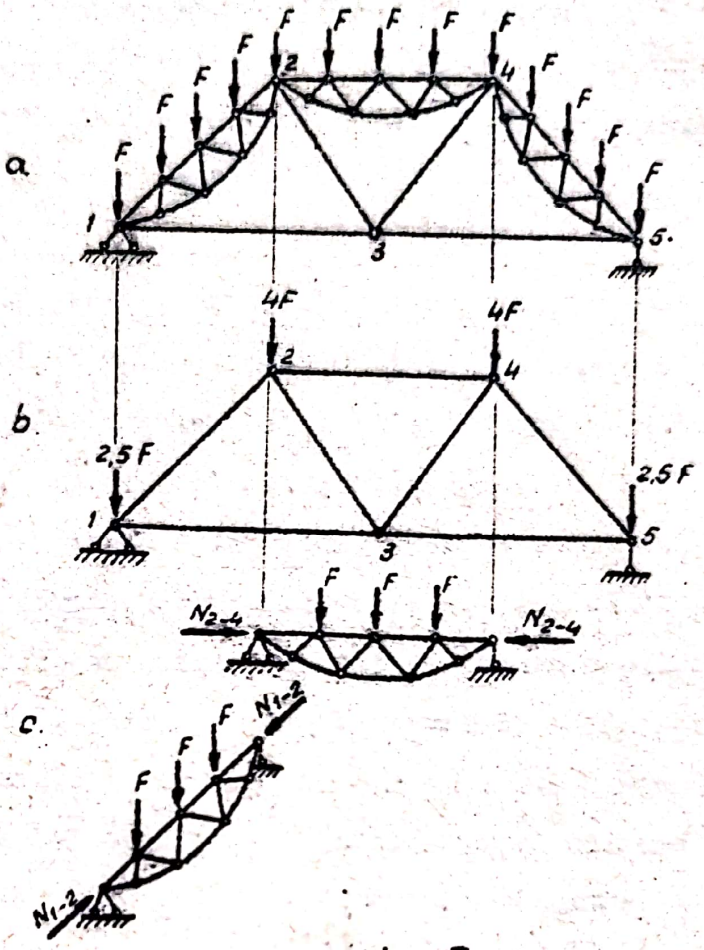


Fig. IV 37

din niște sisteme cu zăbrele, ceea ce le mărește capacitatea de rezistență și rigiditatea.

Grinda se poate descompune în sistemele simple din fig. IV.37.b și c. Se consideră întîi sistemul principal b, încărcat cu sarcinile aferente fiecărui nod și se determină eforturile N_{i-j} din barele acestui sistem. In felul acesta se găsesc eforturile din barele 1-3, 3-5, 2-3 și 3-4. Apoi se calculează eforturile din barele sistemelor secundare, încărcate cu sarcinile din nodurile respective și cu eforturile determinate în sistemul principal (fig.IV.37.c).

IV.3.3.2. Calculul la sarcini mobile

Liniile de influenţă necesare determinării eforturilor axiale maxime produse de convoaiele de sarcini mobile, se determină cel mai simplu la aceste sisteme cu zăbrele, pe cale analitică.

Se reia grinda cu zăbrele din fig.IV.36, la care s-a analizat deja descompunerea în sisteme simple şi apartenenţa fiecărei bare la aceste sisteme simple. In legătură cu determinarea liniilor de influenţă există de fapt mai multe situaţii:

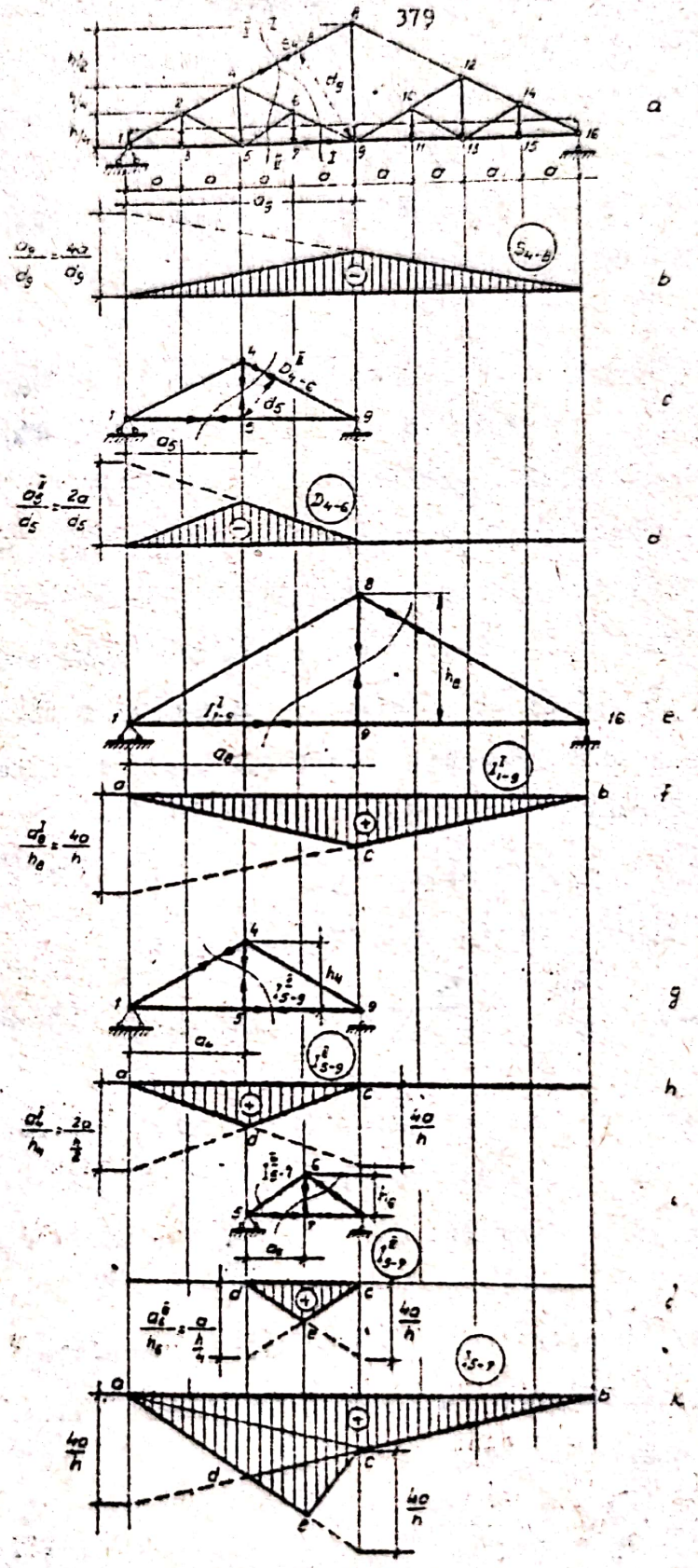
a) Sînt anumite bare, pentru care se pot trasa direct liniile de influenţă ale eforturilor respective, fără a mai fi necesară descompunerea în sisteme simple, datorită faptului că expresiile acestor eforturi se pot determina făcînd secţiuni care nu intersectează mai mult de trei bare. Aceasta este de exemplu cazul barelor intersectate de secţiunea I-I din fig.IV.38.a, ale căror eforturi au expresiile:

$$S_{4-8}=\frac{-M_9^0}{d_9}\ ;\ I_{7-9}=\frac{M_4^0}{d_4}\ ;\ D_{6-9}=-\frac{M_1}{d_1} \qquad (IV.64)$$

liniile de influenţă trasîndu-se deci ca şi la sistemele simple. In fig.IV.38.b este prezentată linia de influenţă pentru efortul S_{4-8}.

b) Expresia eforturilor din barele de tipul diagonalei 4-6 nu se poate determina direct pe sistemul real, deoarece secţiunea II-II pe care o facem intersectează patru bare. Dar, aşa cum s-a văzut la calculul la sarcini fixe (tabelul IV.1 - penultima coloană), bara 4-6 nu aparţine decît sistemului secundar notat cu II şi în consecinţă expresia efortului din această bară se poate determina direct pe sistemul II (fig.IV.38.c):

$$D_{4-6}=S_{4-9}^{II}=-\frac{M_5^{II}}{d_5} \qquad (IV.65)$$



Scanned with OKEN Scanner

Linia de influenţă respectivă este trasată în fig.IV.38.d, indicînd faptul că diagonala 4-6 nu preia eforturi decît din încărcările de pe jumătatea din stînga a grinzii cu zăbrele.

In mod asemănător se va proceda pentru trasarea liniei de influenţă a efortului din bara 5-6, a cărui expresie nu se poate determina direct prin secţiunea II-II, dar observînd că această bară face parte numai din sistemul secundar de tip III (5-6-7-9).

Acelaşi procedeu este de asemenea valabil şi pentru linia de influenţă a efortului din montantul central 8-9, care aparţine numai sistemului principal I (1-8-9-16).

c) Barele de la talpa inferioară de tipul 5-7, pentru care nu se pot determina direct expresiile eforturilor prin secţiuni de tipul II-II şi care fac parte din toate cele trei sisteme simple I, II şi III. In aceste cazuri este necesară o suprapunere de efecte, expresia efortului dintr-o astfel de bară fiind de forma:

$$I_{5-7} = I^{I}_{1-9} + I^{II}_{5-9} + I^{III}_{5-7} \qquad \text{(IV.66.a)}$$

sau, folosind secţiunile din fig.IV.38.e, g, i:

$$I_{5-7} = \frac{M^{I}_{8}}{h_8} + \frac{M^{II}_{4}}{h_4} + \frac{M^{III}_{6}}{h_6} \qquad \text{(IV.66.b)}$$

Liniile de influenţă corespunzătoare sînt reprezentate în fig.IV.38.f, h, j, iar suprapunerea lor, care reprezintă linia de influenţă a efortului I_{5-7} este indicată în fig.IV.38. k.

Se observă că toate tăieturile ramurilor celor trei linii de influenţă pe verticalele reazemelor sistemelor simple respective, sînt egale între ele:

$$\frac{a_8}{h_8} = \frac{b_8}{h_8} = \frac{4a}{h} \qquad \text{(IV.67.a)}$$

$$\frac{a_4}{h_4} = \frac{b_4}{h_4} = \frac{2a}{\frac{h}{2}} = \frac{4a}{h} \qquad \text{(IV.67.b)}$$

$$\frac{a_6}{h_6} = \frac{b_6}{h_6} = \frac{a}{\frac{h}{4}} = \frac{4a}{h} \qquad \text{(IV.67.c)}$$

De aceea, cînd se suprapune linia de influenţă I^{I}_{1-9} (triunghiul a-bc) cu linia de influenţă I^{II}_{5-9} (triunghiul a-c-d), ramurile b-c şi c-d sînt în prelungire, iar cînd se suprapune şi linia de influenţă I^{III}_{5-7} (triunghiul c-d-e), ramurile a-d şi d-e sînt de asemenea în prelungire.

Recapitulînd, liniile de influenţă ale eforturilor din barele sistemului considerat se vor determina astfel:

- direct pe sistemul real pentru eforturile din barele 1-2, 1-3, 2-3, 2-4, 2-5, 3-5, 4-8, 6-9 şi 7-9;

- numai pe sistemul principal I pentru efortul din montantul 8-9;

- numai pe sistemul secundar de tip II pentru eforturile din barele 4-5 şi 4-6;

- numai pe sistemul secundar de tip III pentru eforturile din barele 5-6 şi 6-7;

- prin suprapunerea liniilor de influenţă trasate pe sistemele simple I, II şi III, pentru efortul din bara 5-7.

IV.3.4. Grinzi cu zăbrele complexe.

IV.3.4.1. Calculul la sarcini fixe.

La aceste tipuri de grinzi cu zăbrele, aplicarea directă a metodelor generale de determinare a eforturilor (metoda secţiunilor şi metoda izolării noduriler) nu este de obicei posibilă. Fiind vorba de sisteme plane de bare articulate static determinate, se poate, desigur, utiliza metoda izolării nodurilor, dar aceasta ar conduce la necesitatea rezolvării unui

sistem de 2n ecuaţii (cîte două ecuaţii de proiecţie în fiecare din cele n noduri) cu b + r = 2n necunoscute (b eforturi din bare şi r reacţiuni simple).

De aceea, se apelează la unele metode particulare, prin care se determină fie eforturile din toate barele sistemului, fie efortul din una sau mai multe bare, necesare aplicării în continuare a metodelor generale pentru obţinerea eforturilor din restul barelor. Se utilizează de obicei această ultimă cale, întrucît metoda secţiunilor şi metoda izolării nodurilor sînt totuşi metodele cele mai practice pentru rezolvarea sistemelor plane de bare articulate.

Dintre metodele particulare folosite mai frecvent, se vor prezenta metoda înlocuirii barelor (Henneberg) şi metoda bazată pe principiul deplasărilor virtuale (cu varianta cunoscută sub denumirea de pîrghia Jukovski). Mai amintim de asemenea, metoda dublei secţiuni, prezentată în lucrarea [11]

a) Utilizarea metodei înlocuirii barelor (Henneberg)

Se consideră grinda cu zăbrele din fig.IV.39.a, la care se constată că se poate aplica metoda izolării nodurilor sau metoda secţiunilor pentru determinarea eforturilor din barele 1-2, 1-3, 2-3, 2-4, 3-7, 3-4 şi cele simetrice cu acestea, dar pentru barele din mijlocul grinzii nu se poate aplica nici una din aceste metode sub formele practice cunoscute.

Metoda înlocuirii barelor constă în cazul acesta în scoaterea unei bare (bară înlocuită) şi înlocuirea sa cu o altă bară (bară înlocuitoare), în aşa fel încît sistemul modificat obţinut, să reprezinte tot un sistem geometric nedeformabil, dar care să poată fi rezolvat în întregime prin una din metodele generale cunoscute. Astfel, dacă se suprimă bara 4-8 şi se înlocuieşte cu bara fictivă 7-8, se obţine sistemul modificat

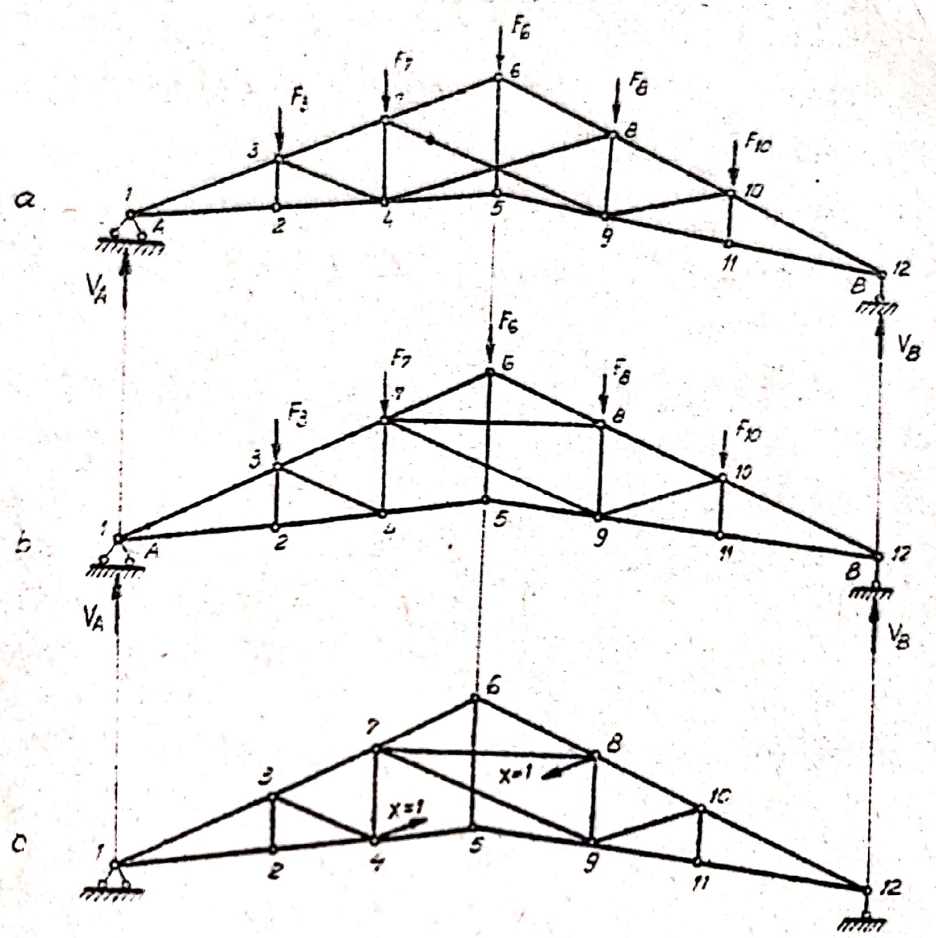


Fig IV 39

din fig.IV.39.b, a cărui rezolvare se poate face prin metoda izolării nodurilor, parcurgînd nodurile în ordinea numerotării lor în fig.IV.39.b (în nodurile 11 şi 12 vor rezulta obişnuitele trei condiţii de verificare.

Se obţin în felul acesta nişte forţe axiale N_{ij} pe sistemul modificat, produse de încărcările exterioare ale sistemului real.

Pentru a corecta aceste eforturi, este necesară în primul rînd reintroducerea barei înlocuite 4-8, ceea ce revine la a determina modificările pe care le produce existenţa unui efort în această bară (efort deocamdată necunoscut şi notat cu X), asupra eforturilor din celelalte bare. De aceea, se rezolvă sistemul modificat acţionat de o pereche de forţe X = 1 pe direcţia barei înlocuite 4-8 (fig.IV.39.c), obţinîndu-se eforturile n_{ij}.

Eforturile reale din barele grinzii cu zăbrele se calculează apoi prin suprapunere de efecte:

$$N_{ij} = N'_{ij} + X\, n_{ij} \qquad (IV.68)$$

Valoarea X a efortului din bara înlocuită, se determină pe baza celei de a doua corecţii şi anume din condiţia ca în bara înlocuitoare 7-8 efortul să fie egal cu zero, ceea ce înseamnă de fapt eliminarea din sistem a acestei bare fictive:

$$N_{7-8} = N'_{7-8} + X\, n_{7-8} = 0$$

de unde:

$$X = -\frac{N'_{7-8}}{n_{7-8}} \qquad (IV.69)$$

Cunoscînd această mărime, eforturile din toate barele sistemului real se calculează cu relaţia (IV.68).

Sau, dacă determinarea efortului dintr-o anumită bară nu necesită multe calcule, se face această operaţiune în prealabil prin folosirea metodei analizate mai sus şi apoi se foloseşte una din metodele generale pentru determinarea eforturilor din celelalte bare, pe sistemul real.

Dacă este necesară înlocuirea a două bare (fig.IV.40.a) şi notăm cu X_1 şi X_2 eforturile din aceste bare înlocuite, mărimile X_1 şi X_2 se stabilesc prin rezolvarea sistemului de

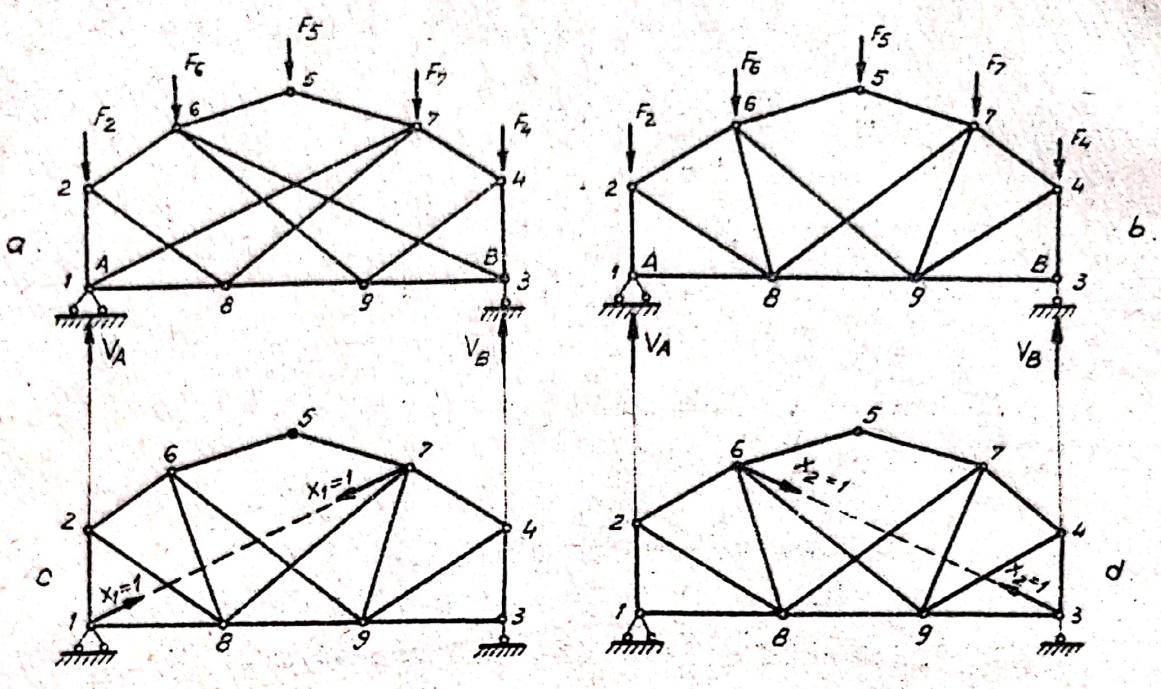


Fig. IV.40.

ecuaţii care exprimă condiţiile de anulare a eforturilor din barele înlocuitoare:

$$N_{6-8} = N'_{6-8} + X_1 n'_{6-8} + X_2 n''_{6-8} = 0 \qquad \text{(IV.70.a)}$$

$$N_{7-9} = N'_{7-9} + X_1 n'_{7-9} + X_2 n''_{7-9} = 0 \qquad \text{(IV.70.b)}$$

unde:

N'_{6-8}, N'_{7-9} = eforturi în barele înlocuitoare determinate pe sistemul modificat încărcat cu sarcinile exterioare (fig.IV.40.b); n'_{6-8}, n'_{7-9} = eforturi produse în barele înlocuitoare ale sistemului modificat de perechea de forţe $X_1 = 1$ (fig.IV.40.c); n''_{6-8}, n''_{7-9} = eforturi produse în barele înlocuitoare ale sistemului modificat de perechea de forţe $X_2 = 1$ (fig.IV.40.d).

Eforturile în barele sistemului real se determină apoi prin suprapunere de efecte:

$$N_{ij} = N'_{ij} + X_1 n'_{ij} + X_2 n''_{ij} \qquad \text{(IV.71)}$$

Observație: Metoda înlocuirii barelor poate servi și ca instrument de identificare a formelor critice, caracterizate - așa cum s-a precizat anterior - de apariția unor eforturi de valori foarte mari (teoretic valori infinite) în anumite bare.

Astfel, dacă rezultă:

- în cazul înlocuirii unei bare, efortul n_{kr} în bara înlocuitoare egal cu zero, deci:

$$X = - \frac{N'_{kr}}{n_{kr}} = \infty \quad , \qquad (IV.72)$$

- în cazul înlocuirii a două bare, determinantul principal D_o al sistemului (IV.70) egal cu zero, deci:

$$X_1 = - \frac{D_1}{D_o} = \infty \qquad (IV.73.a)$$

$$X_2 = - \frac{D_2}{D_o} = \infty \qquad (IV.73.b)$$

aceasta ne indică prezența unor forme critice.

b) Utilizarea principiului deplasărilor virtuale (pîrghia Jukovski)

Această cale constă în determinarea în prealabil a efortului din una sau mai multe bare și utilizarea acestor mărimi cunoscute pentru aplicarea uneia din metodele generale, prin care se găsesc apoi eforturile din celelalte bare ale unei grinzi cu zăbrele complexe.

Ca exemplu se consideră grinda cu zăbrele din fig.IV.41.a, la care nu este posibilă aplicarea directă a metodei secțiunilor sau a metodei izolării nodurilor în forma sa practică. De aceea, se recurge la aflarea în prealabil a efortului dintr-o anumită bară și în acest scop se folosește principiul deplasărilor virtuale. Ne propunem de exemplu să determinăm pe această cale efortul din bara 1-2. Scoțînd bara 1-2 și înlocuind-o cu

perechea de eforturi X (fig.IV.41.b), scrierea condiţiei de echilibru prin lucru mecanic virtual necesită cunoaşterea deplasărilor nodurilor 1 şi 2, pentru care se construieşte o epură a deplasărilor, după principiul analizat în subcapitolul II.2.3.2, punctul b.

Epura construită este prezentată în fig.IV.41.c şi rezultă în felul următor:

- nodul 5 are deplasarea zero, deci 5'coincide cu polul 0;
- deplasarea nodului 7 se produce perpendicular pe 5-7 şi se ia arbitrară ca mărime (0-7'în epură);
- se determină deplasarea nodului 6, la intersecţia direcţiei sale de deplasare (orizontală prin polul 0) cu perpendiculara pe 7-6 dusă din 7', rezultînd 6'în pol; deci, deplasarea nodului 6 este nulă;
- se determină deplasarea nodului 3 (punctul 3'în epură) la intersecţia perpendicularei pe 5-3 dusă din 5'cu perpendiculara pe 7-3 dusă din 7';

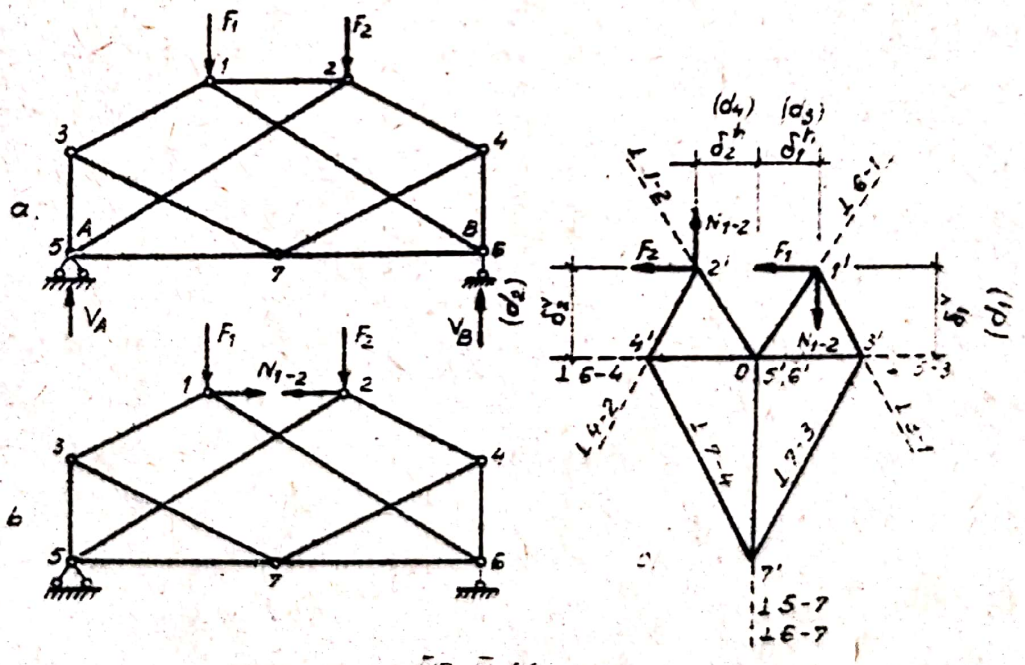


Fig. IV.41

- se determină deplasarea nodului 4 (punctul 4' în epură) la intersecţia perpendicularei pe 6-4 dusă din 6' cu perpendiculara pe 7-4 dusă din 7';

- se determină deplasarea nodului 1 (punctul 1' în epură) la intersecţia perpendicularei pe 3-1 dusă din 3' cu perpendiculara pe 6-1 dusă din 6';

- se determină deplasarea nodului 2 (punctul 2' în epură), la intersecţia perpendicularei pe 5-2 dusă din 5' cu perpendiculara pe 4-2 dusă din 4.

Cunoscînd deplasările nodurilor 1 şi 2, se poate scrie relaţia de echilibru prin lucru mecanic virtual:

$$-F_1 \cdot \delta_1^v - F_2 \cdot \delta_2^v + N_{1-2} \cdot \delta_1^h + N_{1-2} \cdot \delta_2^h = 0 \qquad \text{(IV.74.a)}$$

Dau, se aplică în 1' şi 2' forţele F_1, F_2 şi eforturile N_{1-2} potrivite toate cu 90^0 în acelaşi sens şi se obţine pîrghia Jukovski (fig.IV.41,c), a cărei condiţie de echilibru faţă de polul O este:

$$-F_1 \cdot d_1 - F_2 \cdot d_2 + N_{1-2} \cdot d_3 + N_{1-2} \cdot d_4 = 0 \qquad \text{(IV.74.b)}$$

relaţie identică cu (IV.74.a).

Din această relaţie se determină N_{1-2}, după care eforturile din celelalte bare se pot stabili prin metoda izolării nodurilor, parcurgînd nodurile în ordinea numerotării lor în fig.IV.41.

Mai trebuie arătat că mărimile deplasărilor δ_i (respectiv ale braţelor d_i în pîrghia Jukovski), se pot calcula fie analitic - în funcţie de caracteristicile geometrice ale grinzii cu zăbrele şi de mărimea luată iniţial pentru O-7' - fie prin măsurare directă pe epură, întrucît parametrul arbitrar introdus prin mărimea lui O-7' este comun şi se simplifică din relaţia de echilibru.

IV.3.4. Calculul la sarcini mobile.

Determinarea liniilor de influenţă ale eforturilor din barele grinzilor cu zăbrele complexe se face de obicei pe cale cinematică.

Deoarece însă mecanismele care rezultă prin suprimarea unei bare sînt în general mai complicate şi determinarea centrelor instantanee de rotaţie este mai dificilă, construirea diagramei deplasărilor pe verticală - care reprezintă alura liniei de influenţă - se face cu ajutorul unei epure de deplasări în care se stabilesc deplasările relative dintre noduri.

Acest mod de lucru este exemplificat prin determinarea liniilor de influenţă ale unor eforturi din barele grinzii cu zăbrele din fig.IV.42 şi anume:

a) Linia de influenţă a efortului din bara 4-6 a tălpii superioare

Scoţînd bara 4-6 şi înlocuind-o cu perechea de eforturi corespunzătoare, rezultă un mecanism pentru deplasări virtuale alcătuit din cele trei porţiuni cu conturul haşurat, nedeformabile geometric (fig.IV.42.a). Pentru simplificarea determinării deplasărilor relative dintre noduri, se mai poate face artificial mutării articulaţiei din nodul 1 în nodul 5, nodurile 5,6, 7....12 fiind în această ipoteză fixe (5';6'; 7'...12' coincid deci cu polul O al epurei deplasărilor). Se determină apoi în ordine deplasările nodurilor 1 (verticală şi arbitrară ca mărime), 2, 4 şi 3, folosind principiile cunoscute (Subcapitolul II.2.3.2 - punctul b). Rezultă astfel diagrama polară din fig. IV.42.c. Cu ajutorul acestei epure se trasează apoi - prin translaţie-diagrama deplasărilor pentru calea jos (nodurile 1, 5, 7, 9, 12 fig.IV.42.c) sau pentru calea sus (nodurile 3,4 6, 8, 10 - fig.IV.42.d).

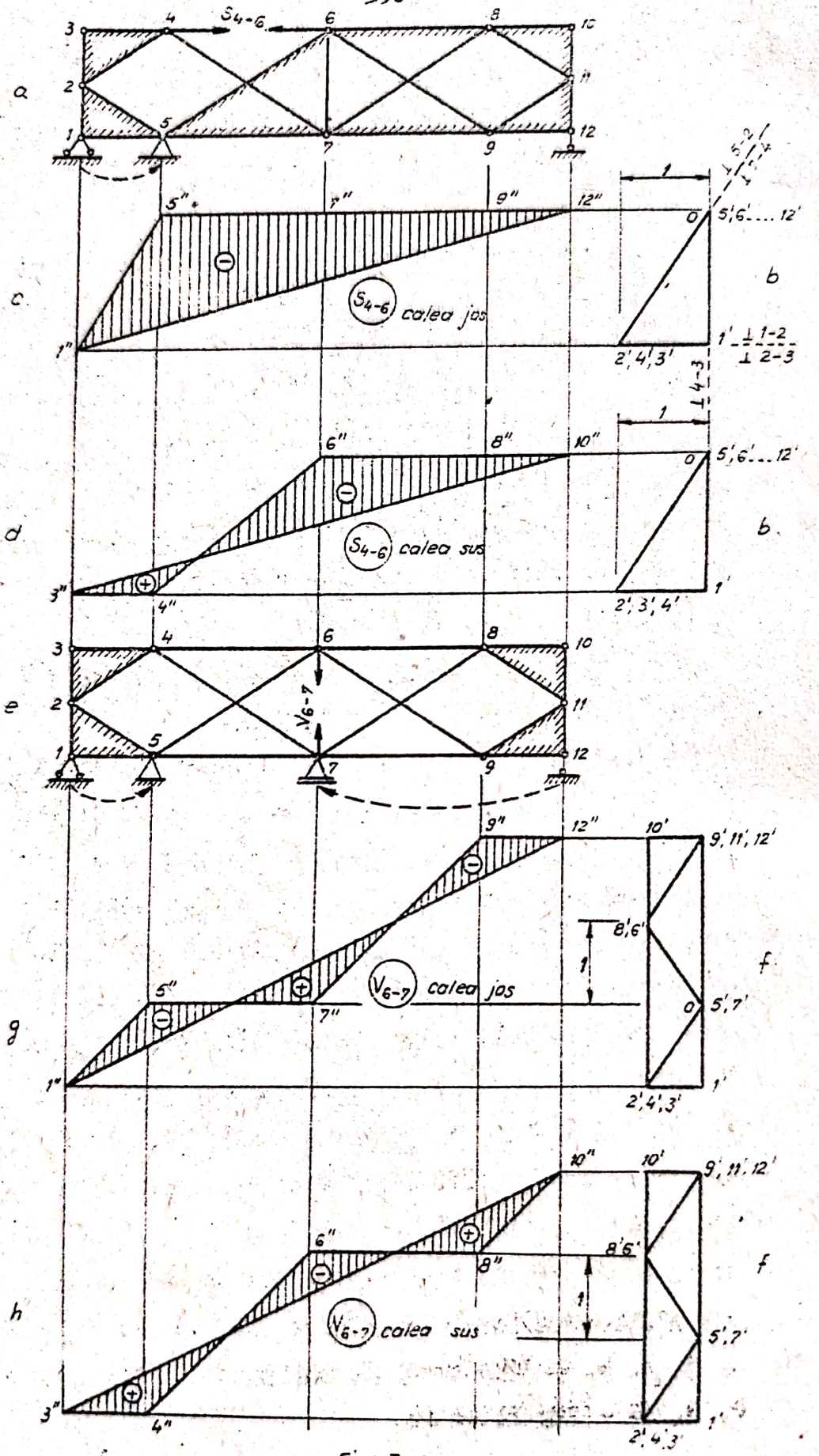

a
S_{4-6}
b
c
S_{4-6} calea jos
d
S_{4-6} calea sus
e
V_{6-7}
f
g
V_{6-7} calea jos
h
V_{6-7} calea sus

Fig. IV. 42

Linia de referinţă se duce apoi pe baza condiţiei de deplasări nule pe verticală în nodurile 1 şi 12, respectiv în nodurile 3 şi 10, făcîndu-se astfel şi corecţia ipotezei de mutare a articulaţiei din 1 în 5.

Scara liniei de influenţă rezultă din condiţia:

$$\delta^{(5)}_{4-6} = 1 \qquad \text{(IV.75)}$$

ordonatele măsurîndu-se deci la scara mărimii acestei deplasări care se consideră unitară în fig.IV.42.b.

b) Linia de influenţă a efortului din montantul central 6-7.

Se poate face şi în acest caz artificiul mutării articulaţiei din nodul 1 în nodul 5 şi a reazemului simplu din 12 în 7 obţinîndu-se astfel bara 5-7 fixă (fig.IV.42.e), după care se determină în ordine deplasările nodurilor 1 (verticală şi arbitrară ca mărime) 2, 4, 3, 6, 8, 9, 11, 10 şi 12, rezultînd diagrama polară din fig.IV.42.f . Cu ajutorul acestei epure se construieşte apoi diagrama deplasărilor pe verticală pentru calea jos (nodurile 1, 5, 7, 9, 12 - fig.IV.42.g) sau pentru calea sus (nodurile 3, 4, 6, 8, 10 - fig.IV.42.h).

Linia de referinţă se duce din condiţia ca deplasările verticale ale nodurilor 1 şi 12, respectiv 3 şi 10 să fie nule, iar scara liniei de influenţă rezultă din condiţia:

$$\delta^{(v)}_{6-7} = 1 \qquad \text{(IV.76)}$$

ordonatele avînd deci valori proporţionale cu această mărime considerată unitară în fig.IV.42.f.

IV.4. Grinzi cu zăbrele cu console şi articulaţii.

IV.4.1. Generalităţi.

Aceste sisteme, specifice în special structurilor de rezistenţă pentru poduri, sînt compuse din grinzi simple

cu zăbrele (grinzi simplu rezemate cu sau fără console, grinzi în consolă), legate între ele prin articulaţii. La proiectarea şi conceperea raţională a acestor sisteme, se respectă în general principiile analizate în legătură cu grinzile Gerber cu secţiune plină (subcapitolul II.1.4).

Un exemplu de sistem Gerber cu zăbrele cu o alcătuire foarte judicioasă, este structura metalică de rezistenţă a podului peste Dunăre de la Cernavodă, construit între anii 1890-1895, operă a inginerului român Anghel Saligny. In fig.IV.43.a este reprezentată schema statică a unei porţiuni din structura podului principal de la Cernavodă, iar în fig.IV.43.b diagrama de momente încovoietoare a unei grinzi Gerber cu secţiune plină, avînd aceleaşi dimensiuni geometrice, sub acţiunea unei sarcini uniform distribuite în tot lungul grinzii.

Aşa după cum se ştie, expresiile eforturilor din barele tălpilor grinzilor simple cu zăbrele (la care se reduc - prin descompunere - grinzile Gerber), sînt de forma:

$$N_{i-j} = \pm \frac{M_K^0}{d_K} \qquad \text{(IV.77)}$$

unde:

M_K^0 = momente încovoietoare la sistemul cu secţiune plină, avînd aceeaşi alcătuire şi aceleaşi dimensiuni ca grinda cu zăbrele (deci în acest caz ordonata ale diagramei din fig.IV.43.b);

d_K = distanţa de la nodul K, aflat pe o talpă, la bara (i-j) a celeilalte tălpi.

Se vede că forma grinzilor podului în discuţie a fost aleasă în aşa fel, încît distanţele dintre tălpi - deci mărimile d_K - să varieze aproximativ asemănător cu diagrama de moment M_K^0, ceea ce face ca rapoartele M_K^0 / d_K şi prin urmare

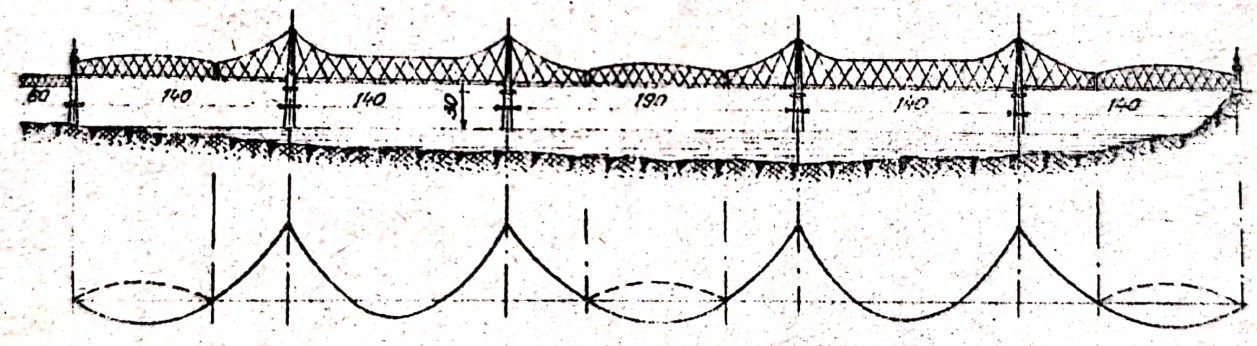


Fig. IV. 43

eforturile axiale din barele tălpilor să fie apropiate între ele ca mărime în lungul întregii structuri.

Aceste este de altfel, unul dintre criteriile principale care trebuie luate în considerare la alcătuirea formei grinzilor cu zăbrele cu console şi articulaţii.

Un alt aspect care trebuie avut în vedere, se referă la alegerea raportului dintre lungimea consolelor şi cea a deschiderilor, element care influenţează de asemenea mărimea eforturilor din barele sistemului cu zăbrele. Acest raport trebuie desigur corelat şi cu cel dintre mărimea sarcinilor permanente şi cea a sarcinilor utile, avînd în vedere ipotezele practice de încărcare a structurii.

In fig.IV.44 sînt prezentate alte cîteva tipuri de sisteme cu zăbrele cu console şi articulaţii utilizate ca structuri de rezistenţă la diferite construcţii metalice.

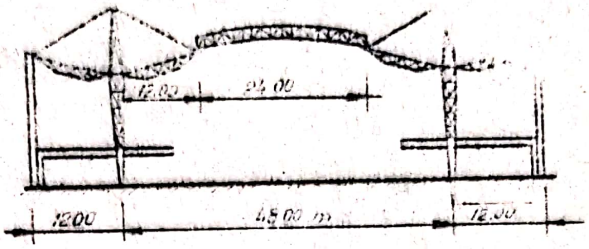
IV.4.2. Calculul la sarcini fixe.

Determinarea eforturilor din barele sistemelor cu zăbrele cu console şi articulaţii se face cel mai simplu prin descompunerea acestora în sisteme simple - principale şi secundare - şi rezolvarea lor prin metodele cunoscute, în funcţie de alcătuirea respectivă (metoda secţiunilor, metoda izolării nodurilor etc.).

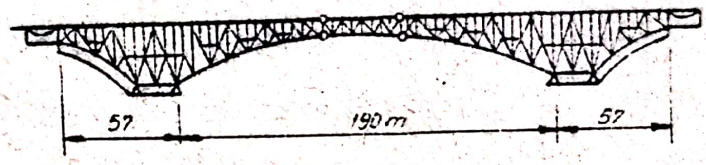
Aşa după cum s-a precizat la grinzile Gerber cu secţiune plină, fiecare sistem simplu este acţionat de încărcările aferente directe şi de componentele (reacţiunile cu semne schimbate) transmise de sistemele secundare care se descarcă pe el.

IV.4.3. Calculul la sarcini mobile.

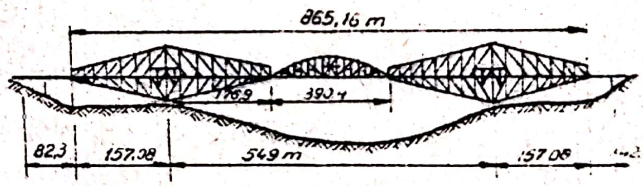
Determinarea liniilor de influenţă ale eforturilor din barele sistemelor cu zăbrele cu console şi articulaţii, nece-



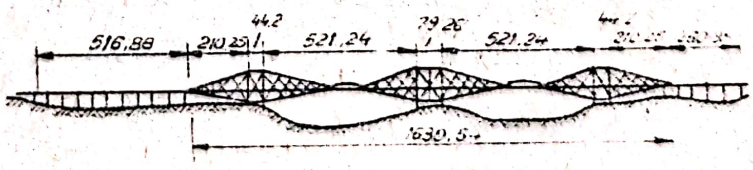
a



b



c



d

Fig IV 44

Scanned with OKEN Scanner

sare determinării eforturilor maxime produse de convoaiele de sarcini mobile, se face cel mai simplu prin utilizarea metodei cinematice, așa după cum se vede în fig.IV.45. Pentru grinda Gerber cu zăbrele considerată în fig.IV.45.a, au fost determinate următoarele linii de influență.

- Linia de influență a efortului din bara 16-18 a tălpii superioare.

Centrele instantanee de rotație pentru cele patru corpuri rezultat din suprimarea barei 16-18, se stabilesc simplu (fig.IV.45.b) și rezultă diagrama de deplasări pe verticală din fig.IV.45.c. Scara liniei de influență se determină din condiția:

$$\delta^{(s)}_{16-18} = 1 = \theta_{2,3} \cdot d_{19} \quad \text{deci} \quad \theta_{2-3} = \frac{1}{d_{19}} \qquad (IV.78)$$

ceea ce revine de a considera la distanța orizontală d_{19} față de (2-3), deplasarea relativă dintre corpurile II și III egală cu unitatea.

Această linie de influență se poate determina simplu și pe cale analitică. Folosind metoda secțiunilor, expresia efortului axial din bara 16-18 este:

$$S_{16-18} = - \frac{M^{o}_{19}}{d_{19}} \qquad (IV.79)$$

Se construiește deci linia de influență a momentului $-M^{o}_{19}$ pe deschiderea centrală, împărțind ordonatele la d_{19}; apoi, se prelungesc ramurile liniei de influență pe console și se completează pe lungimea sistemelor secundare cu ramuri care au ordonate zero în dreptul reazemelor din capetele grinzii.

- Linia de influență pentru efortul din diagonala 16-19

Scoțînd bara 16-19 și înlocuind-o cu perechea de eforturi D_{16-19}, rezultă un mecanism pentru deplasări virtuale alcătuit

din 6 corpuri. Cunoscînd direct centrul instantaneu absolut (2,T) (în articulaţie B) şi centrele instantanee relative (1,2), (2,3), (2,4), (3,5), (4,5) şi (5,6), precum şi direcţiile reazemelor simple din A, C, D, se determină în ordine: (1,T), (2,5), (5,T), (6,T), (3,T), (3,4) şi (4,T) (fig.IV.45.d).

Alura liniei de influenţă este dată pentru calea jos de diagrama deplasărilor pe verticală a corpurilor I, II, IV, V, VI, (fig.IV.45.e), iar scara rezultă din condiţia:

$$\delta^{(2)}_{16-19} = 1 = \theta_{2,4} \cdot d_{17} \quad \text{deci:} \quad \theta_{2,4} = \frac{1}{d_{17}} \qquad \text{(IV.80)}$$

- <u>Linia de influenţă pentru efortul din montantul 14-15</u>

Mecanismul pentru deplasări virtuale rezultat în fig.IV.45.f, prin suprimarea montantului şi înlocuirea sa cu perechea de eforturi V_{14-15}, are corpul V fix (sistem nedeformabil simplu rezumat) şi corpul VI de asemenea fix (sistem nedeformabil secundar, rezemat în D şi articulat de corpul V fix). Astfel - pentru calea jos - trebuie cunoscute numai centrele instantanee (2,T), (1,2) şi (1,T) care se găsesc imediat.

Alura liniei de influenţă este trasată în fig.IV.45.g (porţiunea haşurată). Scara rezultă din condiţia:

$$\delta^{(V)}_{14-15} = 1 \qquad \text{(IV.81)}$$

ceea ce necesită determinarea poziţiei nodului 14, şi deci trasarea diagramelor de deplasări şi pentru corpurile III şi IV. Centrul absolut de rotaţie (4,T) se găseşte în nodul 16, iar centrul absolut de rotaţie (3,T) se găseşte la intersecţia direcţiilor (2,T) - (2,3) şi (4,T) - (3,4). Astfel, se poate duce dreapta III' prin (3,T)' şi (2,3)' (punct comun corpurilor II şi III) şi apoi dreapta IV' prin (3,4)' şi (4,T)', determinîndu-se poziţia nodului 14 şi deci ordonata 14'- 15' care se

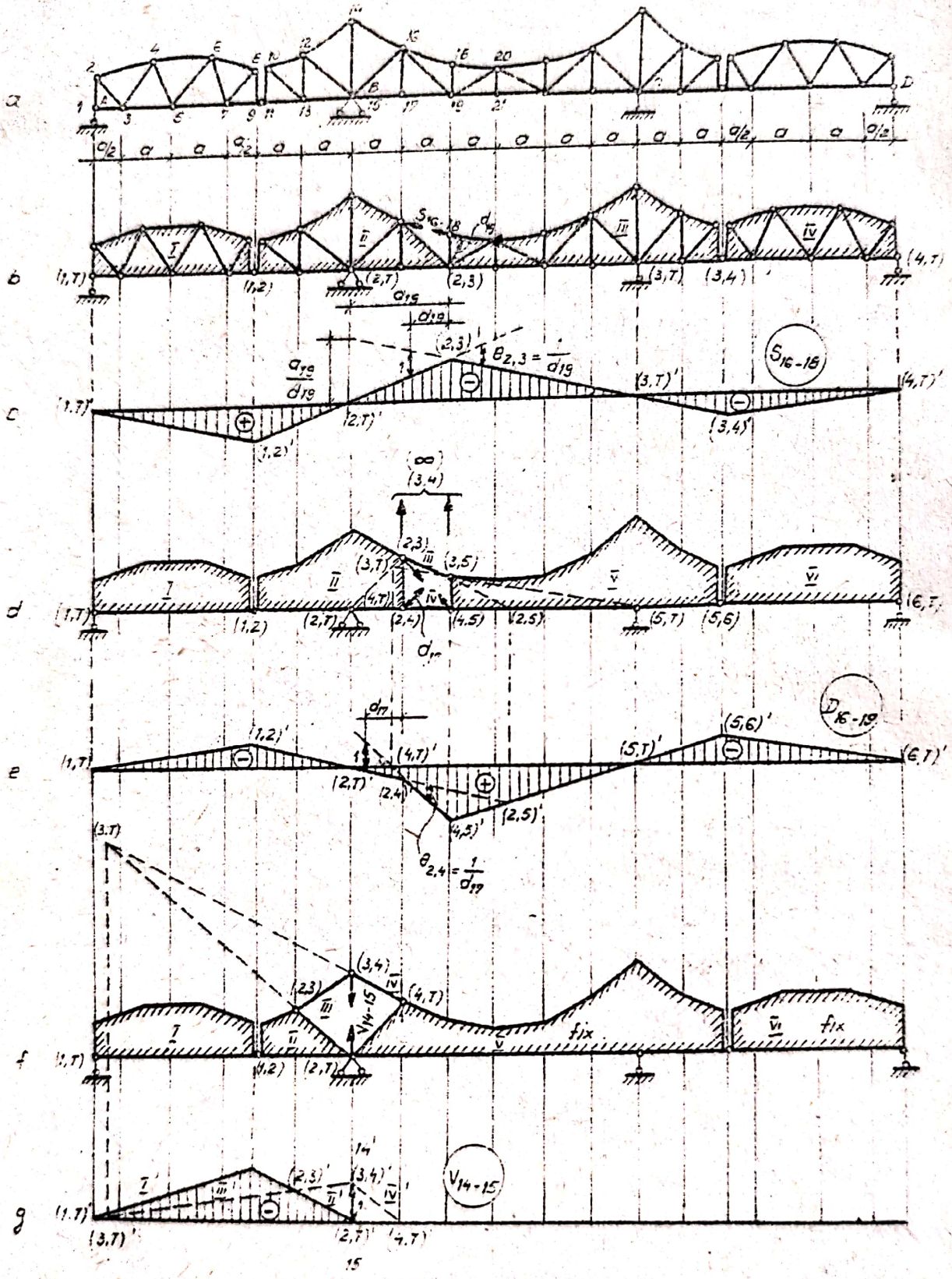


Fig. IV 45

consideră egală cu 1.

IV.5. Arce cu zăbrele.

IV.5.1. Generalităţi

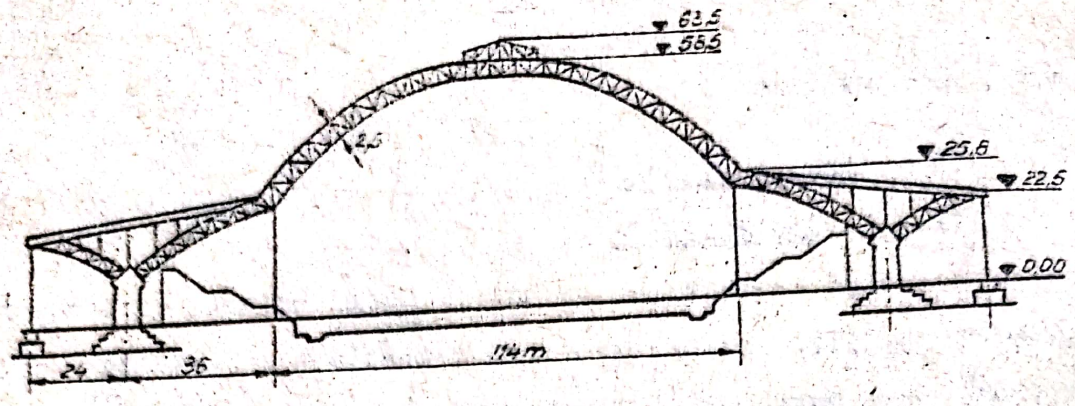
Aşa după cum a rezultat din tratarea arcelor cu secţiune plină (cap.III), aceste structuri reprezintă sisteme cu o distribuţie mai raţională a eforturilor, în comparaţie cu sistemele liniare de aceleaşi dimensiuni geometrice.

Arcele cu zăbrele, în barele cărora - în cazul admiterii ipotezelor analizate la începutul acestui capitol (subcap.IV.1.2) - apar numai forţe axiale de întindere sau de compresiune, sînt cu atît mai mult structuri avantajoase, permiţînd acoperirea unor deschideri mari, de ordinul a 100-200 m şi chiar mai mult. Sînt de aceea utilizate ca structuri de rezistenţă atît pentru poduri, cît şi pentru alte construcţii importante ca: săli de expoziţii, săli de sport, hangare de avioane etc.

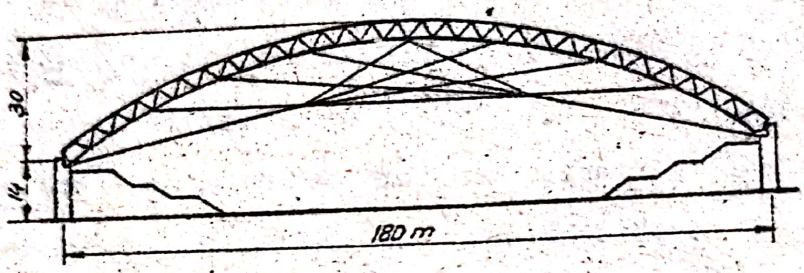
In fig.IV.46 sînt prezentate cîteva exemple de structuri de arce cu zăbrele proiectate şi realizate în diferite ţări ale lumii.

In general, arcele cu zăbrele se pot alcătui pe schema oricăruia dintre tipurile de arce cu secţiune plină static determinate sau static nedeterminate. Dintre arcele static determinate cu zăbrele, cele mai mult utilizate sînt cele cu trei articulaţii, tipurile principale fiind cele din fig.IV.47.a - arc cu o talpă dreaptă, b - arc cu tălpile paralele, c - arc cu înălţimea variabilă şi d - arc cu ambele tălpi drepte (cadru cu trei articulaţii).

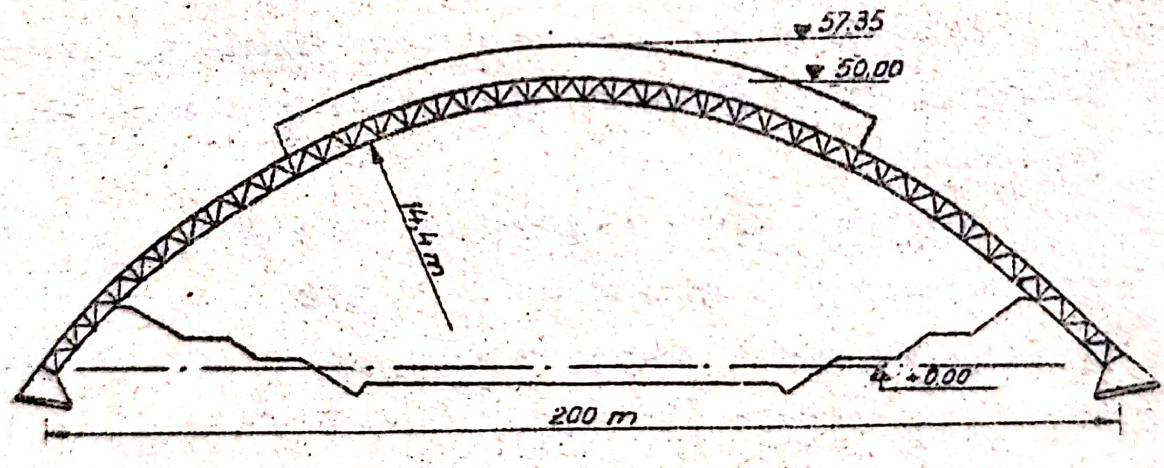
In cazul în care se urmăreşte evitarea transmiterii împingerilor la elementele de rezemare (în special la arcele utilizate ca structuri de rezistenţă pentru acoperişuri rezemate pe stîlpi sau ziduri), se foloseşte arcul cu tirant la nivelul



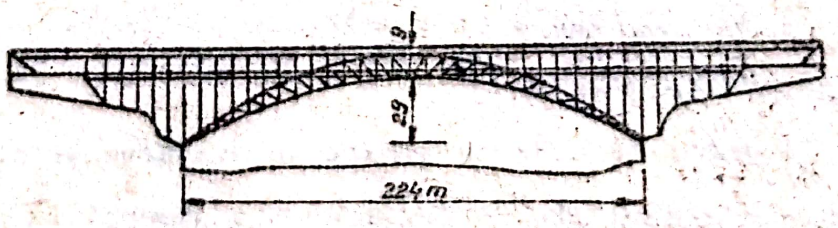
a



b



c



d

Fig IV 46

Scanned with OKEN Scanner

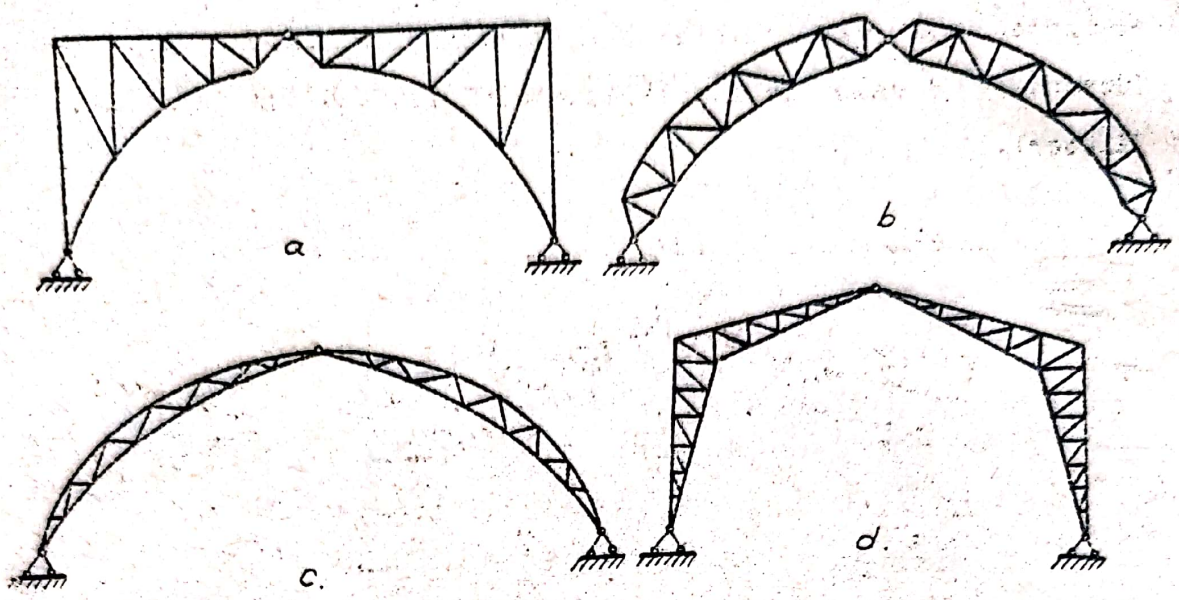


Fig IV.47

naşterilor sau supraînălţat.

IV.5.2. Calculul la sarcini fixe.

a) Determinarea reacţiunilor - se face ca şi la arcele cu secţiune plină, în funcţie de sistemul de rezemare (cap.III). Pentru arcul cu zăbrele cu trei articulaţii din fig.IV.48 de exemplu, reacţiunile se determină astfel:

$$V_A = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot b_k}{l} \quad ; \quad V_B = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot a_k}{l} \qquad \text{(IV.82)}$$

$$H_A = H_B = \frac{M_C^0 \ st(dr)}{f} \qquad \text{(IV.83)}$$

Sau, se poate utiliza procedeul grafic descris în paragr. III.2.1.2 - punct a.

b) Determinarea eforturilor din bare se face prin metodele analizate pentru grinzi cu zăbrele, procedeele principale rămînînd calea grafică a metodei izolării nodurilor (epura Cremona) şi calea analitică a metodei secţiunilor (procedeul Ritter).

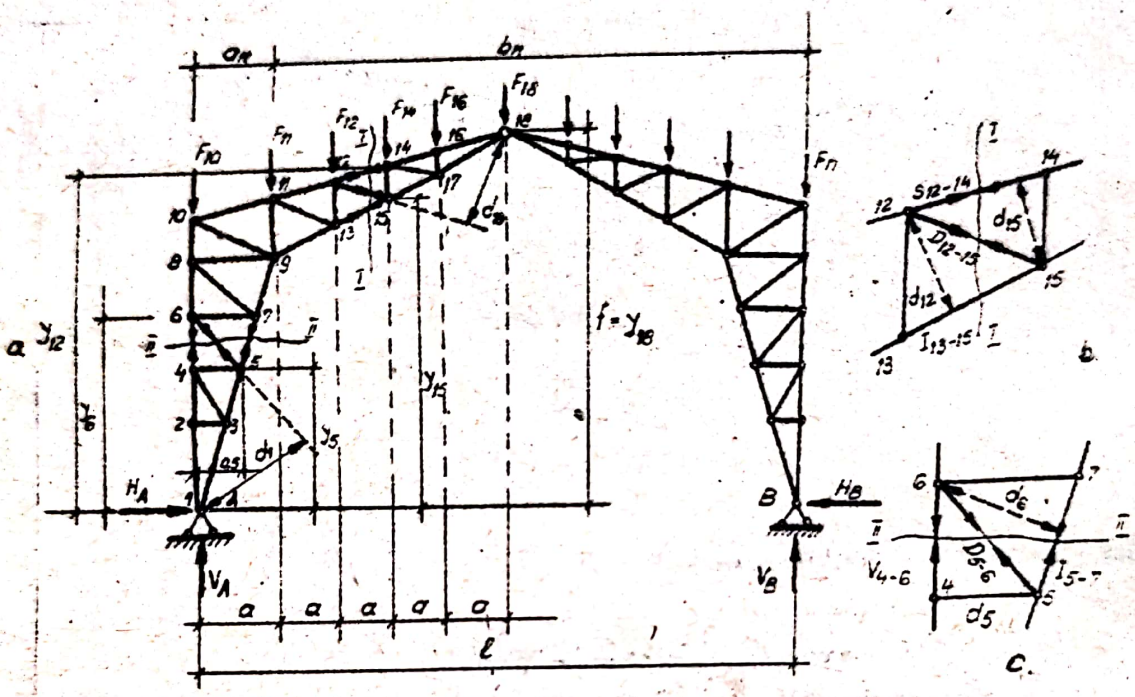


Fig. IV.48

Folosind de exemplu secţiunea I-I, se pot determina următoarele eforturi:

- din ecuaţia de echilibru $M_{(12)} = 0$:

$$V_A \cdot 2a - F_{10} \cdot 2a - F_{11} \cdot a - H_A \cdot y_{12} - I_{13-15} \cdot d_{12} = 0$$

se deduce:

$$I_{13-15} = \frac{V_A 2a - F_{10} 2a - F_{11} a - H_A y_{12}}{d_{12}} = \frac{M_{12}^0 - H_A \cdot y_{12}}{d_{12}} = \frac{M_{12}^{arc}}{d_{12}} \quad (IV.84)$$

- din ecuaţia de echilibru $M_{(15)} = 0$ se deduce:

$$S_{12-14} = -\frac{M_{15}^0 - H \cdot y_{15}}{d_{15}} = \frac{M_{15}^{arc}}{d_{15}} \quad (IV.85)$$

Distanțele d_{12} și d_{15} sînt indicate în fig.IV.48.b

- din ecuația de echilibru $M_{(18)} = 0$:

$$V_A 5a - F_{10} \cdot 5a - F_{11} \cdot 4a - F_{12} \cdot 3a - H_A \cdot y_{18} - D_{12-15} \cdot d_{18} = 0$$

se deduce:

$$D_{12-15} = \frac{V_A \cdot 5a - F_{10} \cdot 5a - F_{11} \cdot 4a - F_{12} \cdot 3a - H_A \cdot y_{18}}{d_{18}} = \frac{M_{18}^{st}}{d_{18}} \qquad (IV.86)$$

In relația (IV.86), s-a notat cu M_{18}^{st} momentul sarcinilor (acțiuni și reacțiuni) din stînga secțiunii I-I, în raport cu nodul 18 de intersecție a tălpilor, acest moment fiind diferit de data aceasta de M_{18}^{arc} (momentul tuturor sarcinilor din stînga nodului 18) care este egal cu zero.

La fel se determină și eforturile din barele stîlpilor (secțiunea II-II):

$$M_{(6)} = 0: \; - H_A \cdot y_6 - I_{5-7} \cdot d_6 = 0$$

deci:

$$I_{5-7} = - \frac{H_A \cdot y_6}{d_6} = - \frac{M_6^{arc}}{d_6} \qquad (IV.87)$$

$$M_{(5)} = 0: \; V_A \cdot a_5 - H_A \cdot y_5 + V_{4-6} \cdot d_5 = 0$$

de unde:

$$V_{4-6} = \frac{V_A \cdot a_5 - H_A \cdot y_5}{d_5} = \frac{M_5^{arc}}{d_5} \qquad (IV.88)$$

Distanțele d_6 și d_5 sînt indicate în fig.IV.48.c

$$M_{(1)} = 0: \quad - D_{5-6} \cdot d_1 = 0$$

deci:

$$D_{5-6} = 0 \qquad (IV.89)$$

Eforturile din celelalte bare se deduc în mod asemănător.

IV.5.3. Calculul la sarcini mobile

Liniile de influenţă necesare calculului eforturilor maxime produse de convoaiele de sarcini mobile, se determină fie pe cale analitică, fie pe cale cinematică, aşa după cum se va proceda pentru eforturile din cîteva bare ale arcului cu zăbrele din fig.IV.49 şi anume:

- Linia de influenţă a efortului din bara 5-7 a tălpii superioare s-a determinat pe cale analitică, pe baza expresiei acestui efort (secţiunea I-I):

$$S_{5-7} = -\frac{M_8^{arc}}{d_8} \qquad (IV.90)$$

Se construieşte astfel linia de influenţă a momentului din secţiunea 8 ca la arcul cu trei articulaţii, toate ordonatele acesteia împărţindu-se prin d_8. Se foloseşte punctul neutru N, (vezi subcap.III.2.2.1-b), aflat la intersecţia direcţiei A-8 a reacţiunii din A (dusă din condiţia $S_{5-7} = -\bar{M}_8/\bar{d}_8 = 0$) cu direcţia B-C a reacţiunii din B (dusă din condiţia $\bar{M}_C = 0$). Rezultă în acest fel linia de influenţă din fig.IV.49.b.

- Linia de influenţă a efortului din diagonala 5-8 s-a determinat pe cale cinematică, necesitînd cunoaşterea în ordinea stabilirii, a următoarelor centre instantanee de rotaţie (fig.IV.49.c): (1,T), (5,T) (cunoscute direct), (1,4), (4,T), (2,T). Rezultă linia de influenţă din fig.IV.49.d, a cărei scară se determină din condiţia:

$$\delta^{(D)}_{5-8} = 1 = \sigma_{2-4} \cdot d_7 \quad \text{deci:} \quad \sigma_{2,4} = \frac{1}{d_7} \qquad (IV.91)$$

- Linia de influenţă a efortului din montantul marginal 1-2 s-a determinat pe cale cinematică, centrele instantanee ale corpurilor I, II, III stabilindu-se foarte simplu (fig.IV.49.e).

Rezultă astfel linia de influenţă din fig.IV.49.f pentru

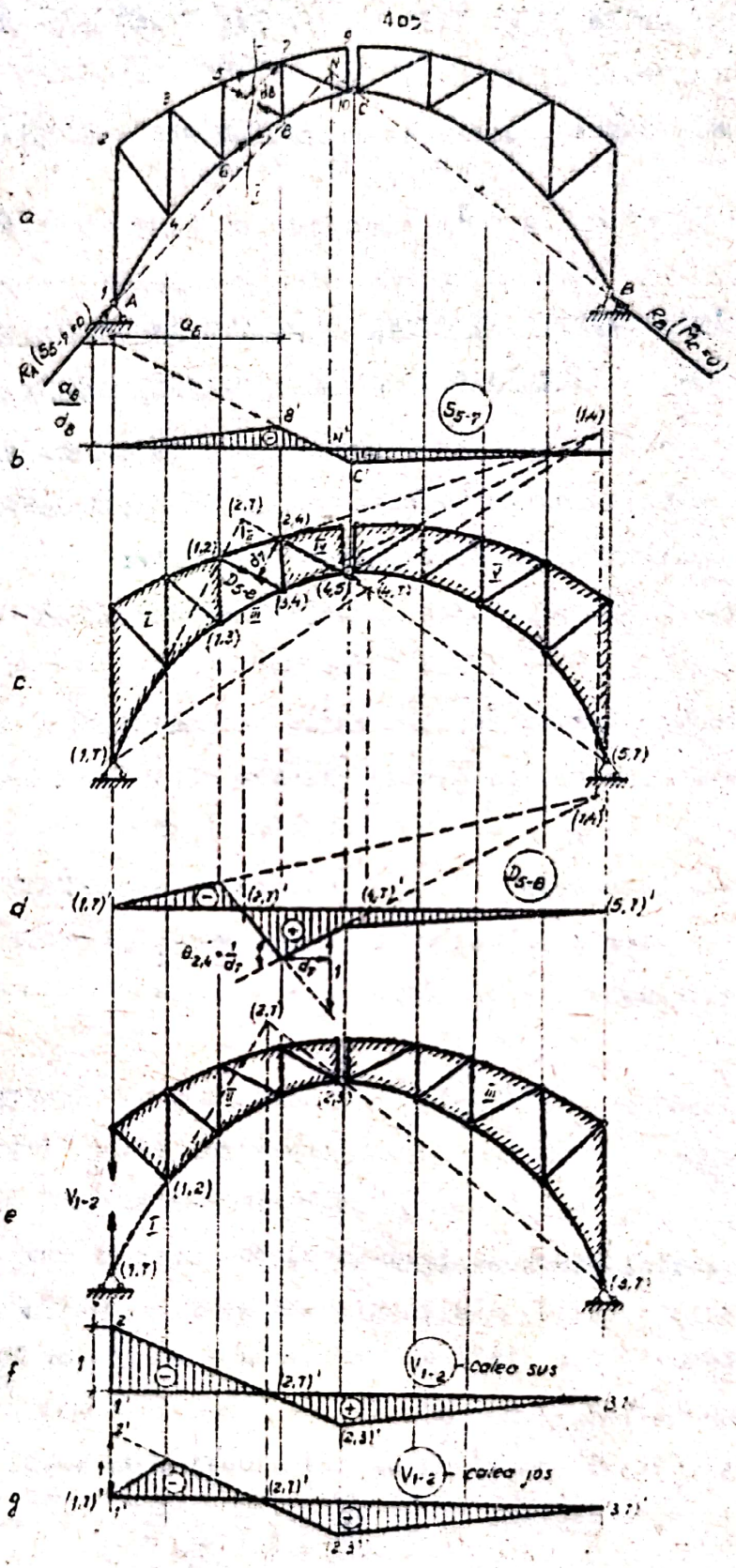

a
b
c
d
e
f
g
A
B
C
$R_A(S_{5-7}=0)$
$R_B(M_C=0)$
a_B
$\frac{a_B}{d_B}$
S_{5-7}
D_{5-8}
V_{1-2}
V_{1-2} - calea sus
V_{1-2} - calea jos
(1,4)
(2,7)
(2,4)
(1,2)
(3,4)
(4,5)
(4,7)
(1,3)
(1,7)
(5,7)
(1,4)
(1,7)'
(2,7)'
(4,7)'
(5,7)'
(2,7)
(1,2)
(1,7)
(3,7)
(2,7)'
(2,3)'
(3,7)
(1,7)'
(2,7)'
(2,3)'
(3,7)'

Fig. IV 49

calea sus (corpurile II și III) și din fig.IV.49-g pentru calea jos (corpurile I, II și III).

In ambele cazuri, scara se determină din condiția:

$$\delta^{(v)}_{1-2} = 1 \qquad \text{(IV.92)}$$

IV.6. Determinarea eforturilor maxime în barele sistemelor cu zăbrele acționate de sarcini mobile.

La toate categoriile de sisteme plane de bare articulate analizate în subcapitolele precedente, s-a indicat modul de obținere a liniilor de influență, necesare determinării eforturilor maxime produse în bare de acțiunea convoaielor de sarcini mobile.

Aici se va discuta modul practic de stabilire a valorilor maxime ale eforturilor pentru oricare din sistemele analizate.

In general, pentru o anumită poziție a convoiului de sarcini pe structură, valoarea unui efort N_{i-j} se poate scrie sub forma cunoscută:

$$N_{i-j} = \sum_{k=1}^{n} F_k \cdot n_{ij}^{(k)} \qquad \text{(IV.93)}$$

unde:

F_k = sarcini din convoi;

$n_{ij}^{(k)}$ = ordonate din linia de influență a efortului N_{i-j}, în dreptul sarcinilor F_k.

Relația (IV.93) arată că pentru a obține un efort N_{i-j} cît mai mare, este necesar să se așeze convoiul pe structură în așa fel încît să se obțină o sumă de produse $F_k \cdot n_{ij}^{(k)}$ cît mai mare. Pentru aceasta:

- se vor încărca porţiunile din structură cărora le corespund numai zone pozitive sau numai zone negative ale liniei de influenţă;

- se vor alege poziţiile convoaielor cărora le corespund un număr cît mai mare de sarcini pe zonele încărcate;

- se vor aşeza sarcinile de valori mari în dreptul ordonatelor mari şi cîte o sarcină în dreptul ordonatei maxime a liniei de influenţă.

Trebuie reţinut faptul foarte important că în cazul barelor ale căror eforturi axiale au linii de influenţă cu zone de semne diferite, este necesară determinarea atît a efortului maxim de întindere, cît şi a efortului maxim de compresiune. Aceasta, deoarece dimensionarea barelor la cele două tipuri de solicitări este diferită, în cazul compresiunii fiind necesar să se ţină seama şi de efectul de instabilitate. Mai mult decît atît, la structurile cu zăbrele din beton armat, comportarea barelor întinse sau comprimate prezintă diferenţieri importante, ceea ce face ca armarea barelor în cele două cazuri să aibă anumite particularităţi care trebuie în mod obligator avute în vedere.

Aşa după cum s-a văzut, prin folosirea metodei secţiunilor, eforturile din unele bare ale grinzilor cu zăbrele se pot exprima în funcţie de momentele încovoietoare sau forţele tăietoare ale unei grinzi simplu rezemate de aceeaşi deschidere cu grinda cu zăbrele şi acţionată de aceleaşi încărcări:

$$N_{i-j} = \pm \frac{M_k^0}{d_k} \quad \text{sau:} \quad N_{i-j} = \frac{T_k^0}{\sin \varphi} \qquad \text{(IV.94)}$$

In acest caz, pentru determinarea eforturilor maxime, se vor folosi aceleaşi procedee (analitice sau grafice) ca şi pentru calculul momentelor încovoietoare maxime sau forţelor

tăietoare maxime la grinda simplu rezemată cu secțiune plină (subcapitolele II.3.5.2 și II.3.5.3) și în consecință:

$$N_{i-j}^{(max)} = \frac{M_k^{o(max)}}{d_k} \quad \text{sau:} \quad N_{i-j}^{(max)} = \frac{T^{o(max)}}{\sin \varphi} \qquad \text{(IV.95)}$$

In celelalte cazuri, întrucît liniile de influență sînt în general de forme triunghiulare, (fig.IV.50.b), se poate considera că fiecare dintre acestea reprezintă linia de influență a unui moment încovoietor la o grindă simplu rezemată cu deschiderea egală cu lungimea zonei respective l_o, în secțiunea din dreptul vîrfului triunghiului (fig.IV.50.c)

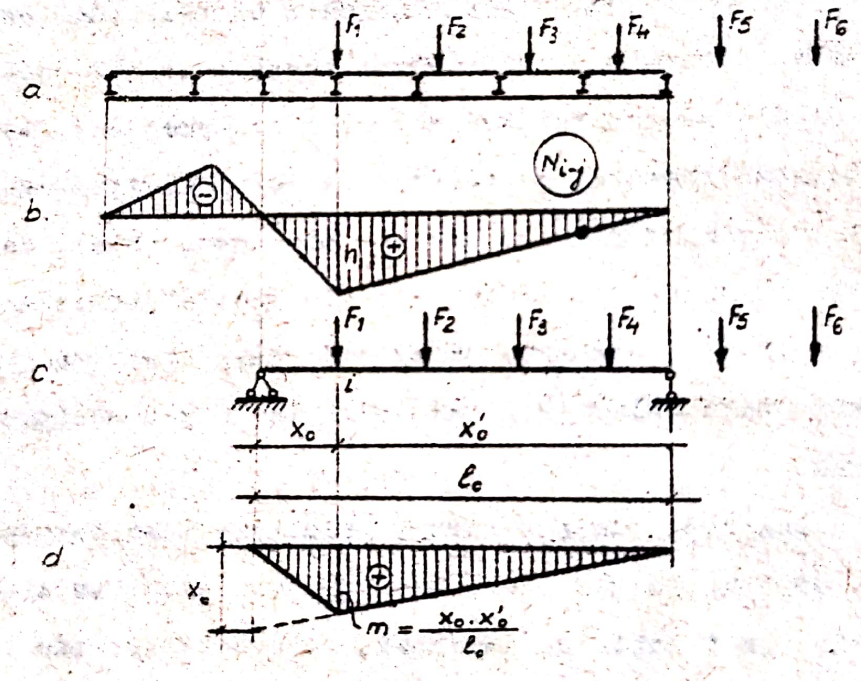


Fig IV 50

In consecință, se va determina momentul încovoietor maxim în secțiunea x_0 la grinda cu secțiune plină($M_o^{(max)}$), iar valoarea maximă a efortului axial N_{i-j}, se obține prin multiplicarea lui $M_o^{(max)}$ cu raportul ordonatelor maxime ale celor două linii de influență (fig.IV.50.b,d):

$$N_{i-j}^{(max)} = M_c^{max} \cdot \frac{n}{m} \qquad (IV.96)$$

întrucît toate ordonatele celor două linii de influenţă şi, deci şi eforturile corespunzătoare calculate cu această ordonată se găsesc în acelaşi raport.

Sau, se pot utiliza sarcinile echivalente, (subcapitolul II.3.5.5), cu ajutorul cărora determinarea liniilor de influenţă este şi mai simplă.

IV.7. Calculul sistemelor de bare articulate în cazul aplicării sarcinilor între noduri.

In toate problemele rezolvate anterior, s-a considerat valabilă ipoteza aplicării încărcărilor numai în nodurile sistemelor cu zăbrele, fie că era vorba de sarcini fixe fie că se făcea calculul la sarcini mobile.

Există şi situaţii cînd anumite sarcini sînt aplicate pe bare şi în cele ce urmează se analizează modul de efectuare a calculului în aceste cazuri.

Se consideră grinda cu zăbrele din fig.IV.51.a, la care, pe anumite panouri se găsesc sarcini aplicate între noduri.

Intr-o primă etapă, se înlocuiesc sarcinile dintre noduri, cu sisteme echivalente de sarcini aplicate în nodurile din capetele fiecărei bare încovoiate. Astfel de exemplu, forţele P_1 şi P_2 de pe bara 2-4, se înlocuiesc cu două componente aplicate în nodurile 2 şi 4, V_2 şi V_4 fiind calculate ca reacţiuni cu semn schimbat ale încărcărilor respective (fig.IV.51.b).

Procedînd în mod analog pentru toate barele cu sarcini între noduri, se obţine un sistem de sarcini aplicate numai în noduri (inclusiv cele care acţionează direct în aceste puncte).

Rezolvînd grinda încărcată cu sarcini în noduri, printr-o

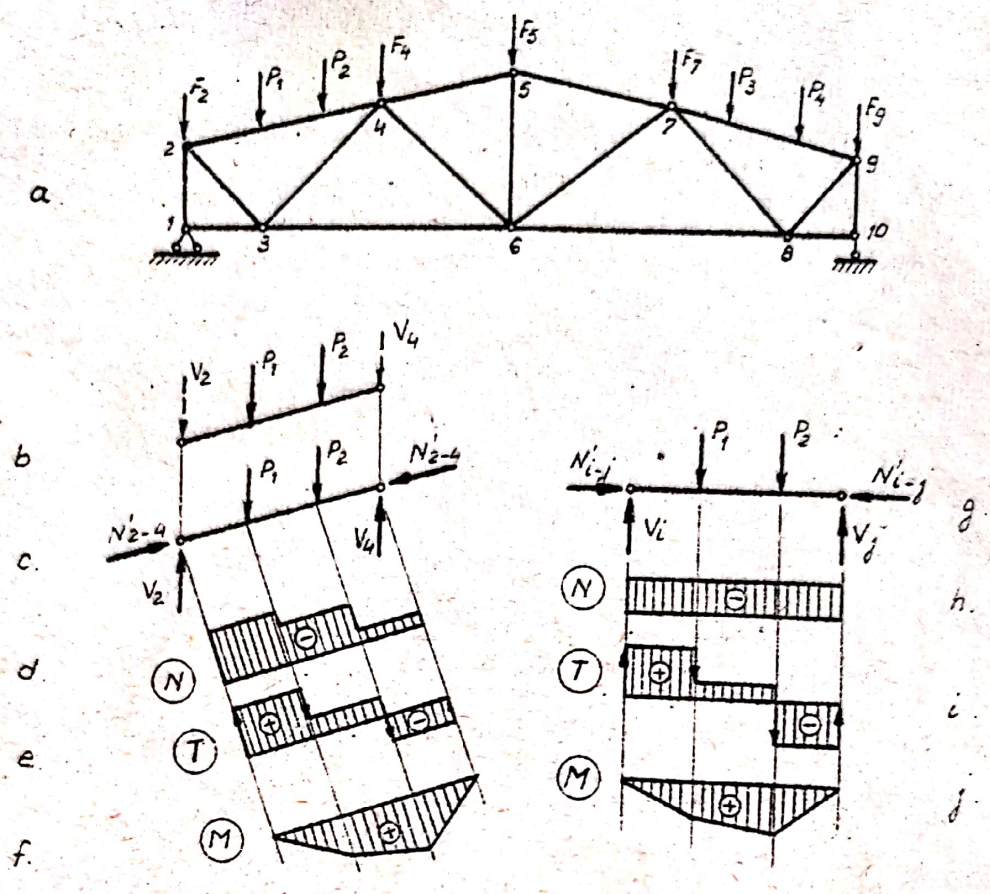


Fig. IV.51

metodă adecvată, se determină niște eforturi în bare N'_{i-j}.

Intrucît înlocuirea sarcinilor dintre noduri cu sarcini echivalente aplicate în noduri nu modifică eforturile de pe celelalte bare, pentru barele neîncărcate între noduri eforturile N'_{i-j} sînt chiar eforturile reale.

Pentru determinarea eforturilor reale din barele cu sarcini între noduri, se ia separat fiecare bară, încărcată cu sarcinile corespunzătoare P_k, cu eforturile N'_{i-j} și cu sarcinile $(-V_i, -V_j)$, acestea din urmă avînd rolul de anulare a efectului sarcinilor (V_i, V_j) considerate în prima etapă de calcul la determinarea eforturilor axiale N'_{i-j} (fig.IV.51.c).

Corespunzător acestor încărcări, se determină diagramele

de eforturi N, T, M pentru bara respectivă (fig.IV.51.d, e, f), necesare dimensionării la încovoiere cu forţă axială.

In cazul particular al acţiunilor dintre noduri normale pe bară (fig.IV.51.g), forţele P_k şi $(-V_i, -V_j)$ nu mai modifică eforturile axiale N'_{i-j} determinate în prima etapă, dar apar, evident şi în acest caz forţe tăietoare şi momente încovoietoare (diagramele din fig.IV.51.h, i, j).

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL V

SISTEME MIXTE STATIC DETERMINATE

V.1. Generalităţi

Sistemele mixte (combinate) reprezintă structuri de rezistenţă specifice construcţiilor de poduri, care îmbină avantajele arcelor (distribuţii raţionale ale eforturilor) cu cele ale sistemelor liniare (posibilitatea de realizare a unei căi de deplasare a convoaielor de sarcini mobile).

Elementele componente ale unui sistem mixt sînt:arcul, grinda şi montanţii, care leagă arcul şi grinda.

După modul de dispunere a grinzii în raport cu arcul,sistemele mixte se împart în trei categorii: sisteme cu calea sus (fig.V.1.a), sisteme cu calea jos (fig.V.1.b) şi sisteme cu calea la mijloc (fig.V.1.c).

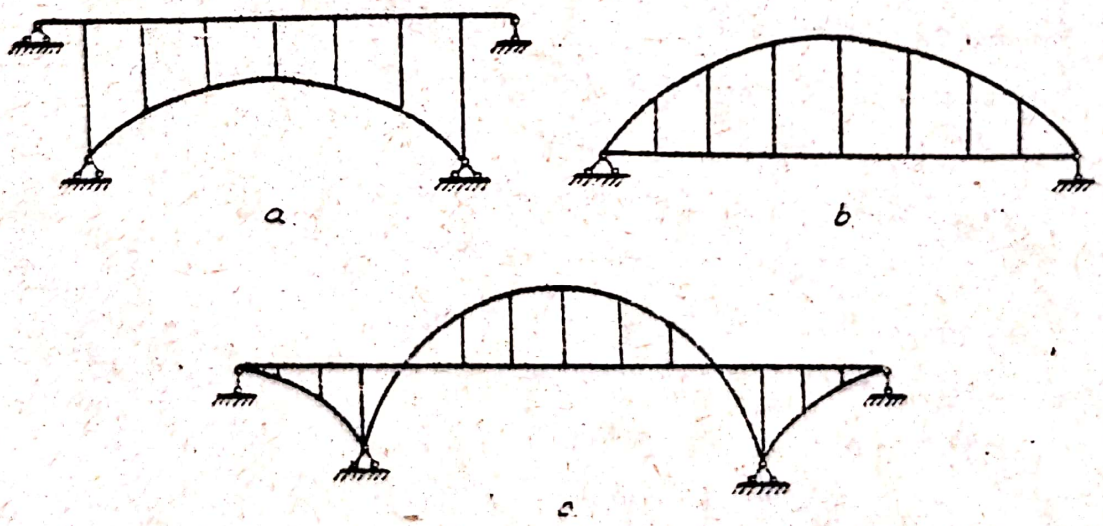


Fig V.1

Cele mai simple sisteme mixte sînt grinzile consolidate din fig.V.2, care poartă denumirea de grindă armată (a) şi respectiv de grindă macaz (b). In primul caz elementele înclinate de consolidare sînt supuse la întindere, deci, se pot realiza din cabluri, în al doilea caz aceste elemente sînt comprimate şi trebuie deci realizate din bare rigide.

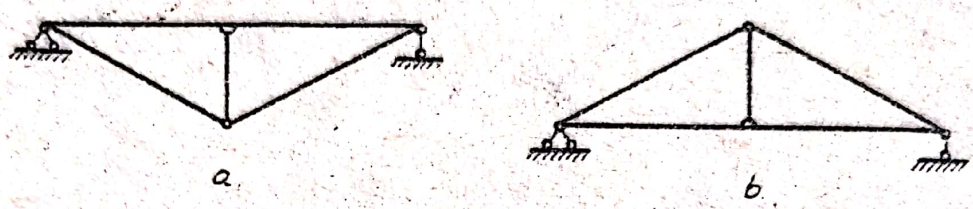


Fig V.2

In funcţie de rigiditatea relativă a celor trei tipuri de elemente componente (arc, grindă şi montanţi), sistemele mixte alcătuiesc diferite scheme de comportare şi deci de calcul şi anume:

a) Sisteme cu toate elementele rigide (fig.V.3.a), la care cele trei tipuri de elemente au rigidităţi apropiate.

b) Sisteme la care montanţii au rigiditate mică în raport cu arcul şi grinda şi nu pot prelua momente încovoietoare, fapt pentru care se consideră articulaţi la capete (fig.V.3.b).

c) Sisteme la care montanţii şi arcul au rigiditate mică în raport cu grinda şi în consecinţă prezintă o schemă de alcătuire ca cea din fig.V.3.c. Aceste sisteme se mai numesc şi grinzi întărite cu arce şi se caracterizează prin aceea că montanţii şi barele arcului preiau numai forţe axiale, în timp ce grinda este solicitată la încovoiere şi forţe axiale.

d) Sisteme la care rigiditatea arcului este mare în comparaţie cu cea a montanţilor şi grinzii şi se caracterizează prin faptul că arcul este solicitat la încovoiere şi forţe

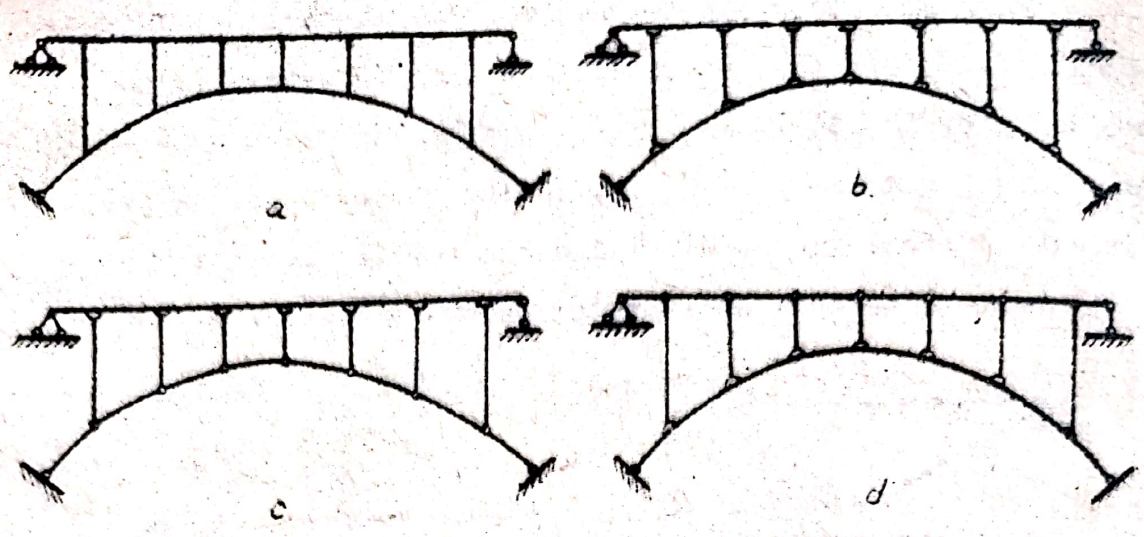


Fig V 3

axiale, în timp ce montanţii preiau numai forţe axiale, iar grinda este solicitată la forţe axiale şi la încovoiere numai din încărcări locale. Aceste sisteme au schema de alcătuire din fig.V.3.d şi se mai numesc arce întărite cu grinzi, folosindu-se mai rar datorită faptului că grinda, pe care se realizează calea de deplasare a convoaielor de sarcini mobile, prezintă discontinuităţi şi deci posibilitatea de producere a unor denivelări.

Alte variante de alcătuire sînt indicate în fig.V.4.a (sistem mixt cu montanţii oblici), fig.V.4.b (structură continuă cu o deschidere întărită cu arc) sau fig.V.4.c (sistem de grinzi consolidate cu contrafişe).

In fig.V.5 sînt prezentate schemele cîtorva realizări mai importante de structuri de rezistenţă pentru poduri, alcătuite ca sisteme mixte din oţel sau din beton armat, avînd calea sus calea jos sau calea la mijloc.

Sistemele mixte sînt în general structuri static nedeterminate. In acest capitol va fi însă dezvoltat calculul sistemelor mixte static determinate, utilizate mai rar ca atare, dar

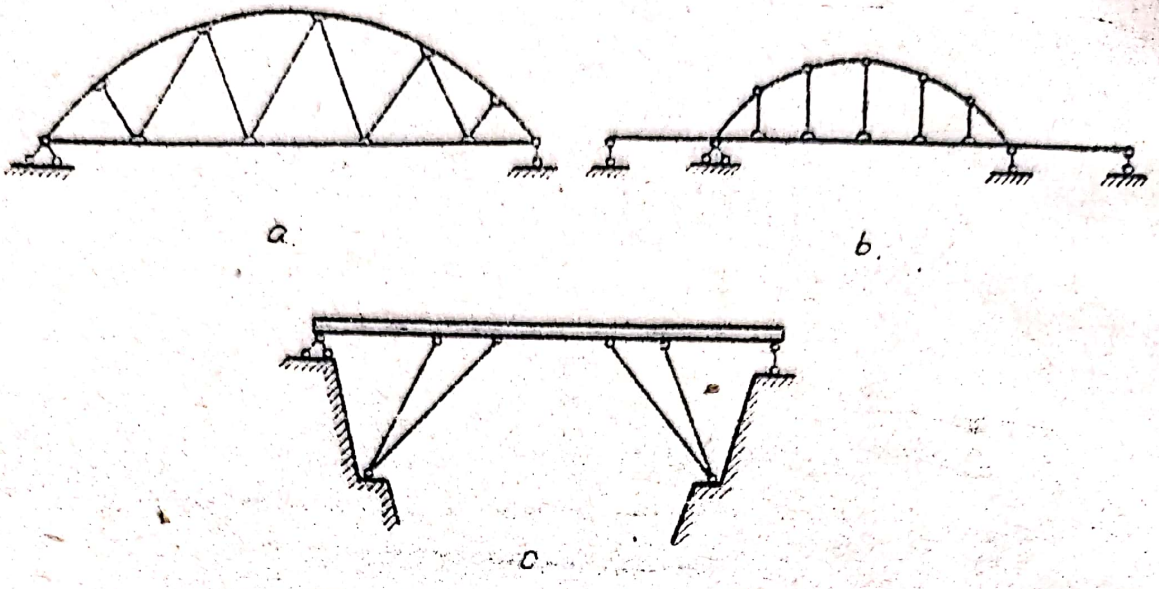


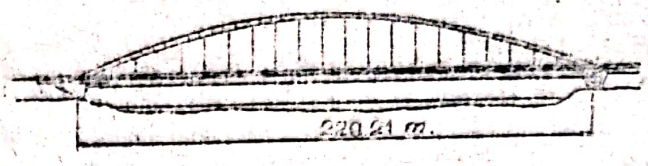
Fig. V.4

constituind sisteme de bază pentru rezolvarea structurilor hiperstatice. Se vor analiza structurile mixte cu grinda rigidă și arcul alcătuit din bare articulate, de tipul celei din fig. V.3.c, dar la care, pentru îndeplinirea condiției de determinare statică este necesar să se introducă o articulație în grindă. Această articulație se prevede de obicei la mijlocul deschiderii (fig.V.6.a,b). Rezultă astfel următoarele două tipuri de structuri mixte static determinate, al căror calcul va fi analizat în cele ce urmează:

1. Structură mixtă cu grinda de rigidizare la partea inferioară (fig.V.6.a).

2. Structură mixtă cu grinda de rigidizare la partea superioară (fig.V.6.b).

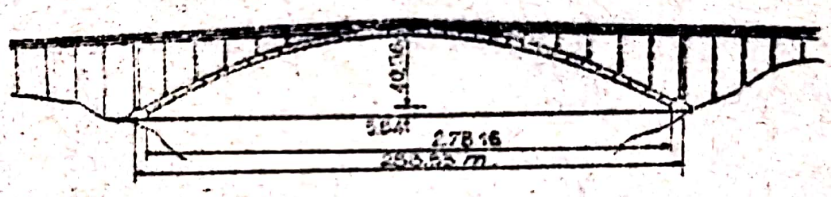
La ambele tipuri de structuri mixte, grinda de rigidizare poate fi cu secțiune plină sau cu zăbrele. Ultima soluție este, desigur, avantajoasă, întrucît - în condițiile respectării ipotezelor analizate la începutul capitolului IV - în toate elementele structurii nu apar decît forțe axiale, eliminîndu-


220.41 m.

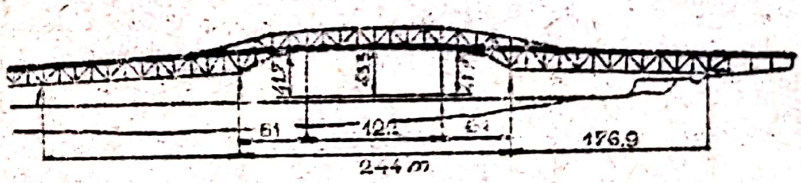
a.

76.25
330.00 m.
76.25

b.


40.50
178.16

c.


61
176.9
244 m.

d.

109.80
366.00 m.
129.8

e.

Fig V 5

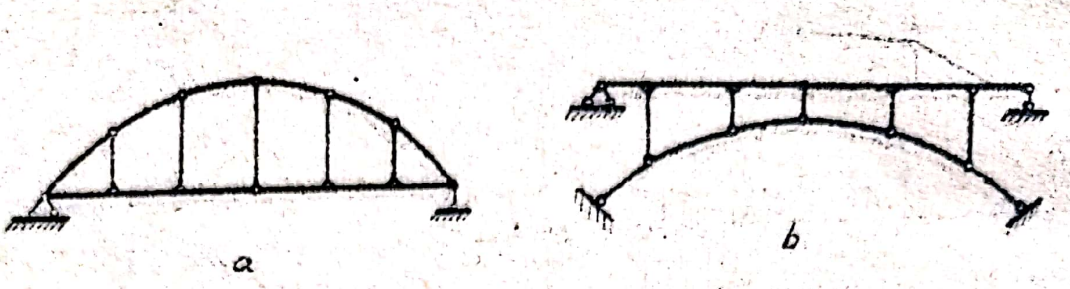


Fig V.6

se deci efectele de încovoiere produse de sarcinile utile.

V.2. Structuri mixte cu grinda de rigidizare la partea inferioară.

Se va analiza modul de calcul al acestui tip de structuri mixte la acțiunea sarcinilor fixe și mobile, considerînd cele două posibilități de alcătuire a grinzii de rigidizare.

V.2.1. Grinda de rigidizare cu secțiune plină.

V.2.1.1. Calculul la sarcini fixe.

Pentru sistemul din fig.V.7.1, calculul static cuprinde următoarele etape:

a) Calculul reacțiunilor.

Reacțiunile se determină ca la orice sistem simplu rezemat, adică (cazul sarcinilor verticale):

$$V_A = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \, b_k}{\ell} \; ; \; V_B = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \, a_k}{\ell} \qquad (V.1)$$

b) Determinarea eforturilor din barele arcului și din montanți.

Izolînd succesiv nodurile 1,2 etc. (fig.V.7.b,c) și scriind ecuațiile de echilibru prin proiecții, se obține:

$$\Sigma X = 0:$$

- în nodul 1: $S_1 \cos \alpha_1 - S_2 \cos \alpha_2 = 0$

deci: $S_1 \cos \alpha_1 = S_2 \cos \alpha_2 \qquad (V.2.a)$

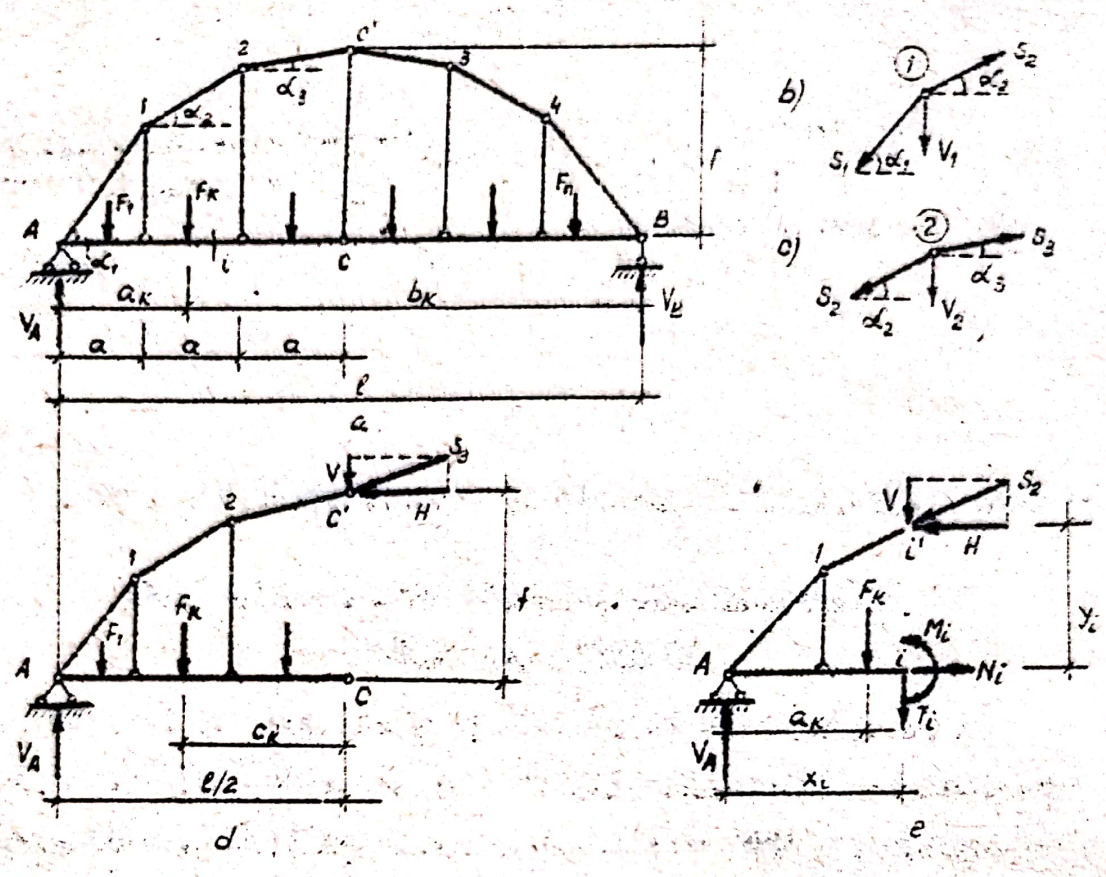


Fig. V.7

- în nodul 2: $S_2 \cdot \cos\alpha_2 - S_3 \cdot \cos\alpha_3 = 0$

deci: $S_2 \cdot \cos\alpha_2 = S_3 \cdot \cos\alpha_3$ (V.2.b)

și așa mai departe.

Se vede că rezultă prin urmare:

$$S_1\cos\alpha_1 = S_2\cos\alpha_2 = S_3\cos\alpha_3 = \ldots = S_i\cos\alpha_i = -H \quad (V.3)$$

ceea ce înseamnă că proiecțiile pe orizontală ale tuturor eforturilor din barele arcului sînt egale între ele și s-a notat această valoare cu - H (compresiune).

Din (V.3) rezultă:

$$S_1 = -\frac{H}{\cos\alpha_1};\quad S_2 = -\frac{H}{\cos\alpha_2};\quad S_3 = -\frac{H}{\cos\alpha_3}$$ și așa mai departe, (V.4)

adică, în general:

$$S_i = - \frac{H}{\cos \alpha_i} \qquad (V.5)$$

$\Sigma Y = 0$:

- în nodul 1:

$$V_1 + S_1 \sin \alpha_1 - S_2 \sin \alpha_2 = 0$$

de unde:

$$V_1 = - S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2$$

Ținînd cont de relațiile (V.4), se obține:

$$V_1 = H (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2) \qquad (V.6.a)$$

- în nodul 2:

$$V_2 + S_2 \sin \alpha_2 - S_3 \sin \alpha_3 = 0$$

de unde, ținînd cont de relațiile (V.4), rezultă:

$$V_2 = H (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_3) \qquad (V.6.b)$$

și așa mai departe.

Expresia eforturilor axiale de întindere din montanți are deci forma generală:

$$V_i = H (\operatorname{tg} \alpha_i - \operatorname{tg} \alpha_{i+1}) \qquad (V.7)$$

Relațiile (V.5) și (V.7) arată că pentru determinarea eforturilor din barele arcului și a eforturilor din montanți, trebuie calculată în prealabil valoarea H și aceasta se face scriind că în articulația C din grindă momentul este egal cu zero. Făcînd deci secțiunea C-C'(fig.V.7.d), se obține:

$$M^{(st)}_{(C)} = 0:$$

$$V_A \frac{\ell}{2} - \sum_A^C F_k c_k - H f = 0$$

de unde:

$$H = \frac{V_A \frac{\ell}{2} - \sum_A^C F_k c_k}{f} = \frac{M^0_C}{f} \qquad (V.8)$$

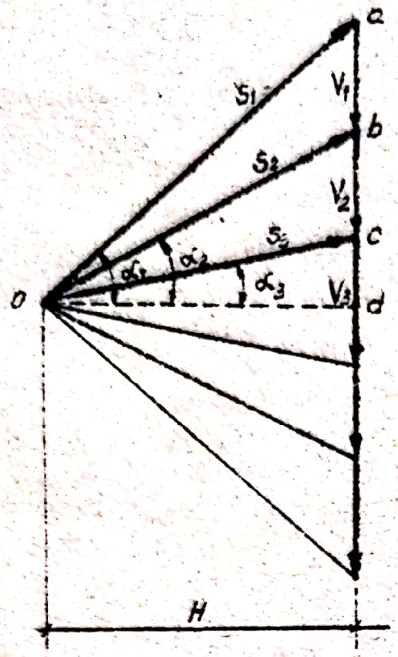


Fig. V.8

relaţie similară cu relaţia de determinare a împingerii la arcul cu trei articulaţii care ar trece prin punctele A, C', B.

Cunoscînd valoarea lui H, eforturile din barele arcului şi din montanţi se pot determina şi grafic, dintr-un poligon de forţe care are distanţa polară cu H şi razele polare înclinate cu unghiurile α_1, α_2, α_3, pe care le fac barele arcului cu orizontala (fig.V.8).

Se vede că din această construcţie razele polare sînt egale cu:

$$\overrightarrow{O-a} = \frac{H}{\cos \alpha_1} = S_1$$

$$\overrightarrow{O-b} = \frac{H}{\cos \alpha_2} = S_2$$

şi aşa mai departe, reprezentînd eforturile axiale din barele arcului, iar segmentele de pe linia forţelor au mărimile:

$$\overrightarrow{a-b} = (a-d)-(b-d) = H \operatorname{tg} \alpha_1 - H \operatorname{tg} \alpha_2 = V_1$$

$$\overrightarrow{b-c} = (b-d)-(c-d) = H \operatorname{tg} \alpha_2 - H \operatorname{tg} \alpha_3 = V_2$$

şi aşa mai departe, reprezentînd eforturile axiale din montanţi.

c) <u>Determinarea eforturilor din grinda de rigidizare</u>.

Expresiile eforturilor într-o secţiune i a grinzii de rigidizare, se determină făcînd o secţiune completă prin sistem şi scriind echilibrul părţii din stînga secţiunii (fig.V.7.e):

$$\Sigma X = 0: \quad -H + N_1 = 0$$

deci:

$$N_i = H \text{ (forță de întindere)} \qquad (V.9)$$

$$\Sigma Y = 0: \quad V_A - \sum_A^i F_k - V - T_i = 0$$

de unde, înlocuind $V = H \operatorname{tg} \alpha_2$:

$$T_i = V_A - \sum_A^i F_k - H \operatorname{tg} \alpha_2 = T_i^0 - H \operatorname{tg} \alpha_2$$

sau:

$$T_i = \frac{1}{\cos \alpha_2} \left(T_i^0 \cos \alpha_2 - H \sin \alpha_2 \right) \qquad (V.10.a)$$

In relația (V.10.a), termenii din paranteză reprezintă expresia forței tăietoare la arcul cu trei articulații A-C'-B, într-o secțiune i' în care tangenta ar avea înclinarea $\varphi_i = \alpha_2$

In consecință, se poate scrie că în general:

$$T_i = \frac{T_{i'}^{\text{arc } AC'B}}{\cos \alpha_i} \qquad (V.10.b)$$

α_i fiind unghiul de înclinare a barei din arc, pe panoul corespunzător secțiunii i din grinda de rigidizare.

$$\Sigma M_{(i)} = 0: \quad V_A x_i - \sum_A^i F_k (x_i - a_k) - H y_i - M_i = 0$$

de unde:

$$M_i = V_A x_i - \sum_A^i F_k (x_i - a_k) - H y_i = M_i^0 - H y_i \qquad (V.11.a)$$

ceea ce arată că momentul încovoietor dintr-o secțiune i a grinzii de rigidizare are aceeași expresie cu cea a momentului încovoietor într-u secțiune i'a unui arc cu trei articulații A-C'- B adică:

$$M_i = M_{i'}^{\text{arc } AC'B} \qquad (V.11.b)$$

Rezultă deci, că la sistemul mixt în discuție, eforturile T și M din grinda de rigidizare se calculează cu expresii similare cu cele ale acelorași eforturi dintr-o secțiune corespunzătoare i'la un arc cu trei articulații A-C'- B, iar forța

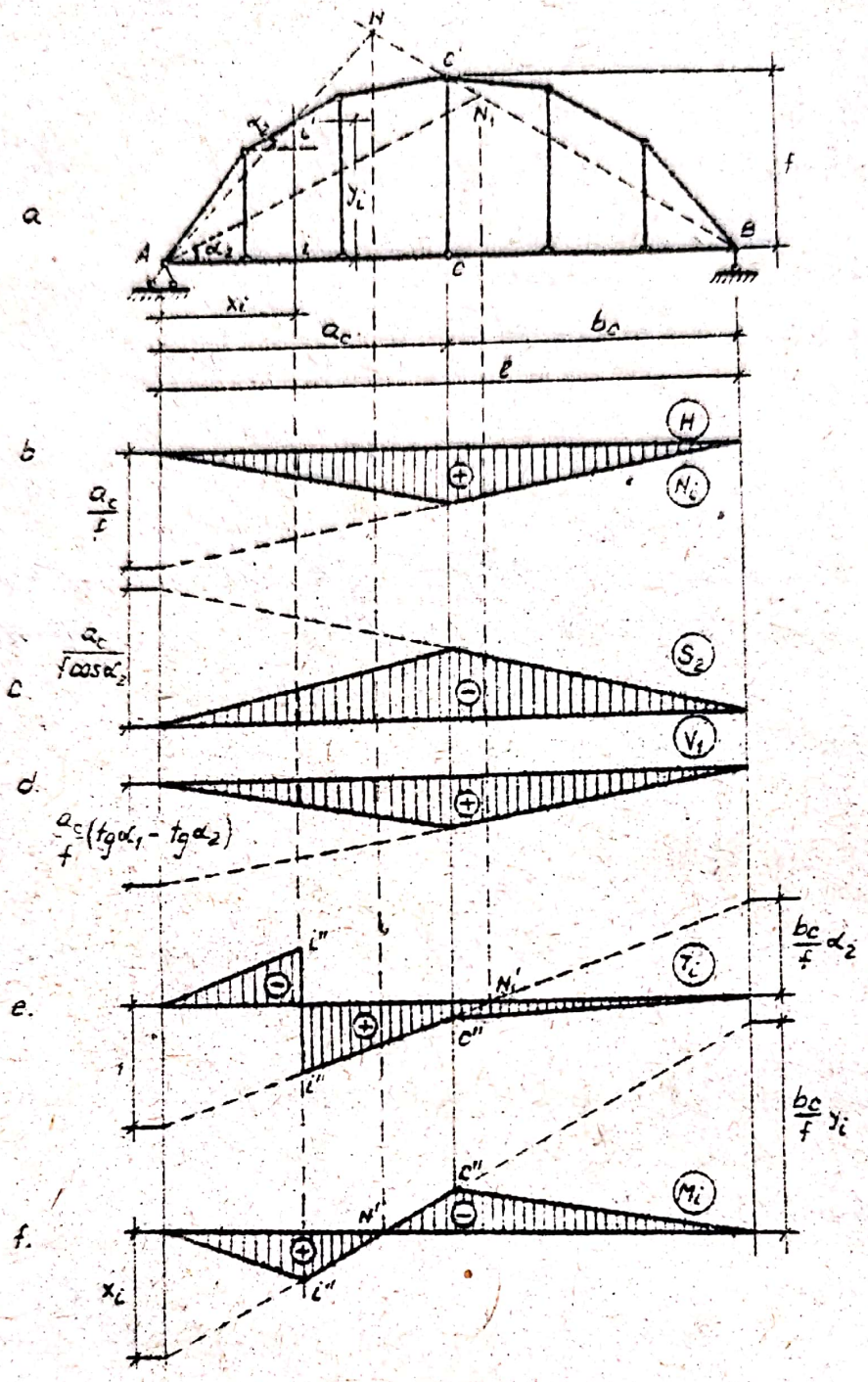


Fig. V.9

axială de întindere din grindă este egală cu H.

V.2.1.2. Calculul la sarcini mobile.

Liniile de influență necesare determinării eforturilor maxime produse de convoaiele de sarcini mobile, se determină cel mai simplu pe cale analitică, ținînd cont de expresiile deduse

şi de observaţiile făcute în subcapitolul precedent. In fig.V.9 sînt trasate liniile de influenţă pentru următoarele eforturi:

- Pentru mărimea H (proiecţia pe orizontală a tuturor eforturilor axiale din barele arcului şi forţa axială din grinda de rigidizare), linia de influenţă se determină pe baza relaţiei (V.8):

$$H = \frac{M_C^o}{f}$$

şi este reprezentată în fig.V.9.b.

- Pentru eforturile axiale din barele arcului, liniile de influenţă se trasează pe baza relaţiei (V.5):

$$S_i = -\frac{H}{\cos\alpha_i} = -\frac{M_C^o}{f\cdot\cos\alpha_i}$$

In fig.V.9.c este reprezentată linia de influenţă pentru efortul din a doua bară a arcului, care este de fapt linia de influenţă a lui H multiplicată cu $1/\cos\alpha_2$

- Pentru eforturile axiale din montanţi, liniile de influenţă se determină pe baza relaţiei (V.7):

$$V_i = H(\operatorname{tg}\alpha_i - \operatorname{tg}\alpha_{i+1}) = \frac{M_C^o}{f}(\operatorname{tg}\alpha_i - \operatorname{tg}\alpha_{i+1})$$

în fig.V.9.d fiind reprezentată linia de influenţă pentru efortul din primul montant [este linia de influenţă a lui H multiplicată cu $(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2)$]

- Pentru forţa tăietoare din secţiunea i a grinzii de rigidizare, linia de influenţă se determină pe baza relaţiei (V.10.b):

$$T_i = \frac{T_{i'}^{\text{arc } AC'B}}{\cos\alpha_i}$$

fiind reprezentată în fig.V.9.e ca linie de influenţă a forţei tăietoare în secţiunea i' a arcului AC'-B, multiplicată cu

$1/\cos\alpha_2$, ceea ce face ca cele două ramuri paralele să se găsească la distanţa 1(la arcul cu trei articulaţii este cos α_2)

Linia de influenţă pentru $T_{i'}^{\text{arc AC'B}}$ se poate determina şi prin utilizarea punctului neutru, aflat la intersecţia unei drepte dusă prin A cu înclinarea α_2 (direcţia reacţiunii din A pentru a avea $T_{i'} = 0$) cu dreapta dusă prin B–C (direcţia reacţiunii din B din condiţia $M_{C'}^{dr} = 0$).

- <u>Pentru momentul încovoietor din secţiunea i a grinzii de rigidizare</u>, linia de influenţă se determină pe baza relaţiei (V.11.b):

$$M_i = M_{i'}^{\text{arc AC'B}}$$

şi este reprezentată în fig.V.9.f, fiind trasată prin utilizarea punctului neutru N (vezi subcapitolul III.2.2.1 - punct b), aflat la intersecţia dreptei A-i' (direcţia reacţiunii din A din condiţia $M_{i'} = 0$) cu dreapta B–C (direcţia reacţiunii din B din condiţia $M_C = 0$).

V.2.2. <u>Grinda de rigidizare cu zăbrele</u>.

V.2.2.1. <u>Calculul la sarcini fixe</u>.

Aşa cum s-a mai precizat, acest sistem prezintă avantajul că - în condiţiile adoptării ipotezelor analizate la capitolul structuri cu zăbrele - în toate elementele nu apar decît eforturi axiale.

a) <u>Calculul reacţiunilor</u> - se face obişnuit, ca la orice sistem simplu rezemat - relaţiile (V.1).

b) <u>Calculul eforturilor axiale din barele arcului şi din montanţi</u> se efectuează ca şi la sistemul cu grinda de rigidizare cu secţiune plină, folosind deci relaţiile (V.5) şi respectiv (V.7), ceea ce necesită cunoaşterea mărimii H, care se determină în prealabil pe baza relaţiei (V.8).

Scanned with OKEN Scanner

Se poate, desigur, utiliza calea grafică discutată şi reprezentată în fig.V.8.

c) Calculul eforturilor axiale din barele grinzii de rigidizare se determină prin metodele cunoscute pentru rezolvarea sistemelor cu zăbrele.

Folosind de exemplu metoda secţiunilor, eforturile din acele intersectate de secţiunea I-I în fig.V.10.a. se calculează din ecuaţiile de echilibru ale părţii din stînga şi rezultă:

- efortul din bara 3-5 a tălpii inferioare:

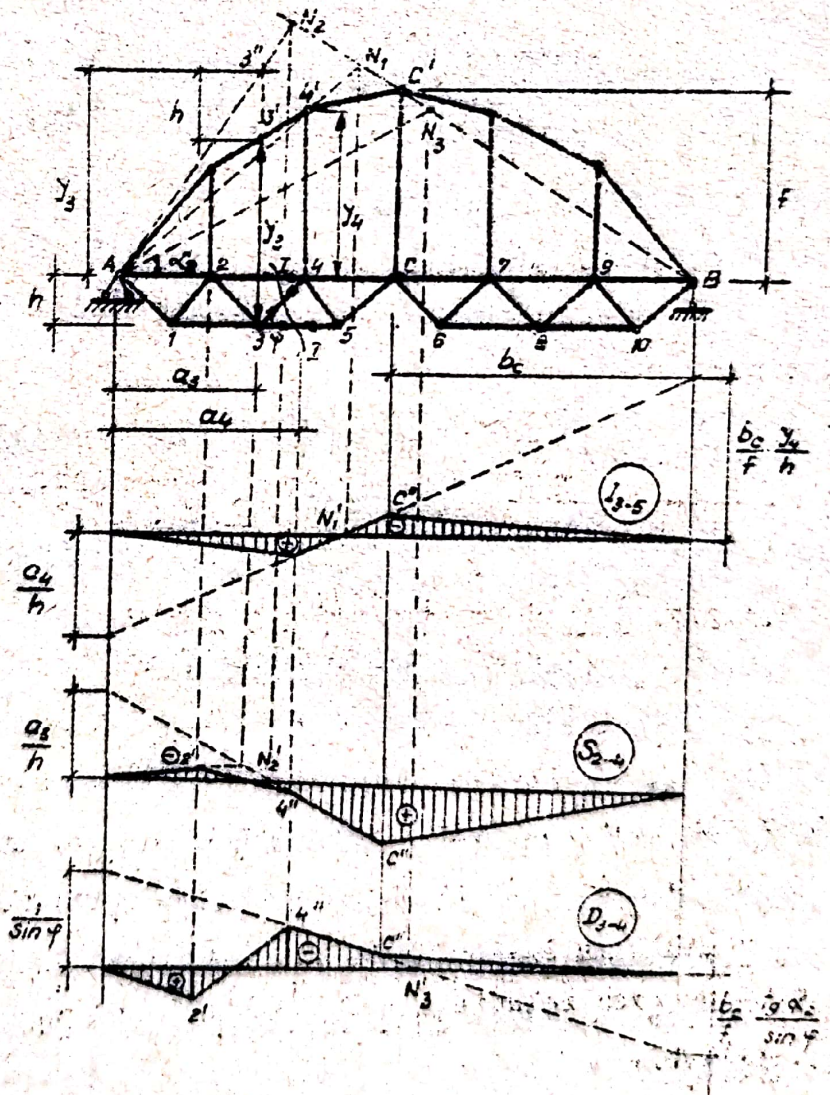


Fig. V.10

$$I_{3-5} = \frac{M_4}{h} \qquad (V.12.a)$$

sau, ţinînd cont de relaţia (V.11.b):

$$I_{3-5} = \frac{M_{4'}^{\text{arc AC'B}}}{h} = \frac{1}{h}(M_4^0 - H y_4) \qquad (V.12.b)$$

- efortul din bara 2-4 a tălpii superioare:

$$S_{2-4} = -\frac{M_3}{h} \qquad (V.13.a)$$

sau, ţinînd cont de (V.11.b):

$$S_{2-4} = -\frac{M_{3'}^{\text{arc AC'B}}}{h} = -\frac{1}{h}(M_3^0 - H y_3) \qquad (V.13.b)$$

- efortul din diagonala 3-4:

$$D_{3-4} = -\frac{T_{II}}{\sin\varphi} \qquad (V.14.a)$$

sau, ţinînd cont de relaţia (V.10.b):

$$D_{3-4} = -\frac{1}{\sin\varphi}\cdot\frac{T_{II}^{\text{arc AC'B}}}{\cos\alpha_2} = -\frac{1}{\sin\varphi}\cdot\frac{1}{\cos\alpha_2}(T_{II}^0\cos\alpha_2 - H\sin\alpha_2) \qquad (V.14.b)$$

V.2.2.2. Calculul la sarcini mobile

In fig.V.10 sînt trasate liniile de influenţă pentru eforturile din cele trei bare ale grinzii de rigidizare intersectate de secţiunea I-I (pentru H, eforturile axiale din barele arcului şi din montanţi, liniile de influenţă sînt aceleaşi ca la sistemul cu grinda de rigidizare cu secţiunea plină). Astfel:

- Linia de influenţă pentru efortul din bara 3-5, se determină pe baza relaţiei (V.12.b), folosind punctul neutru N_1 (fig.V.10.b).

- Pentru a determina linia de influenţă a efortului din bara 2-4, ne folosim de relaţia (V.13.b), cu observaţia că y_3

din această relaţie reprezintă distanţa dintre 3 şi 3'; iar pentru determinarea punctului neutru al liniei de influenţă a momentului încovoietor în arcul cu trei articulaţii A-C'-B, y_3 trebuie măsurat de la linia naşterilor A-B; în consecinţă, punctul neutru N_2 se află la intersecţia dreptei A-3" (cu y_3 măsurat de la A-B în sus, deci distanţa 3'- 3" = h), cu dreapta B-C. Rezultă astfel linia de influenţă din fig.V.10.c. Se mai face de asemenea şi corecţia între nodurile 2 şi 4, avînd în vedere că sarcina unitară acţionează indirect la talpa superioară a grinzii de rigidizare.

- Linia de influenţă a efortului din diagonala 3-4, se determină pe baza relaţiei (V.14.b), prin împărţirea ordonatelor liniei de influenţă a forţei tăietoare la arcul cu trei articulaţii AC'B, prin produsul $\sin\varphi \cdot \cos\alpha_2$ (se poate utiliza punctul neutru N_3) şi făcînd corecţia între nodurile 2 şi 4 (fig.V.10.d).

V.3. Structuri mixte cu grinda de rigidizare la partea superioară.

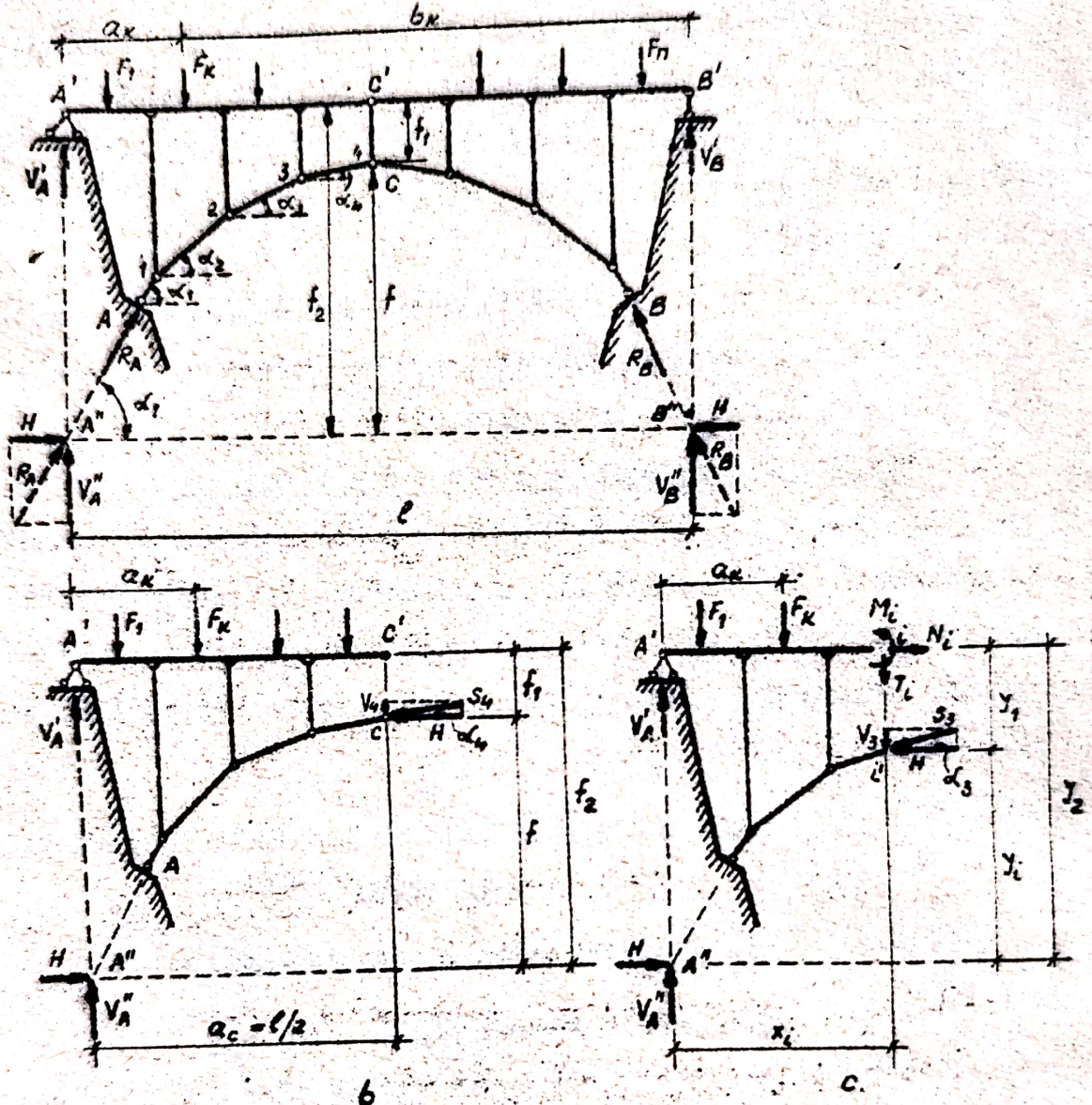
V.3.1. Grinda de rigidizare cu secţiune plină.

V.3.1.1. Calculul la sarcini fixe.

Schema de alcătuire a acestui sistem este indicată în fig.V.11.a, unde se vede că, de obicei, punctele A', B' de rezemare ale grinzii de rigidizare şi cele ale arcului (A,B), nu se află pe aceeaşi verticală.

a) Determinarea reacţiunilor.

Pentru simplificarea calculului, reacţiunile R_A şi R_B din A şi B se transleează în A"(intersecţia verticalei din reazemul A'al grinzii de rigidizare cu direcţia primei bare a arcului) şi respectiv în B", unde se descompun în componentele V''_A şi H şi respectiv V''_B şi H.



In acest fel, se poate lucra cu reacţiunile totale $V_A = V'_A + V''_A$ şi $V_B = V'_B + V''_B$, a căror determinare se face ca la grinda simplu rezemată:

$$V_A = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k b_k}{\ell} \quad ; \quad V_B = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k a_k}{\ell}$$

b) <u>Determinarea eforturilor din barele arcului şi din montanţi</u>.

Ca şi la sistemul precedent, prin izolarea succesivă a nodurilor 1, 2, 3 etc. şi scrierea ecuaţiilor de echilibru prin proiecţii, rezultă:

$$\Sigma X = 0: \quad S_1 = -\frac{H}{\cos\alpha_1}; \quad S_2 = -\frac{H}{\cos\alpha_2} \quad \text{ş.a.m.d.}$$

deci, în general:

$$S_i = -\frac{H}{\cos\alpha_i} \qquad (V.15)$$

$$\Sigma Y = 0: \quad V_1 = -H(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2)$$

$$V_2 = -H(\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_3) \quad \text{şi aşa mai departe.,}$$

deci, în general:

$$V_i = -H(\operatorname{tg}\alpha_i - \operatorname{tg}\alpha_{i+1}) \qquad (V.16)$$

Prin urmare, la aceste sisteme, atît în barele arcului cît şi în montanţi apar eforturi axiale de compresiune.

Pentru determinarea mărimii H se face o secţiune C-C', se descompune efortul axial S_4 din bara intersectată a arcului în V_4 şi H (fig.V.11.b) şi se scrie condiţia de moment zero în articulaţia C':

$$M_{C'} = 0: (V'_A + V''_A)\,a_c - \sum_{A'}^{C'} F_k(a_c - a_k) - H\cdot f_2 - H\cdot f_1 = 0$$

de unde, ţinînd cont că s-a notat $V'_A + V''_A = V_A$:

$$H = \frac{V_A a_c - \sum_{A'}^{C'} F_k(a_c - a_k)}{f_2 - f_1} = \frac{M^0_{C'}}{f} \qquad (V.17)$$

ceea ce arată că mărimea H se determină la fel cu împingerea unui arc A"CB", cu naşterile fictive A" şi B" obţinute prin intersecţia verticalelor din reazemele A', B' ale grinzii de rigidizare, cu direcţiile barelor extreme ale arcului.

Observaţie: Din ecuaţia de proiecţie pe orizontală scrisă

penuru porţiunea izolată, se obţine:

$$H = H \qquad (V.18)$$

deci componenta orizontală a reacţiunilor din A şi B este egală cu proiecţia pe orizontală a eforturilor axiale din barele arcului, cum s-a şi considerat în relaţiile scrise.

Cunoscînd mărimea H , se pot determina eforturile axiale din barele arcului şi din montanţii sistemului, fie analitic - folosind relaţiile (V.15) şi (V.16) - fie grafic, folosind construcţia din fig.V.8.

c) Determinarea eforturilor din grinda de rigidizare.

Considerînd o secţiune oarecare i în grinda de rigidizare şi scriind echilibrul părţii din stînga (fig.V.11.c), se obţine:

$$\Sigma X = 0: \quad H-H + N_i = 0$$

$$\text{deci:} \qquad N_i = 0 \qquad (V.19)$$

$$\Sigma Y = 0: \quad V'_A + V''_A - \sum_{A'}^{i} F_k - V_3 - T_i = 0$$

sau, înlocuind:

$$V'_A + V''_A = V_A$$

şi:

$$V_3 = H \operatorname{tg} \alpha_3$$

rezultă:

$$T_i = V_A - \sum_{A'}^{i} F_k - H \operatorname{tg} \alpha_3 = T_i^0 - H \operatorname{tg} \alpha_3$$

care se mai poate scrie:

$$T_i = \frac{1}{\cos \alpha_3} (T_i^0 \cos \alpha_3 - H \sin \alpha_3) \qquad (V.20.a)$$

termenii din paranteză reprezentînd expresia forţei tăietoare la un arc A"CB", cu nasterile fictive, într-o secţiune i'a cărei tangentă face unghiul α_3 cu orizontala.

Deci, ca și la sistemul precedent:

$$T_i = \frac{T_i^{\text{arc A"CB"}}}{\cos \alpha_i} \qquad \text{(V.20.b)}$$

$$\sum M_{(i)} = 0 : (V_A' + V_A'') x_i - \sum_{A'}^{i} F_k (x_i - a_k) = H y_2 + H y_i - M_i = 0$$

de unde:

$$M_i = V_A x_i - \sum_{A'}^{i} F_k (x_i - a_k) - H (y_2 - y_1)$$

sau:

$$M_i = M_i^o - H y_i \qquad \text{(V.21.a)}$$

relație care arată că expresia momentului încovoietor într-o secțiune i a grinzii de rigidizare este aceeași cu expresia momentului încovoietor într-o secțiune i'a arcului cu nașteri fictive A"CB", adică:

$$M_i = M_i^{\text{arc A"CB"}} \qquad \text{(V.21.b)}$$

Rezultă astfel cîteva caracteristici specifice sistemelor mixte cu grinda de rigidizare la partea superioară și anume:

a) Nu apare forță axială în grinda de rigidizare.

b) Din analiza relațiilor (V.17), (V.2o.a) și (V.21.a), rezultă că atît mărimea H cît și eforturile din sistem, nu depind de înălțimea la care este așezată grinda de rigidizare, în raport cu arcul din bare articulate, ci numai de caracteristicile arcului cu nașteri fictive A"CB".

c) Reacțiunile sumate $V_A = V_A' + V_A''$ și $V_B = V_B' + V_B''$ se determină ca la grinda simplu rezemată și deci nu depind de împingerea H.

V.3.1.2. Calculul la sarcini mobile.

In fig.V.12 sînt trasate liniile de influenţă pentru:

- Impingerea H, pe baza relaţiei (V.17)-fig.V.12.b.
- Efortul axial S_2, pe baza relaţiei (V.15) - fig.12.c.

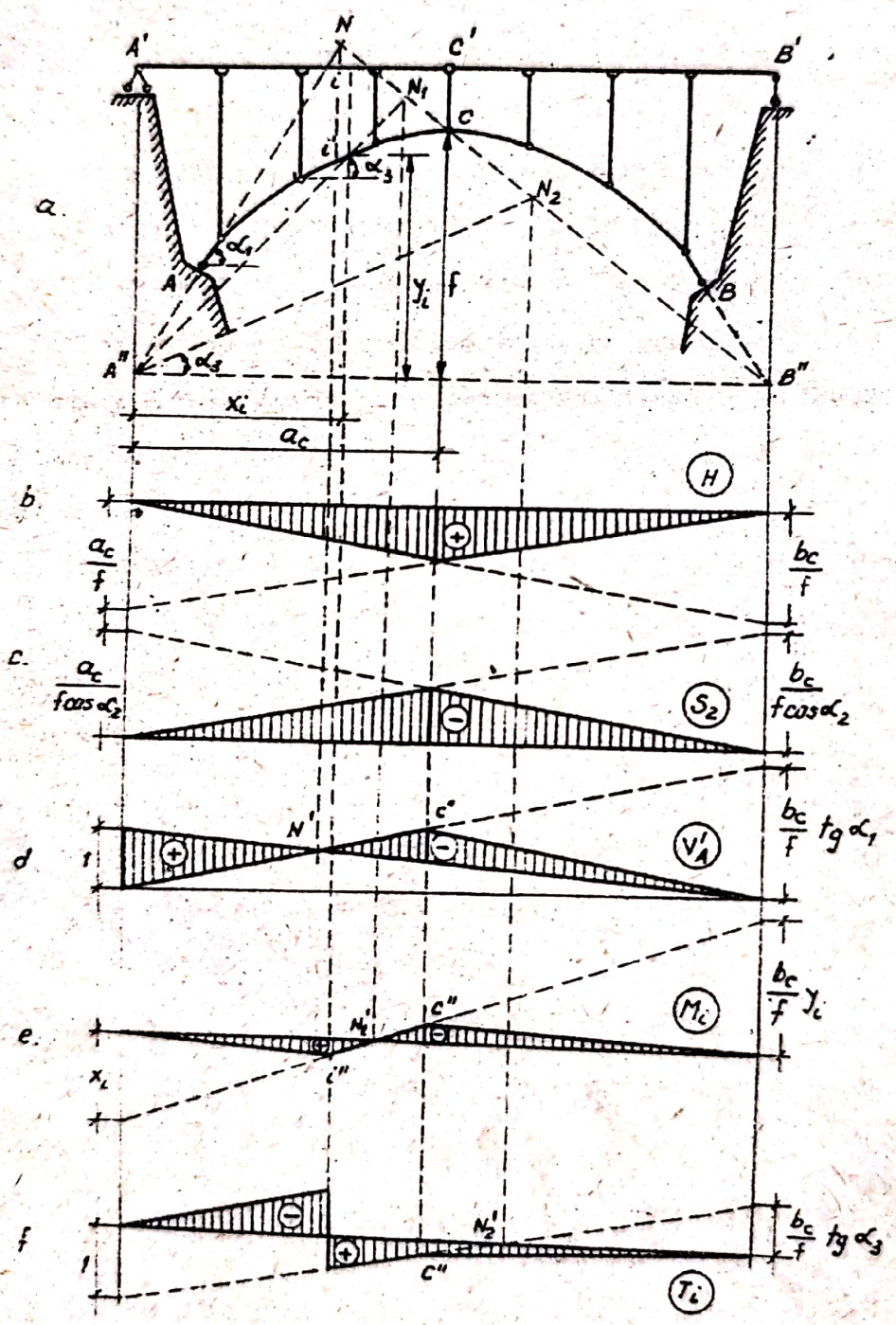


Fig. V.12.

- Reacţiunea verticală V'_A a grinzii de rigidizare, pe baza relaţiei:

$$V'_A = V_A - V''_A = V^o_A - H \operatorname{tg}\alpha, = V^o_A - \frac{M^o_C}{f} \operatorname{tg}\alpha, \qquad (V.12)$$

şi suprapunînd deci două linii de influenţă, sau folosind punctul neutru N - fig.V.12.d.

- Momentul încovoietor dintr-o secţiune i a grinzii de rigidizare, pe baza relaţiei (V.21.b) şi folosind punctul neutru N_1 - fig.V.12.e.

- Forţa tăietoare dintr-o secţiune i a grinzii de rigidizare, pe baza relaţiei (V.20.b) şi folosind punctul neutru N_2 - fig.V.12.f.

V.3.2. Grinda de rigidizare cu zăbrele.

V.3.2.1. Calculul la sarcini fixe.

Determinarea reacţiunilor şi eforturilor axiale din barele arcului şi din montanţi, se face ca şi la sistemul cu grinda cu secţiune plină.

Pentru calculul eforturilor din barele grinzii de rigidizare, se utilizează metodele de rezolvare a sistemelor cu zăbrele.

Folosind de exemplu metoda secţiunilor şi ţinînd cont de concluziile deduse în subcapitolul V.3.1.1 şi anume că eforturile din grinda de rigidizare au expresii similare cu cele ale eforturilor în secţiuni corespunzătoare la arcul cu naşteri fictive A"CB", se poate scrie:

- Secţiunea I-I (fig.V.13.a):

$$S_{3-5} = -\frac{M_6}{h} = -\frac{M^{\text{arc A"CB"}}_{6'}}{h} = -\frac{1}{h}(M^o_6 - H y_6) \qquad (V.23)$$

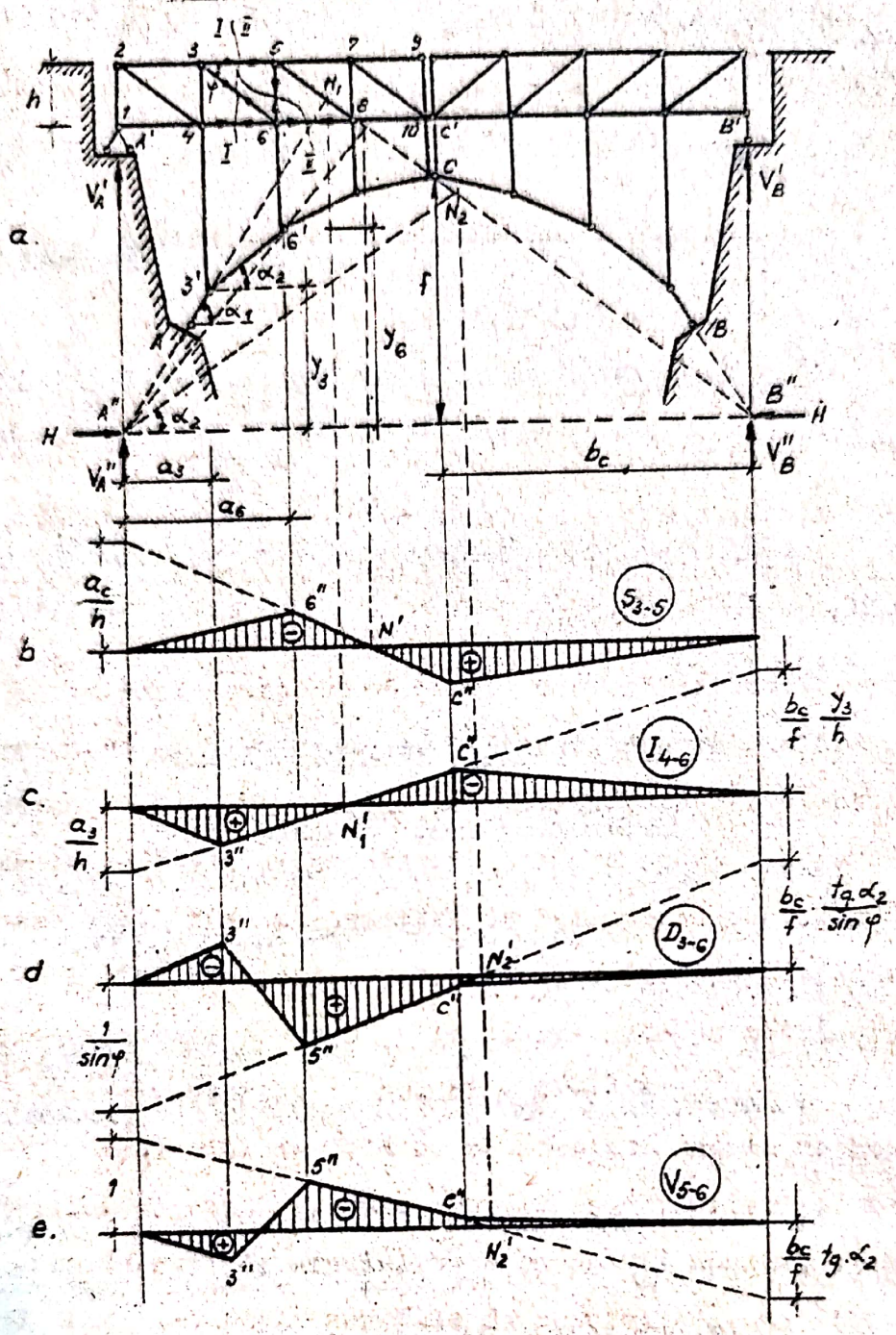


Fig. V.13

$$I_{4-6}=\frac{M_3}{h}=\frac{M_3^{\text{arc A"CB"}}}{h}=-\frac{1}{h}\left(M_3^0-Hy_3\right) \qquad \text{(V.24)}$$

$$D_{3-6}=\frac{T_{II}}{\sin\varphi}=\frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{T_{II}^{\text{arc A"CB"}}}{\cos\alpha_2}=\frac{1}{\sin\varphi}\cdot\frac{1}{\cos\alpha_2}\left(T_{II}^0\cos\alpha_2-H\sin\alpha_2\right) \qquad \text{(V.25)}$$

- Secţiunea II-II (fig.V.13.a):

$$V_{5-6} = -T_{II} = -\frac{T_{II}^{arc\ A"CB"}}{\cos} = -\frac{1}{\cos\alpha_2}(T_{II}^{o}\cos\alpha_2 - H\sin\alpha_2) \quad (V.26)$$

V.3.2.2. Calculul la sarcini mobile.

In fig.V.13 sînt trasate liniile de influenţă pentru eforturile axiale din cîteva bare ale grinzii de rigidizare (pentru celelalte eforturi şi reacţiuni, liniile de influenţă sînt aceleaşi ca la sistemul cu grinda de rigidizare cu secţiune plină) şi anume:

- Efortul din bara 3-5 a tălpii superioare, pe baza relaţiei (V.23), utilizînd punctul neutru N determinat pentru arcul cu naşteri fictive A"CB" - fig.V.13.b.

- Efortul din bara 4-6 a tălpii inferioare pe baza relaţiei (V.24), folosind punctul neutru N_1 - fig.V.13.c.

- Efortul din diagonala 3-6, pe baza relaţiei (V.25), utilizînd punctul neutru N_2 - fig.V.13.d.

- Efortul din montantul 5-6 pe baza relaţiei (V.26), folosind punctul neutru N_2 - fig.V.13.e.

..ooOOoo..

CAPITOLUL VI

SISTEME SUSPENDATE STATIC DETERMINATE

VI.1. Generalităţi

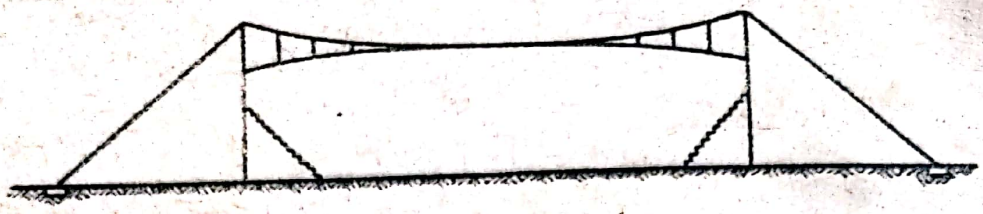
Sistemele suspendate sînt structuri concepute în aşa fel încît o parte din elementele de rezistenţă sau toate aceste elemente sînt solicitate numai de forţe de întindere, ceea ce dă posibilitatea alcătuirii lor din cabluri de oţel superior.

Sistemele suspendate permit acoperirea unor deschideri foarte mari şi sînt de aceea utilizate pentru realizarea unor construcţii importante, fie ca structuri de rezistenţă pentru acoperişuri (săli de expoziţii, săli de sport, hangare pentru avioane etc.) fie ca structuri de rezistenţă pentru poduri. In fig.VI.1 sînt prezentate schemele unor sisteme suspendate, ale căror deschideri pot ajunge la cîteva sute de metri şi depăşesc - la structurile de poduri - 1.000 m.

In capitolul de faţă nu se prezintă teoria matematică a sistemelor de cabluri, care constituie o problemă ce face obiectul unor lucrări de specialitate cu profil aparte, ci se dezvoltă doar elementele generale de rezolvare a unor tipuri de sisteme suspendate utilizate ca structuri de rezistenţă pentru poduri şi a căror tratare se poate face pe baza principiilor Staticii sistemelor alcătuirite din bare. Este vorba în următoarele două tipuri de sisteme suspendate:

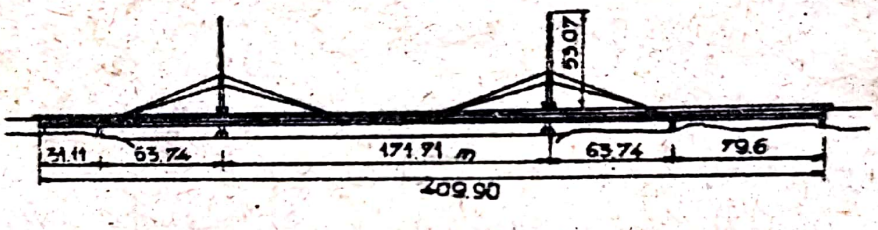
1. Sisteme suspendate, cu grindă de rigidizare.
2. Sisteme suspendate, fără grindă de rigidizare.

Scanned with OKEN Scanner

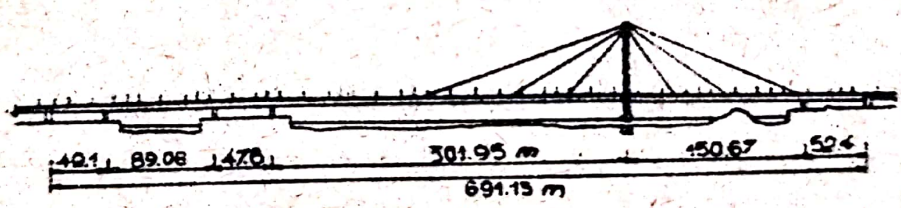


a.

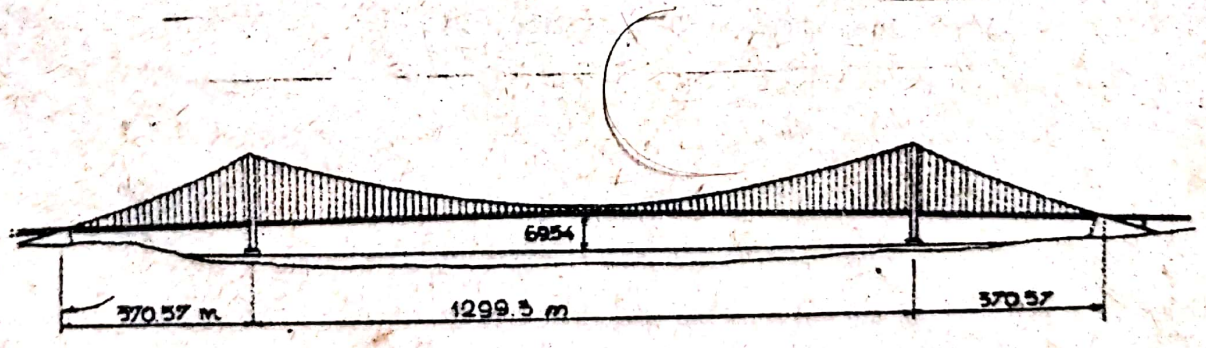
b.



c.



d.



e.

Fig. VI. 1

VI.2. Sisteme suspendate cu grindă de rigidizare

VI.2.1. Grindă de rigidizare cu secțiune plină

Schema de alcătuire a acestor sisteme este indicată în fig.VI.2.a și se vede că în principiu este vorba de un sistem mixt - cu grindă de rigidizare la partea superioară (fig.V.12.a) așezat în poziție răsturnată. Elementele componente ale unui astfel de sistem sînt:

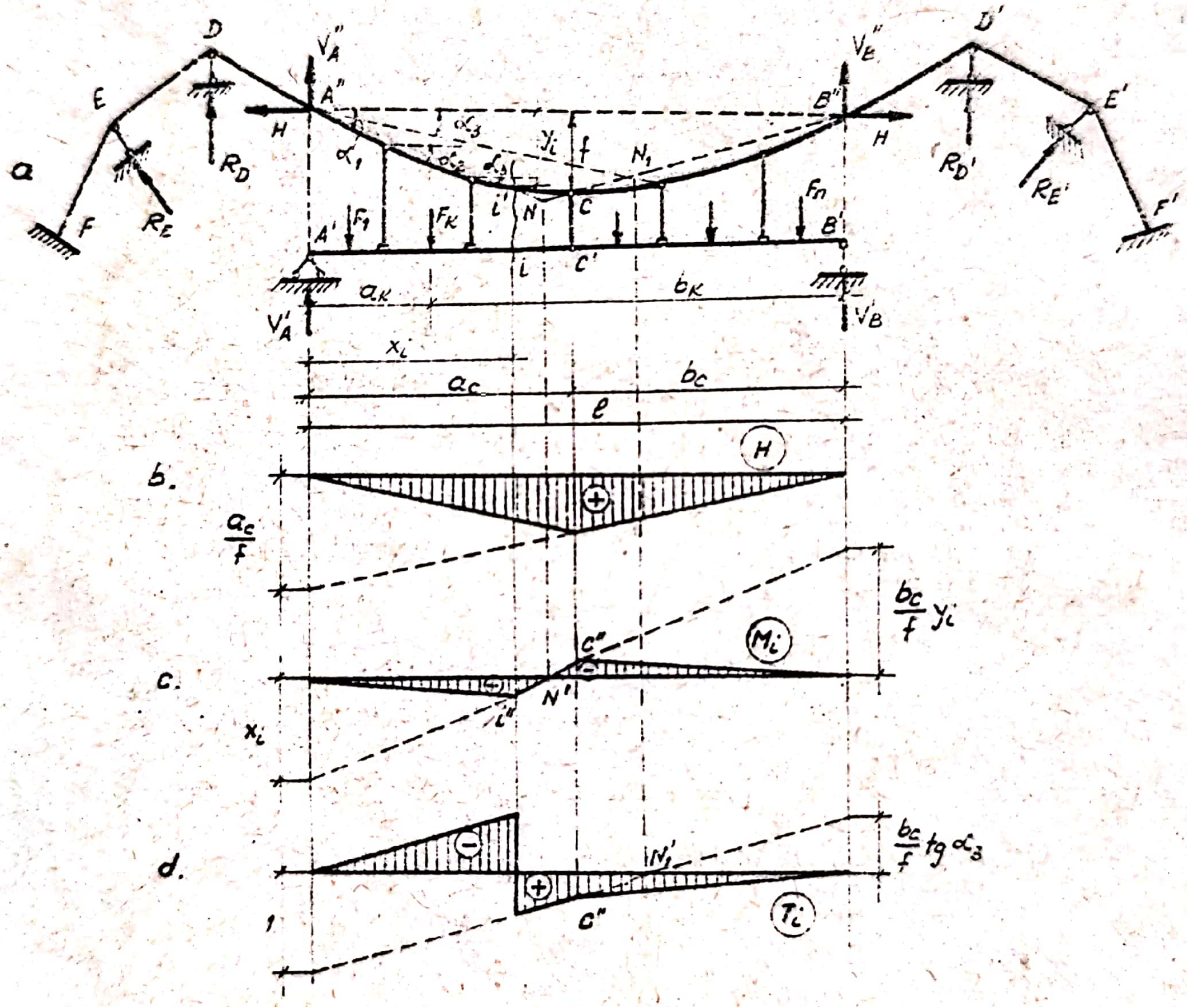


Fig. VI.2

- arcul din bare articulate, care, fiind supus la întindere, se va realiza din cabluri ce trec peste reazemele D,D'

şi (eventual) E,E; fiind apoi ancorate în elemente puternice fixe;

- montanţii, supuşi de asemenea la eforturi de întindere, avînd rol de transmitere a încărcărilor de la tablier la cablu;

- grinda de rigidizare, care constituie suportul direct al căii de deplasare a convoaielor de sarcini mobile.

VI.2.1.1. Calculul la sarcini fixe.

Calculul este similar cu cel analizat la sistemul mixt cu grinda de rigidizare la partea superioară şi anume:

a) Reacţiunile se determină cu valorile lor sumate ($V_A = V'_A + V''_A$ şi $V_B = V'_B + V''_B$) punctele A" şi B" fiind obţinute prin intersecţia verticalelor din reazemele grinzii de rigidizare cu cablul.

b) Eforturile din elementele cablului şi din montaţi se determină prin izolarea succesivă a nodurilor şi rezultă:

- eforturi în elementele cablului:

$$S_i = \frac{H}{\cos \alpha_i} \qquad (VI.1)$$

- eforturi în montanţi:

$$V_i = H (tg \alpha_i - tg \alpha_{i+1}) \qquad (VI.2)$$

în acest caz dezvoltîndu-se eforturi axiale de întindere atît în arc - al cărui rol este îndeplinit aici de către cablu - cît şi în montanţi.

Se poate utiliza de asemenea procedeul grafic bazat pe construirea unui poligon de forţe cu distanţa polară egală cu H şi în care razele polare (avînd înclinări egale cu cele ale elementelor arcului) reprezintă eforturile din cablu, iar forţele reprezintă eforturile din montanţi (fig.VI.3)

Scanned with OKEN Scanner

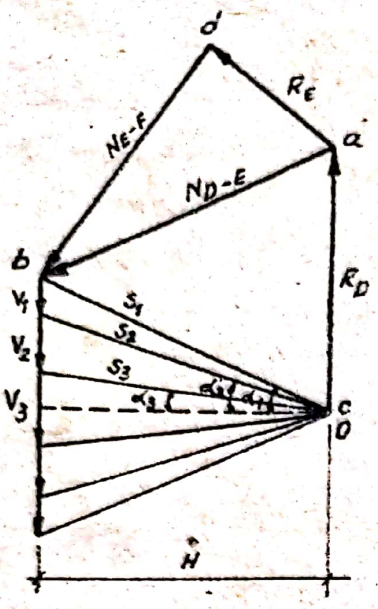


Fig VI.3

In aceeași construcție grafică sînt determinate și reacțiunile din reazemele D și E peste care sînt trecute sabloanele, precum și eforturile axiale din porțiunile de cablu D-E și E-F. Astfel, din condiția de echilibru a nodului D, rezultă R_D și N_{D-E} (S_1 fiind cunoscut), iar din condiția de echilibru a nodului E rezultă R_E și N_{E-F} (N_{E-D} fiind cunoscut)

e) <u>Eforturile din grinda de rigidizare</u> au, pe baza celor discutate la sistemul mixt cu grindă de rigidizare la partea superioară, expresii similare cu cele ale eforturilor din arcul cu nașteri fictive A" C B",adică:

$$N_i = 0 \qquad \text{(VI.3)}$$

$$T_i = \frac{T_i^{\text{are A" CB"}}}{\cos \alpha_i^{\circ}} = \frac{1}{\cos \alpha_i} (T_i^{\circ} \cos \alpha_i - H \sin \alpha_i) \qquad \text{(VI.4)}$$

$$M_i = M_i^{\text{are A" CB"}} = M_i^{\circ} - H y_i \qquad \text{(VI.5)}$$

VI. 2.1.2. <u>Calculul la sarcini mobile</u>.

In fig.VI.2 sînt trasate liniile de influență pentru mărimea H - fig.VI.2.b, pentru momentul încovoietor M_i (folosind punctul neutru N) - fig.VI.2.c și pentru forța tăietoare T_i (folosind punctul neutru N_i) - fig.VI.2.d. S-a lucrat, ca și la sistemul mixt cu grinda de rigidizare la partea superioară, pe arcul cu nașteri fictive, A"CB". Pentru eforturile axiale din cablu și din montanți, liniile de influență sînt aceleași ca și

la sistemele mixte şi nu s-au mai prezentat aici.

VI.2.2. Grinda de rigidizare cu zăbrele.

VI.2.2.1. Calculul la sarcini fixe.

Pentru acest sistem (fig.VI.4), calculul reacţiunilor şi al eforturilor din cablu şi montanţi se face ca şi la sistemul precedent, iar pentru determinarea eforturilor axiale din barele grinzii cu zăbrele se folosesc metodele obişnuite (metoda secţiunilor şi metoda izolării nodurilor).

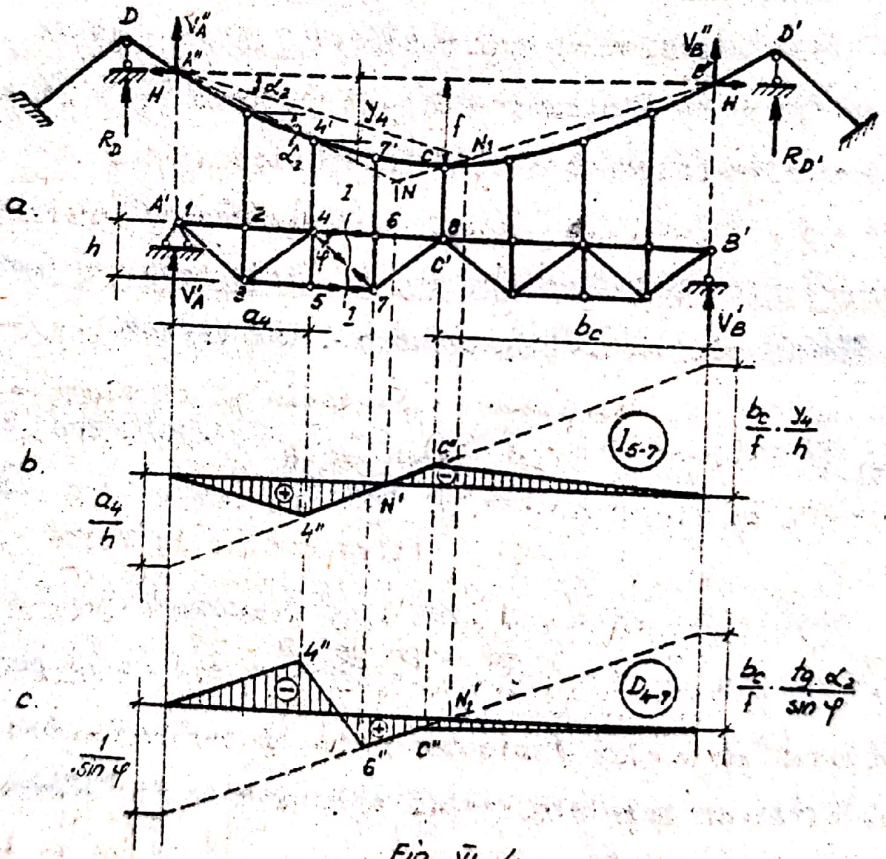


Fig. VI 4

Astfel, utilizînd metoda secţiunilor (secţiunea I-I), rezultă:

$$S_{4-6} = -\frac{M_7}{h} = -\frac{M_7^{arc\ A''CB''}}{h} = -\frac{1}{h}(M_7^0 - Hy_7) \qquad (VI.6)$$

$$I_{5-7} = \frac{M_4}{h} = \frac{M_4^{\text{arc A"CB"}}}{h} = \frac{1}{h}(M_4^o - \bar{n}y_4) \qquad \text{(VI.7)}$$

$$D_{4-7} = \frac{T_{III}}{\sin\varphi} = \frac{T_{III}^{\text{arc A"CB"}}}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{1}{\cos\alpha_3}(T_{III}^o \cos\alpha_3 - H\sin\alpha_3) \qquad \text{(VI.8)}$$

VI.2.2.2. Calculul la sarcini mobile

S-au trasat liniile de influenţă pentru eforturile din două bareale grinziide rigidizare şi anume:

- Efortul din bara 5-7 a tălpii inferioare, pe baza relaţiei VI.7), folosind punctul neutru N - fig. VI.4.b.

- Efortul din diagonala 4-7, pe baza relaţiei (VI.8), folosind punctul neutru N_1 - fig.VI.4.c.

Pentru celelalte eforturi şi reacţiuni,liniile de influenţă sînt aceleaşi ca la sistemele precedente (sistemul mixt cu grinda de rigidizare la partea superioară.

In legătură cu sistemele mixte şi sistemele suspendate cu grindă de rigidizare, sînt de reţinut următoarele observaţii:

1. Sarcinile utile care acţionează aceste structuri se aplică pe grinda de rigidizare, în timp ce sarcinile permanente (printre care şi greutatea proprie) se transmit prin intermediul tuturor elementelor sistemului (grindă de rigidizare, arc din bare articulate, montanţi).

Pentru obţinerea unei soluţii economice, este necesară reducerea în cît mai mare măsură a momentelor încovoietoare din grinda de rigidizare şi aceasta se obţine efectuînd calculul în două etape:

a) Se evaluează sarcinile permanente ce revin fiecărui nod al arcului din bare articulate (sarcina permanentă a grin-

zii de rigidizare, greutatea montanţilor şi greutatea barelor arcului) şi cu aceste sarcini se trasează poligonul de presiune corespunzător. Evident că pentru evaluarea greutăţilor proprii trebuie iniţial impusă o anumită formă a arcului din bare articulate. Poligonul de presiune construit nu va coincide de obicei cu forma impusă a arcului şi de aceea se va considera o nouă formă a arcului, corespunzătoare poligonului de presiune construit, reevaluîndu-se greutăţile proprii. Cu noile sarcini se trasează un alt poligon de presiune şi după 2-3 corecţii se va găsi o formă pentru arcul din bare articulate, care, reprezentînd poligonul de presiune al sarcinilor permanente, va prelua în întregime aceste încărcări. Rezultă deci că în grinda de rigidizare momentele încovoietoare produse de sarcinile permanente sînt nule.

b) Considerînd acţiunea sarcinilor mobile, se determină - conform principiilor generale bazate pe utilizarea liniilor de influenţă - momentele încovoietoare maxime în grinda de rigidizare, precum şi eforturile axiale maxime din barele arcului şi montanţi, produse de încărcările utile.

In felul acesta grinda de rigidizare lucrează numai la sarcini utile, iar în barele arcului şi montanţi apar eforturi atît din acţiunea sarcinilor permanente cît şi din acţiunea sarcinilor utile, eforturile totale din aceste ultime bare calculîndu-se deci prin suprapunere de efecte.

De notat că la sistemele suspendate cu grindă de rigidizare, modificarea formei cablului (deci a poligonului de presiune) necesară reducerii momentelor încovoietoare din grinda de rigidizare, se poate face practic prin reglarea corespunzătoare a lungimii montanţilor.

2. Grinda de rigidizare, care asigură indeformabilitatea

sistemelor analizate, are în general secţiune mică, datorită faptului că eforturile care apar în această grindă sînt mici în raport cu cele care se dezvoltă în grinzi drepte simple de aceeaşi deschidere. Acest lucru se justifică prin expresiile acestor eforturi similare cu cele de la arcul cu trei articulaţii, despre care s-a precizat că sînt mai mici în comparaţie cu eforturile grinzilor drepte de aceeaşi deschidere. În plus, ordonatele liniilor de influenţă ale eforturilor din grinda de rigidizare sînt mai mici în raport cu cele ale liniilor de influenţă corespunzătoare eforturilor din grinzile drepte simple, ceea ce ne conduce la aceeaşi concluzie privind comparaţia făcută mai sus.

Ca urmare a secţiunii mici, grinda de rigidizare-în cazul deschiderilor mari, la care sînt de obicei utilizate structurile mixte - poate avea deformaţii elastice importante. Aceasta face ca scrierea relaţiilor de echilibru pe schema nedeformată a structurii să nu mai fie suficient de exactă şi apare necesară efectuarea unui calcul pe schema deformată a structurii (aşa numitul "calcul de ordinul doi"), care nu face însă obiectul lucrării de faţă.

Necesitatea acestui calcul rezultă din exemplul considerat în fig.VI.5, la care:

- dacă se scrie momentul încovoietor în secţiunea i a grinzii de rigidizare pe schema nedeformată se obţine:

$$M_i = M_i^0 - H.y_i \qquad \text{(VI.9)}$$

- dacă se ţine cont de modificarea cu Δy a ordonatei y, rezultă din deformarea sistemului, se obţine:

$$M_i' = M_i^0 - H\ (y_i + \Delta y) = (M_i^0 - H\ y_i) - H\ \Delta y$$

sau, ţinînd cont de (VI.9):

$$M_i' = M_i - H \cdot \Delta y \qquad \text{(VI.10)}$$

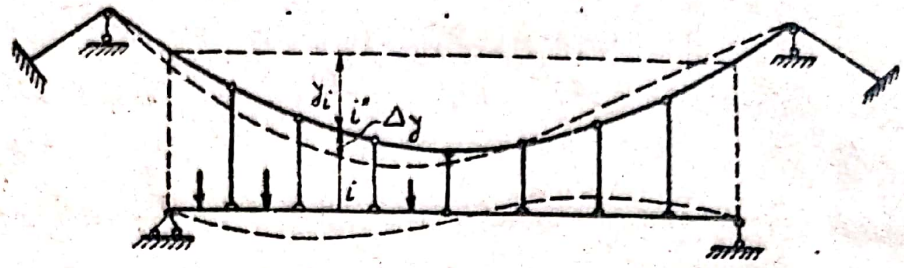


Fig. VI.5.

Cînd momentele încovoietoare M_1 sînt mici - ceea ce se urmăreşte la proiectarea sistemelor mixte şi suspendate - este posibil ca produsul $H \cdot \Delta y$ să fie aproape de acelaşi ordin de mărime cu M_1, deci eroarea făcută prin neluarea în consideraţie a efectului deformaţiilor sistemului să fie mare.

VI.3. Sisteme suspendate, fără grindă de rigidizare.

VI.3.1. Consideraţii generale.

Aceste structuri sînt alcătuite din sisteme de cabluri, concepute în aşa fel încît în orice ipoteză de încărcare să apară numai eforturi axiale de întindere în toate elementele componente. In alcătuirea acestor sisteme mai intră de obicei şi tablierul, precum şi montanţii care transmit sarcinile la cabluri, dar aceste elemente nu fac parte din structura propriu zisă de rezistenţă. In fig.VI.6.a este prezentată schema generală a unui astfel de sistem suspendat, construită pe principiul arcelor cu trei articulaţii în poziţie răsturnată.

Considerăm că linia de influenţă a efortului axial din unul de elementele ce alcătuiesc sistemul de cabluri este cea din fig.VI.6.b şi cuprinde atît o zonă cu ordonate pozitive cît şi una cu ordonate negative. Indeplinirea condiţiei ca efortul

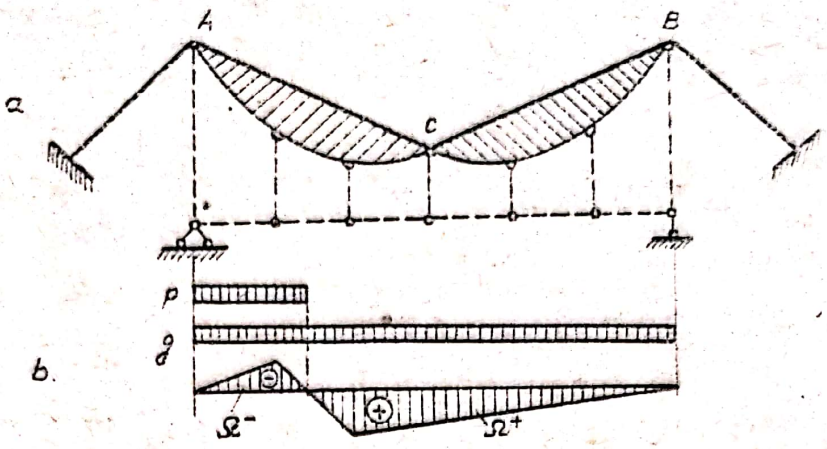


Fig VI.6

axial în elementul respectiv să fie de întindere trebuie verificată în ipoteza de încărcare reprezentată în figură, adică pentru situaţia sarcinilor permanente pe toată deschiderea şi a sarcinilor utile numai pe porţiunea corespunzătoare zonei negative a liniei de influenţă. Punînd condiţia ca efortul din bara considerată să fie de întindere, se obţine:

$$g(\Omega^+ - \Omega^-) - p\Omega^- > 0 \qquad \text{(VI.11.a)}$$

ceea ce se mai poate scrie:

$$\frac{g}{p}\left[\frac{\Omega^+}{\Omega^-} - 1\right] > 1 \qquad \text{(VI.11.b)}$$

Proiectarea acestor structuri impune deci efectuarea acestei verificări pentru toate elementele sistemului de cabluri. Aşa cum se vede din relaţia (VI.11.b), această verificare necesită cunoaşterea în prealabil a raportului g/p dintre mărimea intensităţii sarcinii permanente şi cea a intensităţii sarcinilor utile (considerate ca sarcină echivalentă corespunzătoare încărcărilor fixe, sau convoiului de sarcini mobile ce urmează să se deplaseze pe structură).

Scanned with OKEN Scanner

Determinarea sarcinilor permanente (greutăţi proprii şi sarcini moarte) se va face, evident, pe baza unei predimensionări a structurii, urmînd ca - dacă este cazul - să se efectueze din nou verificările, cu valorile încărcărilor permanente reale rezultate din dimensionarea elementelor structurii pe baza eforturilor obţinute din calculul static.

In cele ce urmează se prezintă modul de efectuare a calculului static pentru două tipuri de sisteme suspendate.

1. Sisteme suspendate alcătuite din triunghiuri suspendate unul de altul.

2. Sisteme suspendate, cu mai multe tălpi.

VI.3.2. Sisteme suspendate alcătuite din triunghiuri suspendate unul de altul.

VI.3.2.1. Calculul la sarcini fixe.

Schema de alcătuire a unui astfel de sistem este indicată în fig.VI.7.

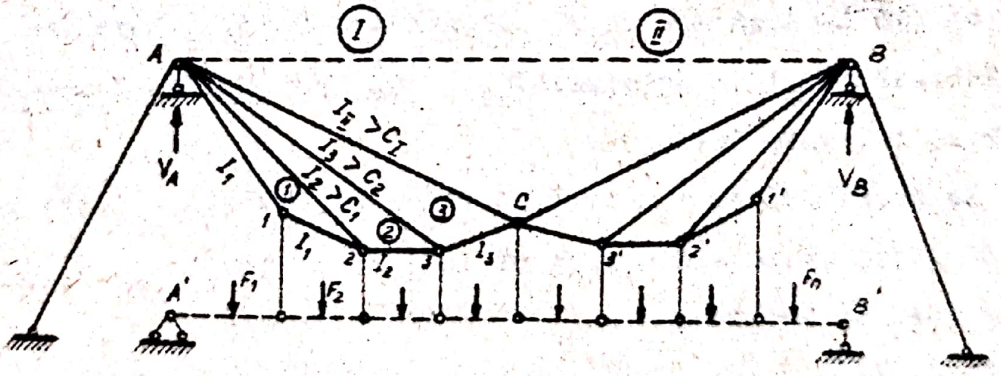


Fig. VI.7

Grinzile care constituie suportul căii sînt suspendate prin tiranţi de sistemul de cabluri, fără să facă parte din structura de rezistenţă.

Pentru determinarea eforturilor din cabluri, se utilizează metoda separării nodurilor (analitic sau grafic), cunoscînd sarcinile care se transmit prin tiranţi şi începînd din nodul 1 sau 1:

Se constată numai pe bază de raţionament că eforturile din toate cablurile sînt de întindere, după cum urmează:

a) Din încărcările de pe porţiunea I (A-C):

- în triunghiul A-1-2, barele A-1 şi 1-2 sînt întinse (I_1), iar bara A-2 este comprimată (C_1);

- în triunghiul A-2-3, barele A-2 şi 2-3 sînt întinse (I_2), iar bara A-3 este comprimată (C_2); cum $I_2 > C_1$ (datorită dimensiunilor mai mari ale triunghiului A-2-3), rezultă că prin suprapunere de efecte $I_2 - C_1 > 0$ deci bara A-2 este întinsă;

- în triunghiul A-3-C barele A-3 şi 3-C sînt întinse (I_3), iar bara A-C este comprimată (C_I); deoarece $I_3 > C_2$, rezultă că prin suprapunere de efecte $I_3 - C_2 > 0$, deci bara A-3 este întinsă.

b) Din încărcările de pe porţiunea C-B (II), bara A-C este întinsă (I_{II}) şi deoarece $I_{II} > C_I$, rezultă că $I_{II} - C_I > 0$ deci bara A-C este întinsă.

In acest fel se constată că toate barele de pe porţiunea A-C (şi judecînd în mod analog şi cele de pe porţiunea C-B) sînt supuse la întindere.

VI.3.2.2. <u>Calculul la sarcini mobile</u>.

Determinarea liniilor de influenţă ale eforturilor din cabluri se face cel mai simplu prin utilizarea procedeului cinematic.

Considerînd sistemul suspendat cu notaţiile din fig.VI.7,

se determină pentru exemplificare următoarele linii de influenţă:

a) Linia de influenţă a efortului S_{A-C}.

Suprimînd bara A-C şi înlocuind-o cu perechea de eforturi corespunzătoare, se formează mecanismul din fig.VI.8.a alcătuit din corpurile I, II şi III, cu centrele de rotaţie:

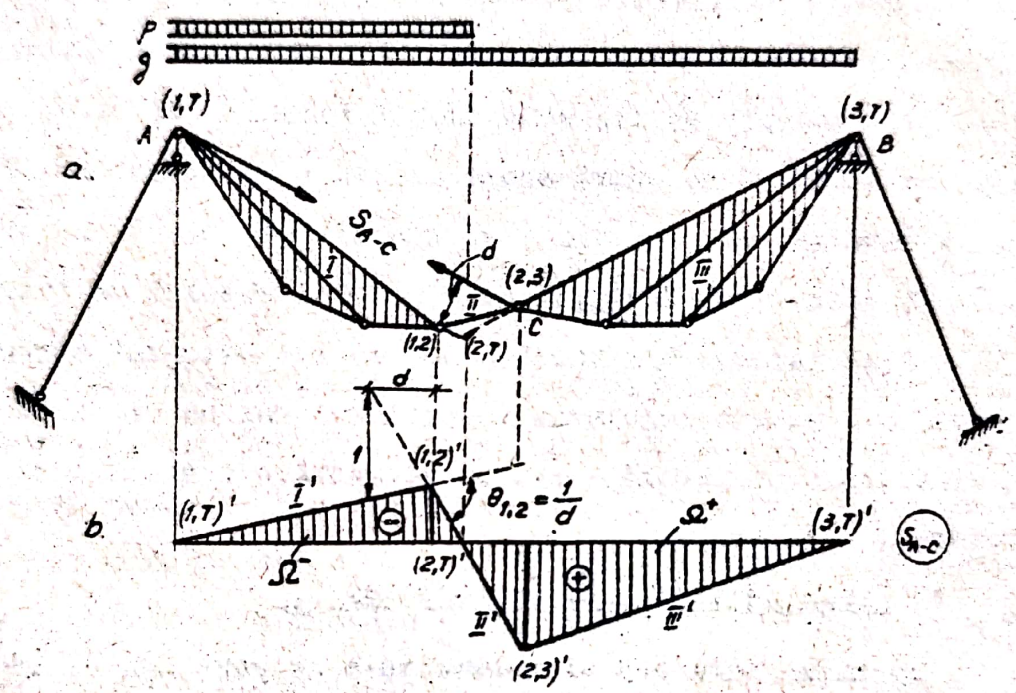


Fig. VI.8

(1,T) în reazemul A;

(3,T) în reazemul B;

(1,2) şi (2,3) în nodurile 3 şi respectiv C;

(2,T) la intersecţia direcţiilor (1,T) - (1,2) şi (3,T) - (2,3).

Se construieşte apoi diagrama deplasărilor pe verticală (fig.VI.8.b) şi scara liniei de influenţă rezultă din condiţia:

$$\delta^{S}_{A-C} = 1$$

care se mai poate scrie:

$$\delta^{(1)}_{A-C} = \theta_{1,2} \cdot d = 1$$

deci se va considera $\theta_{1,2} = \frac{1}{d}$ (VI.12)

ceea ce revine la a considera la distanţă orizontală d măsurată faţă de (1,2); o ordonată relativă între I'şi II'egală cu unitatea.

Considerînd încărcarea cea mai-defavorabilă - sarcina permanentă pe toată deschiderea şi sarcina utilă pe porţiunea corespunzătoare zonei negative a liniei de influenţă - trebuie să fie satisfăcută relaţia (VI.11.b), pentru ca în bara A-C să apară numai eforturi de întindere. Pentru aceasta este necesar ca Ω^- şi fie cît mai mic în raport cu Ω^+ şi aceasta se întîmplă cînd centrul absolut de rotaţie (2,T) adică intersecţia barelor B-C şi A-3 este mai apropiată de modul 3. Această concluzie reprezintă deci un criteriu pentru alcătuirea naţională a formei geometrice a acestor tipuri de sisteme suspendate.

b) <u>Linia de influenţă a efortului</u> D_{A-3}

Suprimînd bara A-3 şi înlocuind-o cu perechea de eforturi corespunzătoare D_{A-3} (fig.VI.9.a), se constată uşor că ansamblul

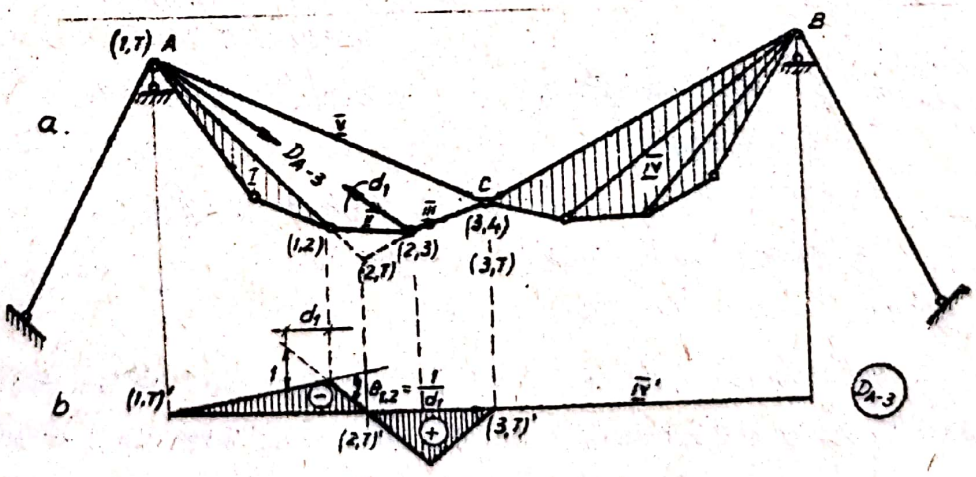


Fig. VI.9.

alcătuit din corpul IV şi bara A-C reprezintă un sistem cu trei articulaţii, deci este fix.

Pentru corpurile I, II şi III centrele de rotaţie rezultă simplu: (1,T) în A, (3,T) în C, (2,T) la intersecţia direcţiilor (1,T) - (1,2) şi (3,T) - (2,3).

Rezultă linia de influenţă din fig.VI.9.b, a cărei scară se determină din condiţia:

$$\delta^{(D)}_{A-3} = 1 = \theta_{1,2}\, d_1$$

deci:

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{d_1} \qquad \text{(VI.13)}$$

Se vede că şi în acest caz, pentru a obţine o zonă negativă a liniei de influenţă de arie cît mai mică - necesară pentru satisfacerea condiţiei (VI.11.b) - trebuie ca intersecţia barelor A-2 şi C-3 să fie cît mai apropiată de modul 2, criteriu de care trebuie să se ţină seama la alcătuirea formei geometrice a sistemului.

- <u>Linia de influenţă pentru efortul I_{3-C}</u>

Se constată şi în acest caz (fig.VI.10.a) că ansamblul

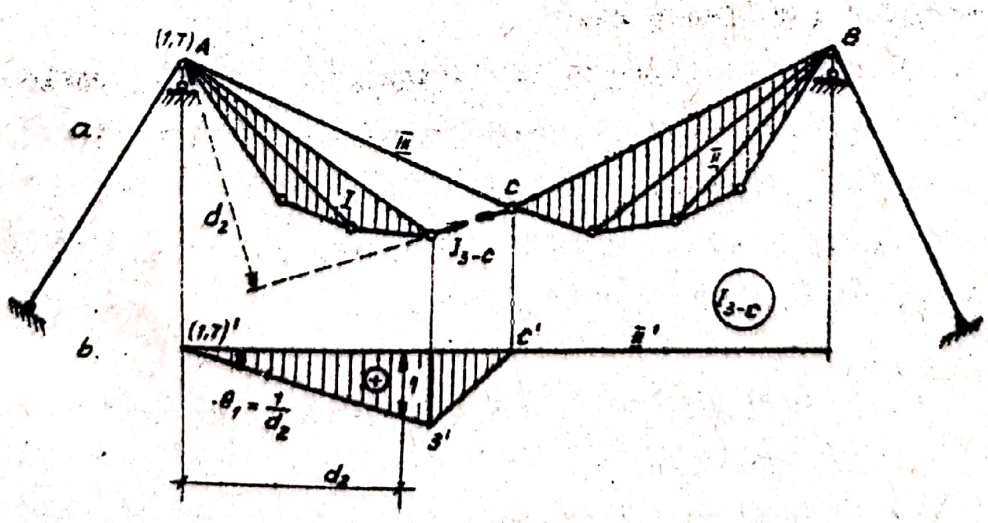


Fig. VI.10.

alcătuit din bara A-C și corpul II este fix, singurul care are deplasări fiind corpul I, cu centrul absolut de rotație în A.

Linia de influență este trasată în fig.VI.10.b, scara determinîndu-se din condiția:

$$\delta^{(I)}_{3-C} = 1 = \theta_1 \cdot d_2$$

deci:

$$\theta_1 = \frac{1}{d_2} \qquad (VI.14)$$

ceea ce revine la a considera la distanța orizontală d_2 față de (1,T)'o ordonată unitară.

În mod analog se determină liniile de influență și pentru eforturile din celelalte bare. Se constată că în afară de eforturile din barele A-C și C-B care au linii de influență ce se întind pe toată deschiderea, toate celelalte eforturi din diagonale și din barele tălpii inferioare au linii de influență cu ordonate diferite de zero numai pe jumătatea din care fac parte barele respective.

Rezultă deci că numai barele A-C și C-B preiau eforturi din încărcările pe toată deschiderea, în timp ce celelalte bare preiau eforturi numai din încărcările de pe jumătatea de sistem din care fac parte.

Această concluzie ne dă indicații asupra ipotezelor de încărcare a sistemului pentru determinarea eforturilor din bare și indică faptul că pentru încărcări numai pe jumătate din sistem schema de calcul este cea din fig.VI.11, barele nefigurate fiind în această ipoteză inactive.

VI.3.3. Sisteme suspendate, cu mai multe tălpi

Se va analiza alcătuirea și calculul sistemului suspendat propus de profesorul sovietic I.M.Rabinovici, acesta fiind

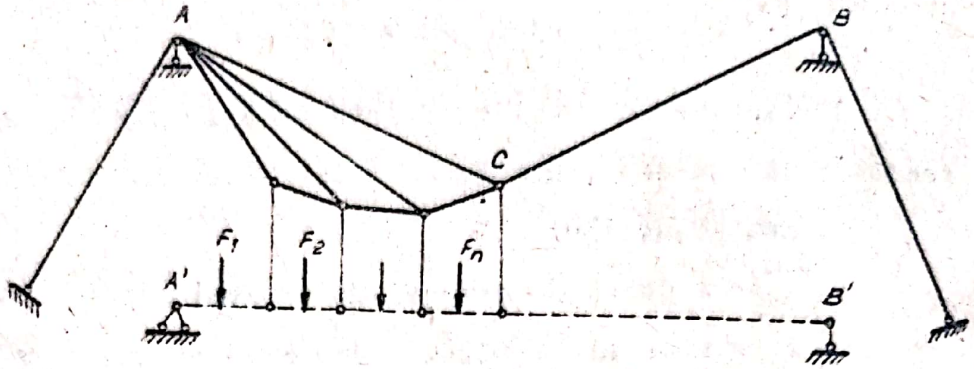


Fig. VI.11.

tipul cel mai general de sistem suspendat fără grindă de rigidizare.

VI.3.3.1. Alcătuire, condiţii de nedeformabilitate geometrică.

Modul de alcătuire este indicat în fig.VI.12, elementele componente fiind tălpile şi montanţii; toate tălpile sînt legate în articulaţiile din A şi C, respectiv din C şi B.

Tălpile sistemului lucrează la întindere şi fiecare talpă reprezintă un poligon funicular corespunzător unei anumite scheme de încărcare.

Pentru încărcări pe jumătatea din stînga a sistemului, lucrează numai barele de pe această porţiune şi bara B-C şi acest ansamblu alcătuieşte un sistem cu zăbrele simplu rezemat (articulat în A şi cu reazemul simplu B-C), deci trebuie să fie

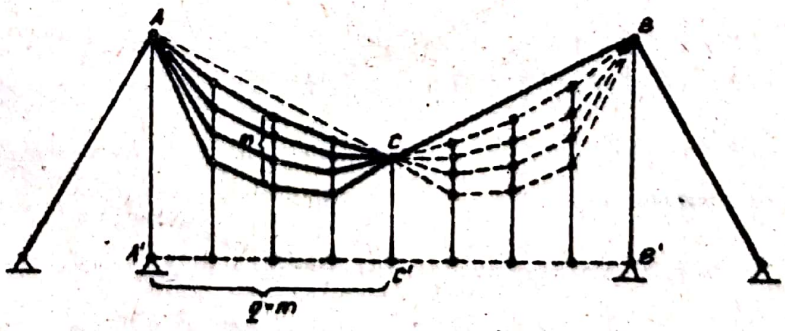


Fig. VI.12

îndeplinită condiţia (IV.2.a), în care $r = 3$, adică:

$$2n = b + 3 \qquad (VI.15)$$

Să analizăm ce devine această relaţie pentru porţiunea considerată (barele figurate cu linie plină în fig.VI.12).

Se fac notaţiile:

q = numărul de panouri de pe jumătate de sistem;

m = numărul de tălpi, fără a considera bara A-C - care lucrează pentru încărcări pe jumătatea din dreapta - şi nici calea suspendată de sistem.

Cu aceste notaţii, se obţine:

- numărul de bare:

$$b = mq + (m - 1)(q - 1) = 2mq - m - q + 1 \qquad (VI.16)$$

mq fiind numărul barelor din tălpi, iar $(m - 1)(q - 1)$ numărul de montanţi, în care nu se includ barele de suspendare a căii;

- numărul de noduri:

$$n = m(q - 1) + 2 = mq - m + 2 \qquad (VI.17)$$

$m(q-1)$ fiind numărul de noduri intermediare, iar 2 nodurile A şi C.

Introducînd în (VI.15), se obţine:

$$2(mq - m + 2) = 2mq - m - q + 1 + 3$$

şi rezultă:

$$m = q \qquad (VI.18)$$

Deci, este necesar ca numărul de tălpi (poligoane funiculare) să fie egal cu numărul de panouri, pentru ca sistemul să fie nedeformabil.

VI.3.3.2. Calculul sistemelor cu mai multe tălpi.

Schema de calcul pentru încărcările de pe jumătatea din stînga este cea din fig.VI.13.a, fiecare talpă constituind un poligon funicular pentru un sistem de sarcini aplicate în nodurile respective.

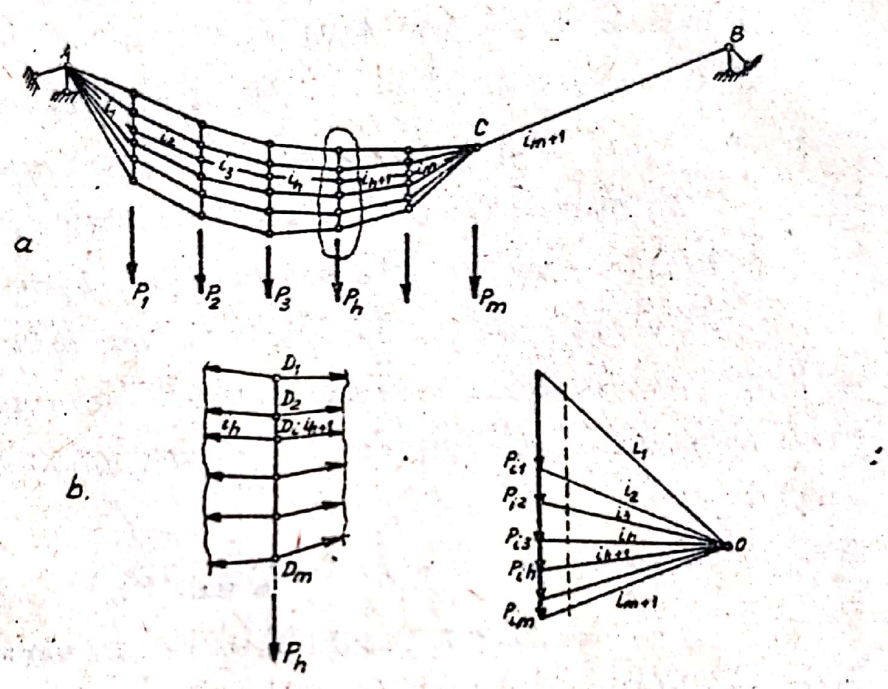


Fig. VI.13

Pentru o talpă i cu nodurile i_1, i_2,..,i_m, dacă se construieşte un poligon de forţe cu razele polare paralele cu laturile tălpii respective şi se duce o verticală oarecare (fig. VI.13.c), se obţine un sistem de forţe P_{i1},...,P_{im} pentru care talpa considerată i este poligon funicular.

Sistemele de forţe obţinute astfel prin diferite verticale duse în poligonul de forţe corespunzător tălpii i, diferă între ele printr-un coeficient de proporţionalitate Z, iar pentru un anumit Z_1 se vor găsi valorile reale ale forţelor din

montanți.

Vor exista astfel m coeficienți Z_i (câte unul pentru fiecare talpă) și pentru determinarea acestor coeficienți se procedează astfel:

- se izolează un șir vertical de montanți (fig.VI.13.b) și pentru fiecare nod D_1, D_2....D_m forța verticală - care reprezintă rezultanta eforturilor din barele din stînga și din dreapta ale tălpii respective - va fi proporțională prin coeficientul Z_i al tălpii, cu forța corespunzătoare din poligonul de forțe construit; pentru șirul de montanți considerat în fig.VI.13.b, aceste forțe vor fi $Z_1P_{1h}, Z_2P_{2h}, \ldots, Z_mP_{mh}$;

- se scrie condiția ca suma forțelor dintr-un șir de montanți să fie egală cu sarcina totală care se aplică în nodul inferior al acestui șir (forța transmisă de calea structurii):

$$Z_1P_{1h} + Z_2P_{2h} + \ldots + Z_iP_{ih} + \ldots + Z_mP_{mh} = P_h \qquad \text{(VI.19)}$$

- procedînd la fel pentru fiecare șir vertical de montanți, se obține un sistem de m ecuații cu m necunoscute de forma:

$$\begin{aligned}
&Z_1P_{11} + Z_2P_{21} + \ldots + Z_iP_{i1} + \ldots + Z_mP_{m1} = P_1 \\
&Z_1P_{12} + Z_2P_{22} + \ldots + Z_iP_{i2} + \ldots + Z_mP_{m2} = P_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{(VI.20)} \\
&Z_1P_{1i} + Z_2P_{2i} + \ldots + Z_iP_{ii} + \ldots + Z_mP_{mi} = P_i \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&Z_1P_{1m} + Z_2P_{2m} + \ldots + Z_iP_{im} + \ldots + Z_mP_{mm} = P_m
\end{aligned}$$

sistem din care - cunoscînd forțele P_{ih} din poligoanele de forțe construite pentru fiecare talpă și forțele P_h transmise de cale - se determină coeficienții $Z_1, Z_2, \ldots Z_m$.

Apoi, se determină eforturile din montanți și din barele

tălpilor, cu ajutorul poligoanelor de forţe construite pentru fiecare talpă în parte.

Procedînd în mod similar se stabilesc şi eforturile din barele jumătăţii din dreapta, care lucrează - împreună cu bara A-C - la încărcările de pe această porţiune a sistemului.

..ooOOoo..

CAPITOLUL VII

STRUCTURI SPAȚIALE STATIC DETERMINATE

In acest capitol se analizează modul de efectuare a calculului pentru două categorii de structuri spațiale static determinate:

1. Structuri spațiale alcătuite din bare articulate în noduri.
2. Grinzi plane încărcate normal pe planul lor.

VII.1. Structuri spațiale alcătuite din bare articulate în noduri.

VII.1.1. Alcătuire, ipoteze de calcul.

Din această grupă fac parte structurile care prin schematizare se reduc la sisteme spațiale de bare, nedeformabile geometric atunci cînd toate nodurile se consideră articulații sferice perfecte. Exemple de astfel de structuri sînt: cupolele, turnurile, pilonii, eșafodajele, infrastructurile de rezervoare etc.

In fig.VII.1 sînt prezentate schemele cîtorva tipuri de astfel de structuri spațiale: grindă spațială (a), turn (b), cupole (c, d).

Ipotezele de calcul sînt aceleași ca și la structurile plane cu zăbrele:

a) nodurile se consideră articulații sferice perfecte;

b) sarcinile se aplică numai în noduri;

c) barele sînt perfect axate în noduri

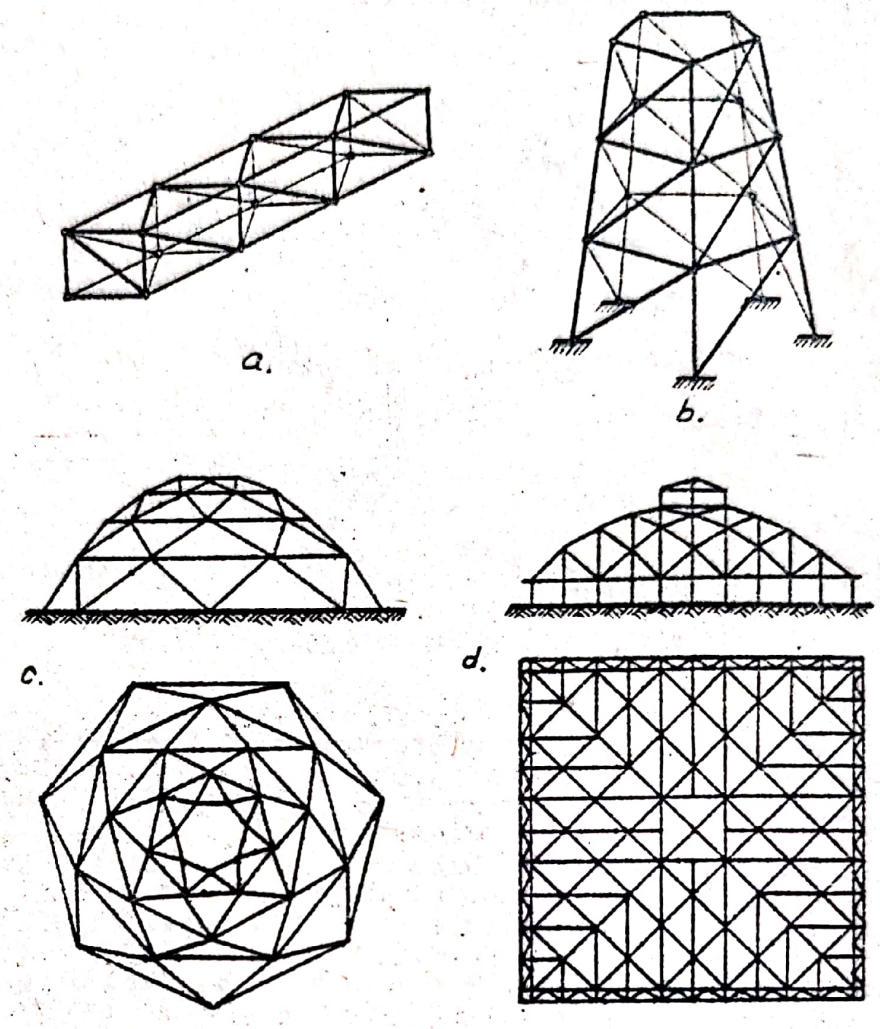


Fig. VII.1

In aceste condiţii, în barele unei astfel de structuri nu apar decît forţe axiale.

In realitate barele sînt însă legate rigid în noduri şi în consecinţă apar şi eforturi de încovoiere, a căror pondere depinde - ca şi la structurile plane - de gradul de zvelteţe al barelor, caracterizat prin raportul dintre lungimea şi dimensiunile secţiunii barei.

In ceea ce priveşte asigurarea nedeformabilităţii geometrice şi fixarea structurilor în spaţiu, trebuie precizat că legarea unui punct se poate realiza prin trei bare (fig.VII.2.a) dar este necesar ca cele trei bare să nu fie toate în acelaşi

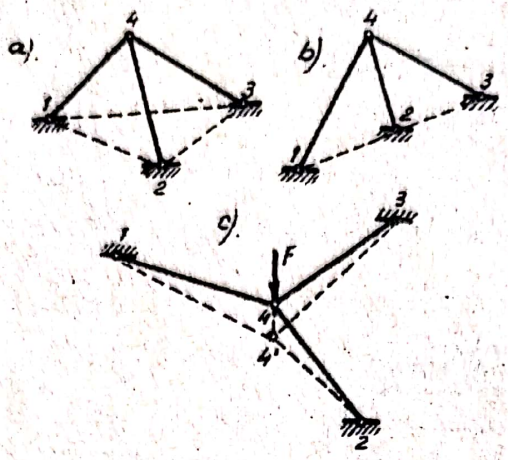


Fig. VII.2

plan. In fig.VII.2.b este prezentat cazul legării cu trei bare coplanare , care permite rotirea în jurul axei 1-2-3, iar în fig.VII.2.c cazul a trei bare situate în același plan și acționate de o sarcină normală pe planul barelor, cînd se pot produce deplasări limitate ale nodului 4, fără o variație a lungimii barelor. Sînt deci situații în care nu este asigurată legarea invariabilă a nodurilor respective și trebuie ca atare evitate.

Tipurile de reazeme spațiale au fost analizate în paragraful I.3 - punctul 2 și aici doar le vom reaminti: reazemul simplu, articulația plană (cilindrică), articulația spațială (sferică) și încastrarea spațială. In același paragraf au fost prezentate și cîteva exemple de folosire corectă sau defectuoasă a celor șase legături simple necesare fixării unui corp în spațiu.

Condiția generală care trebuie îndeplinită pentru asigurarea fixării unui corp prin șase legături simple, este <u>să nu existe nici o axă în raport cu care momentele tuturor forțelor de legătură să fie nule</u>. Cazurile în care această con-

diţie nu este îndeplinită sînt următoarele:

a) Cînd mai mult de trei legături sînt paralele.

b) Cînd trei legături sînt paralele şi celelalte trei sînt concurente.

c) Cînd patru legături sînt cuprinse în acelaşi plan.

Toate aceste moduri de dispunere a legăturilor reprezintă cazuri de forme critice, adică sisteme caracterizate prin apariţia în anumite bare a unor eforturi de valori foarte mari (teoretic infinite) şi vor trebui evitate.

VII.1.2. Condiţii de nedeformabilitate geometrică şi determinare statică. Clasificarea structurilor spaţiale articulate.

Modurile curente de alcătuire a sistemelor spaţiale articulate în noduri sînt următoarele:

a) Fixarea unui nod prin intermediul a trei bare legate de baza de sprijinire şi nesituate în acelaşi plan (nodul 1 în fig.VII.3.a) şi apoi adăugarea succesivă a cîte unui nod legat de asemenea cu cîte trei bare de puncte fixe ale bazei sau de noduri fixate anterior (nodurile 2 şi 3 în fig.VII.3.a). După constituirea unui nivel, se pot alcătui nivele superioare după aceeaşi regulă, rezultînd de exemplu sisteme ca cel din fig.VII.3.b.

Deci, pentru o structură spaţială care are un număr de n noduri, sînt necesare în total minim 3 n legături simple.

Dacă mai facem notaţiile:

b = numărul de bare care leagă între ele numai noduri;

r = numărul de bare legate de baza de sprijinire;

nedeformabilitatea geometrică şi fixarea în spaţiu a unei structuri spaţiale articulate în noduri este asigurată cînd

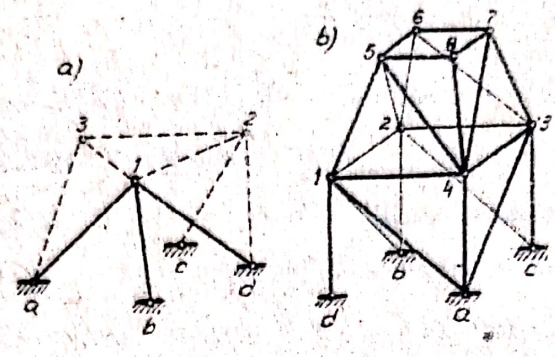


Fig. VII.3

este îndeplinită condiția:

$$b + r \geqslant 3n \qquad \text{(VII.1.a)}$$

sau:

$$b - 3n + r \geqslant 0 \qquad \text{(VII.1.b)}$$

Cazul particular:

$$b + r = 3n \qquad \text{(VII.2.a)}$$

sau:

$$b + r - 3n = 0 \qquad \text{(VII.a.b)}$$

reprezintă <u>condiția de strictă nedeformabilitate geometrică și determinare statică.</u>

Într-adevăr, judecînd sub aspect matematic, numărul de necunoscute este $b + r$ (b forțe axiale din barele de legătură între noduri și r forțe axiale în barele de legătură cu baza de sprijinire), iar numărul de ecuații de echilibru static se pot scrie în cele n sisteme de forțe concurente reprezentate de noduri este $3n$ (cîte trei ecuații de proiecție în fiecare nod). Deci, cînd $b + r = 3n$ - relația (VII.2.a) - sistemul este static determinat.

Există totuși și situații cînd deși relația VII.2.a)

este satisfăcută, sistemul de 3 n ecuaţii cu b + r = 3 n necunoscute nu are soluţie unică şi aceasta se întîmplă cînd determinantul principal al sistemului de ecuaţii este nul, ceea ce înseamnă (potrivit rezolvării sistemelor algebrice de ecuaţii prin regula lui Cramer) eforturi infinite cu barele sistemului, deci forme critice.

Cazul b + r > 3 n corespunde sistemelor static nedeterminate şi (b + r) - 3 n reprezintă gradul de nedeterminare statică, iar cazul b + r < 3 n caracterizează sistemele cinematice, 3 n - (b + r) reprezentînd numărul gradelor de libertate.

b) Se alcătuieşte un triunghi (1-2-3 în fig.VII.4); de vîrfurile acestui triunghi se leagă un nod prin trei bare (nodul 4 în fig.VII.4), obţinîndu-se astfel un tetraedru de bază; apoi se adaugă succesiv noduri legate prin cîte trei bare de nodurile precedente (nodurile 5, 6, 7, 8 în fig.VII. 4). Rezultă astfel că pentru legarea a n noduri sînt necesare

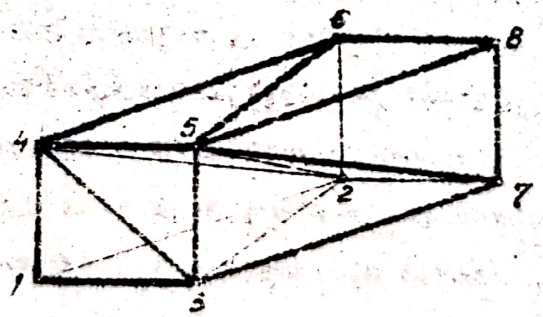


Fig. VII.4

b = 3 n - 6 bare (primele 3 noduri sînt legate cu 3 bare în loc de 3 x 3 = 9 bare, deci 6 bare mai puţin). La acest număr trebuie adăugat cele r = 6 legături de fixare a sistemului de bază de sprijinire, deci pe ansamblu este necesar ca (sumînd cele două relaţii):

$$b + r \geq 3n - 6 + 6$$

sau:

$$b + r \geq 3n \qquad \text{(VII.1.a)}$$

adică aceeaşi condiţie găsită anterior.

Mai trebuie precizat că se pot alcătui sisteme la care existenţa unui număr mai mic de bare de legătură între noduri poate fi compensată printr-un număr corespunzător de bare de legătură cu baza de sprijinire, cu condiţia să fie asigurată nedeformabilitatea geometrică şi fixarea în spaţiu a structurii.

c) In cazurile cînd condiţiile de exploatare impun ca spaţiul interior al structurii să fie complet liber, deci să nu existe diagonale interioare, se utilizează <u>structuri în formă de carcase</u> (fig.VII.1.a). Acestea sînt alcătuite din feţe compuse prin alăturare de triunghiuri şi cu vîrfuri comune pentru toate triunghiurile vecine. Prin urmare, fiecare faţă este o grindă cu zăbrele plană care asigură nedeformabilitatea geometrică în planul său.

Condiţia de nedeformabilitate geometrică şi determinarea statică se stabileşte în acest caz pe baza teoremei Euler, caracterizată de relaţia:

$$b = n + f - 2 \qquad \text{(VII.3)}$$

în care b = numărul de muchii, n = numărul de vîrfuri şi f = numărul de feţe ale unui poliedru avînd feţele alcătuite din poligoane oarecari.

In cazul structurilor analizate, fețele au formă triunghiulară fiind deci delimitate de trei bare (muchii), iar fiecare bară face parte din două fețe. Deci, numărul de fețe este:

$$f = 2b/3 \qquad \text{(VII.4)}$$

și introducînd în (VII.3) se obține:

$$b - 3n + 6 = 0$$

care reprezintă condiția de nedeformabilitate geometrică a strúcturii. Structura trebuie apoi fixată de baza de sprijinire prin șase legături.

In fig.VII.5.a este reprezentată o structură în formă de carcasă, alcătuită în așa fel încît întreg spațiul interior este liber. In schimb, la structura din fig.VII.5.b, legată de baza de sprijinire cu numărul minim de șase bare, spațiul interior este traversat de barele 2-4 și 6-8. Pentru evitarea acestei situații, care poate produce inconveniente în exploatarea construcției, se pot suprima barele 2-4 și 6-8, introducîndu-se în schimb barele 2-6 și 3-d de legătură cu baza de sprijinire (fig.VII.5.c)

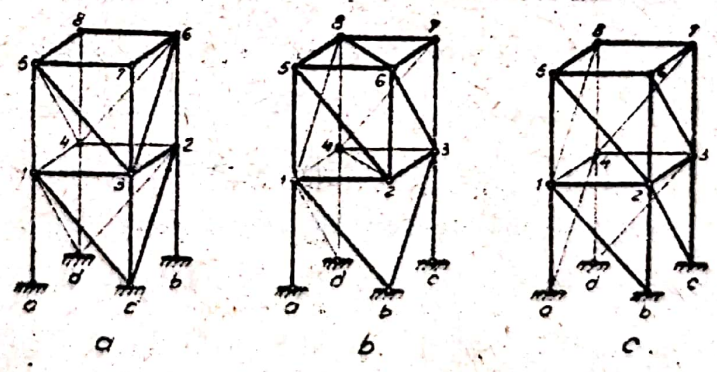


Fig. VII.5

Aceste sisteme, obţinute prin modificarea dispunerii barelor în scopul eliminării diagonalelor care traversează spaţiul interior, se numesc "carcase transformate". Cînd cele două feţe ale poliedrului de pe care se elimină diagonalele au acelaşi număr de noduri, nedeformabilitatea geometrică se asigură prin cîte o articulaţie plană prevăzută la fiecare dintre nodurile feţei legate de baza de sprijinire.

Structurile spaţiale articulate se clasifică în acelaşi categorii ca şi sistemele plane de bare articulate.

a) Structuri simple - alcătuite prin adăugarea succesivă a cîte unui nod legat prin intermediul a cîte trei bare nesituate în acelaşi plan, pornind de la o bază de sprijinire (fig. VII.5.a).

b) Structuri compuse - alcătuite prin legarea unei structuri cu nedeformabilitate geometrică proprie de o bază de sprijinire, cu un număr corespunzător de legături (fig.VII.5.b).

c) Structuri complexe - alcătuite altfel decît structurile simple şi compuse şi care au în general cel puţin cîte patru bare în fiecare nod. Din această categorie fac parte de obicei şi carcasele transformate (fig.VII.5.c).

VII.1.3. Calculul structurilor spaţiale articulate în noduri.

Determinarea eforturilor din barele structurilor spaţiale articulate în noduri se face folosind următoarele metode:

1. Metoda izolării nodurilor.
2. Metoda secţiunilor.
3. Descompunerea în sisteme plane.

La sistemele spaţiale complexe se pot utiliza anumite

procedee particulare (metoda înlocuirii barelor etc.).

VII.1.3.1. Metoda izolării nodurilor.

In general, orice sistem spaţial static determinat alcătuit din bare articulate în noduri poate fi rezolvat prin metoda izolării nodurilor. Aceasta deoarece izolînd cele n noduri, se obţin mănunchiuri de forţe concurente şi se pot deci scrie 3 n ecuaţii de echilibru static (cîte 3 ecuaţii de proiecţie pe trei direcţii nesituate în acelaşi plan în fiecare nod), cu $(b + r) = 3\,n$ necunoscute. Metoda este însă practică atunci cînd nu trebuie să recurgem la rezolvarea unui sistem de 3 n ecuaţii cu 3 n necunoscute, ci este posibil să găsim o astfel de ordine de parcurgere a nodurilor, încît în fiecare nod să nu existe mai mult de trei bare cu eforturi necunoscute. Acest lucru se întîmplă la sistemele spaţiale articulate simple, la care însăşi alcătuirea prin adăugarea pentru fiecare nod a cîte trei bare nesituate în acelaşi plan ne indică respectarea condiţiei impuse de aplicarea simplă a metodei izolării nodurilor.

Condiţiile de echilibru ale fiecărui nod se pot scrie analitic sau se pot realiza grafic, ceea ce conduce la existenţa a două procedee de aplicare a metodei izolării nodurilor. De remarcat însă că în timp ce la sistemele plane de bare articulate procedeul grafic al metodei izolării nodurilor (epura Cremona) reprezintă o cale foarte simplă de determinare a eforturilor, la sistemele spaţiale varianta grafică este o problemă care nu se mai rezolvă cu aceeaşi simplitate.

a) Procedeul analitic.

Scrierea în fiecare nod a ecuaţiilor de proiecţie după direcţia a trei axe x, y, z necesită cunoaşterea cosinusurilor

directoare pentru fiecare bară în raport cu axele respective. Aceste cosinusuri directoare sînt egale cu raportul dintre proiecţiile barei pe axele respective şi lungimea barei. Dacă se consideră o bară oarecare de lungime ℓ_k ale cărei proiecţii pe cele trei axe sînt ℓ_x , ℓ_y , ℓ_z , vom avea :

$$\cos(k,x) = \ell_x/\ell_k \quad ; \quad \cos(k,y) = \ell_y/\ell_k \quad ; \quad \cos(k,z) = \ell_z/\ell_k \qquad \text{(VII.5)}$$

Dacă se consideră un nod oarecare o dintr-o structură spaţială, în care concură barele 0-1, 0-2 şi 0-3 şi în care acţionează sarcina F dirijată după axa Oz (fig.VII.6), cele trei ecuaţii de proiecţie pe axele Ox , Oy , Oz sînt:

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &: -N_1\, d/\ell_1 - N_2\, d/\ell_2 - N_3\, d/\ell_3 = 0 \\ \sum Y = 0 &: N_1\, a/\ell_1 - N_3\, b/\ell_3 = 0 \\ \sum Z = 0 &: N_2\, c/\ell_2 - F = 0 \end{aligned} \qquad \text{(VII.6)}$$

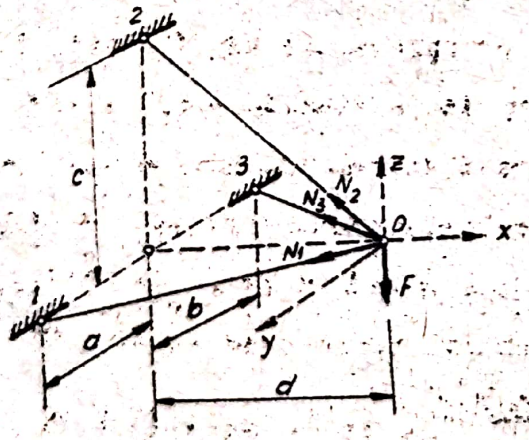


Fig VII.6

Din aceste ecuaţii rezultă:

$$N_1 = -\frac{Fb\,\ell_1}{c(a+b)}$$

$$N_2 = \frac{F\ell_2}{c} \qquad \text{(VII.7)}$$

$$N_3 = -\frac{F\,a\,\ell_3}{c(a+b)}$$

In aceste relaţii s-au notat cu ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 lungimile barelor 0-1, 0-2, 0-3, cu d proiecţiile barelor pe axa Ox, cu a şi b proiec-

ţiile barelor O-1 şi respectiv O-3 pe axa Oy şi cu c proiecţia barei O-2 pe axa Oz.

Există şi la sistemele spaţiale anumite situaţii particulare, care permit simplificarea rezolvării prin metoda izolării nodurilor şi conduc de asemenea la identificarea unor bare inactive, în anumite cazuri de încărcare. Aceste situaţii sînt următoarele:

a) Dacă într-un nod concură numai trei bare nesituate în acelaşi plan şi dacă în nod nu acţionează nici-o forţă (fig.VII.7.a), eforturile din toate cele trei bare sînt nule; aceasta, deoarece trei forţe nesituate în acelaşi plan nu-şi pot face echilibrul.

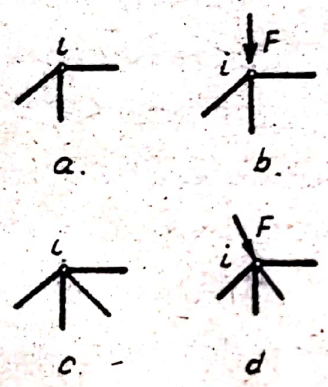


Fig. VII.7

b) In acelaşi caz ca precedentul, dacă în nod se aplică o sarcină după direcţia unei bare (fig.VII.7.b), efortul din această bară are mărimea forţei din nod, iar în celelalte două bare eforturile sînt nule; aceasta, deoarece proiectînd pe un plan normal pe direcţia sarcinii din nod, proiecţiile eforturilor din cele două bare s-ar anula numai dacă ar fi pe aceeaşi direcţie şi opuse ca sens.

c) Dacă într-un nod în care nu acţionează nici-o sarcină concură mai multe bare dintre care una singură nu este în acelaşi plan cu celelalte (fig.VII.7.c), efortul din această bară este nul (proiectînd pe o axă normală pe planul barelor, efor-

tul din bara în discuţie nu are cu cine se echilibra).

d) Dacă în acelaşi caz cu precedentul în nod se aplică o sarcină cu o direcţie oarecare (fig.VII.7.d), efortul din bara nesituată în acelaşi plan cu celelalte se poate determina direct dintr-o ecuaţie de proiecţie pe o axă normală pe planul comun al celorlalte bare.

b) Procedeul grafic.

Condiţia de echilibru a fiecărui nod se realizează grafic prin construirea unui poligon spaţial de forţe închis pentru mănunchiul de forţe reprezentate de sarcinile active din nodul respectiv şi eforturile din barele secţionate.

Astfel, dacă se consideră un nod O în care concură trei bare nesituate în acelaşi plan, având direcţiile Ox, Oy şi Oz şi dacă în nod acţionează o forţă exterioară F, eforturile din cele trei bare rezultă astfel (fig.VII.8.a):

- se descompune forţa F luată cu sens invers într-o componentă după direcţia axei Oz (efortul N_3) şi o componentă F' în planul xOy;

- se descompune F' după direcţiile axelor Ox şi Oy şi se obţin eforturile N_1 şi N_2.

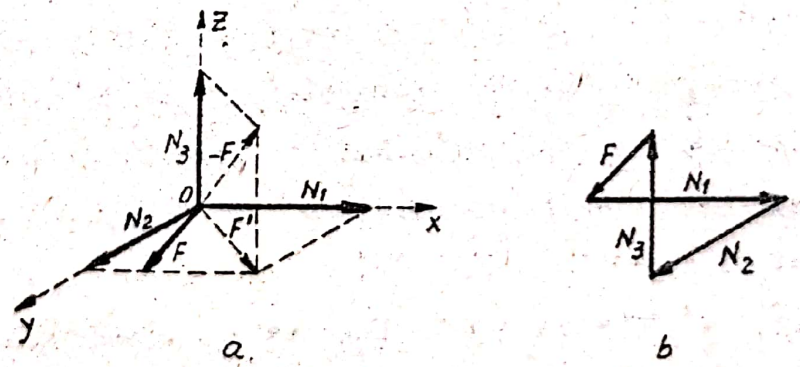


Fig. VII.8

In fig.VII.8.b este reprezentat poligonul spaţial de forţe închis pentru nodul considerat.

De remarcat că dacă se proiectează ortogonal un poligon de forţe închis pe un plan oarecare, se obţine tot un poligon de forţe închis, alcătuit din proiecţiile forţelor pe planul respectiv. Aceastăindică faptul că se poate înlocui condiţia de închidere a poligonului spaţial de forţe cu condiţii de închidere a poligoanelor alcătuite din proiecţiile forţelor, în plane convenabil alese; deci, problema de echilibru în spaţiu se poate reduce la probleme de echilibru în plan.

VII.1.3.2. Metoda secţiunilor.

Este o metodă specifică rezolvării sistemelor spaţiale compuse, datorită faptului că elimină dificultăţile cauzate de folosirea metodei izolării nodurilor în cazul cînd în fiecare nod există mai mult de trei bare cu eforturi necunoscute.

Principiul metodei constă în efectuarea unor secţiuni prin care se izolează porţiuni rigide din structură şi scrierea ecuaţiilor de echilibru a acestor porţiuni, ecuaţii din care rezultă mărimile eforturilor din barele secţionate. Cum în spaţiu se pot scrie şase ecuaţii distincte de echilibru static rezultă că numărul de bare secţionate cu eforturi necunoscute trebuie să fie de numai şase. In plus, este necesar ca să nu existe nici o axă în raport cu care momentele eforturilor din toate barele secţionate să fie nule.

In fig.VII.9 este dat un exemplu de secţionare a unei structuri prin tăierea a şase bare; se constată că atît partea de deasupra secţiunii - care are formă de carcasă - cît şi porţiunea de sub secţiune care este legată cu şase bare de baza de sprijinire - sînt nedeformabile geometric.

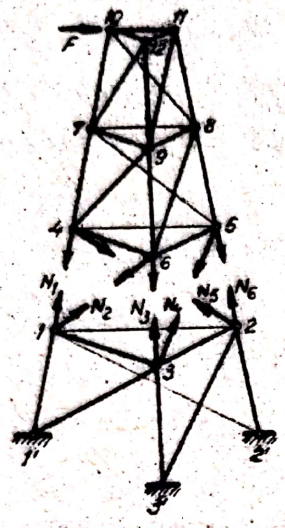


Fig. VII.9.

Ecuaţiile de echilibru static care se scriu pentru determinarea eforturilor din barele secţionate, pot fi ecuaţii de proiecţie şi ecuaţii de momente. Alegerea acestor ecuaţii trebuie făcută în aşa fel încît determinarea necunoscutelor să fie cît mai simplă. Se preferă de obicei ecuaţiile de momente, care le pot înlocui şi pe cele de proiecţie, cu condiţia ca toate ecuaţiile să fie independente.

Cînd nu este posibil să se găsească ecuaţii de momente au cîte o singură necunoscută, se pot găsi de fiecare dată pentru grupuri de cîte două necunoscute, două axe faţă de care celelalte patru necunoscute să aibă momente nule. Aceasta conduce la grupuri de cîte două ecuaţii cu două necunoscute, ceea ce simplifică rezolvarea.

In ceea ce priveşte scrierea ecuaţiilor de momente, reamintim că momentul unei forţe F în raport cu o axă Δ este egal cu momentul proiecţiei F' a forţei pe un plan normal la axă, în raport cu punctul unde axa înţeapă planul normal:

$$M_{\Delta} = F' \cdot d \qquad \text{(VII.8)}$$

d fiind distanţa de la punctul de înţepare a planului la pro-

iecţia F'a forţei pe planul normal.

Se vede că momentul poate fi nul numai cînd proiecţia F este nulă sau cînd braţul d este nul, ceea ce înseamnă că momentul unei forţe în raport cu o axă este nul atunci cînd forţa este paralelă cu axa sau cînd forţa intersectează axa şi aceasta se întîmplă cînd forţa şi axa se găsesc în acelaşi plan.

In ceea ce priveşte sensul momentului, acesta se consideră pozitiv atunci cînd produce o rotire în sens orar pentru un observator care priveşte dinspre sensul pozitiv al axei în raport cu care se scrie momentul.

Exemple de rezolvare a unor structuri spaţiale articulate în noduri prin metoda izolării nodurilor şi metoda secţiunilor sînt prezentate în lucrările [7] , [8] ale prof. A.Gheorghiu, lucrării care au stat la baza elaborării capitolului de faţă, constituind un îndreptar preţios şi pentru celelalte capitole.

VII.1.3.3. Descompunerea în sisteme plane.

Pentru structuri în formă de carcasă sau de carcasă transformată, se poate obţine o rezolvare simplificată prin descompunerea structurii în sisteme plane. Fiecare faţă a unei astfel de structuri reprezintă o grindă cu zăbrele plană, acţionată de sarcinile din planul său, dacă alcătuirea structurii îi asigură rezemările corespunzătoare.

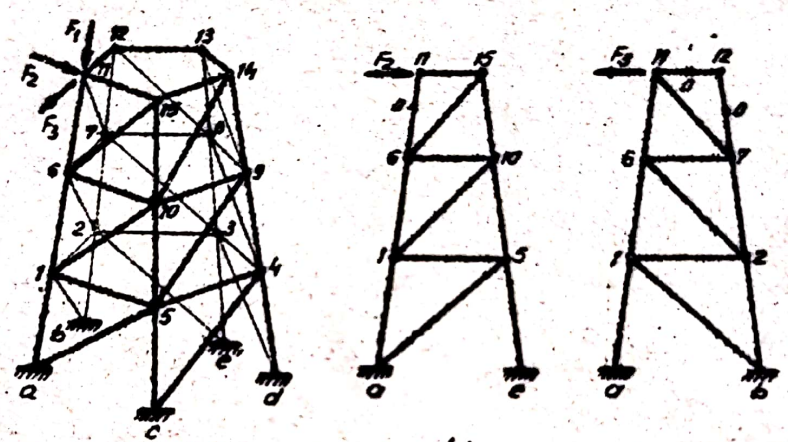
Rezolvarea unei structuri spaţiale prin acest procedeu implică deci descompunerea sarcinilor în componente cuprinse în planele feţelor laterale şi identificarea rezemărilor grinzilor cu zăbrele plane.

Pentru fiecare grindă plană, încărcările din planul său

sînt preluate numai de barele grinzii respective şi de cele care contribuie la sprijinirea ei, toate celelalte bare ale structurii fiind - în această ipoteză de încărcare - bare inactive.

După determinarea eforturilor în grinzile plane, eforturile din barele comune se determină prin suprapunere de efecte.

In fig.VII.10.a este prezentată schema de calcul a unei



a) b) c)

Fig. VII.10

carcase transformate, la care sarcina oarecare aplicată în nodul 11 a fost descompusă în:

- componenta F_1, dirijată după direcţia barei 11-6 şi care produce eforturi de compresiune egale cu F_1 în barele stîlpului 11-a;

- componenta F_2, dirijată după direcţia barei 11-15, care produce eforturi în barele grinzii plane din fig.VII.10.b;

- componenta F_3, dirijată după direcţia barei 11-12, care

produce eforturi în barele grinzii plane din fig.VII.10.c.

Prin rezolvarea celor două grinzi plane, se obţin eforturile din barele corespunzătoare; toate celelalte bare ale sistemului sînt bare inactive, iar eforturile din barele stîlpului II-a se determină suprapunînd efectele celor trei componente: F_1 (eforturi de compresiune egale cu F_1), F_2 (eforturi determinate în grinda plană din fig.VII.10.b) şi F_2 (eforturi determinate în grinda plană din fig.VII.10.c).

VII.2. Grinzi plane încărcate normal pe planul lor.

VII.2.1. Alcătuire, caracteristici.

Aceste sisteme au forme curbe sau poligonale (cotite), fiind de obicei situate în plan orizontal şi încărcate cu sarcini verticale. Este cazul grinzilor pentru balcoane, al inelelor de susţinere a rezervoarelor la castele de apă etc.; ele reprezintă de asemenea schema de calcul a arcelor (situate de data aceasta în plan vertical) la acţiunea presiunii vîntului.

Se consideră ca sistem de axe de coordonate: Ox, Oz (planul care cuprinde axa grinzii) şi Oy (normală pe planul grinzii şi deci paralelă cu direcţia de acţionare a sarcinilor) Fiecare secţiune are la rîndul său sistemul de axe alcătuit din: axa ξ după direcţia tangentei, axa η după normala principală şi axa y normală la plan (fig.VII.11.a).

Eforturile care apar într-o secţiune oarecare i a grinzii, sînt (fig.VII.11.b);

- forţa tăietoare T_i, egală cu rezultanta forţelor normale pe plan (din stînga sau din dreapta secţiunii), dirijată deci după axa y;

- momentul încovoietor M_i, componenta după axa η a mo-

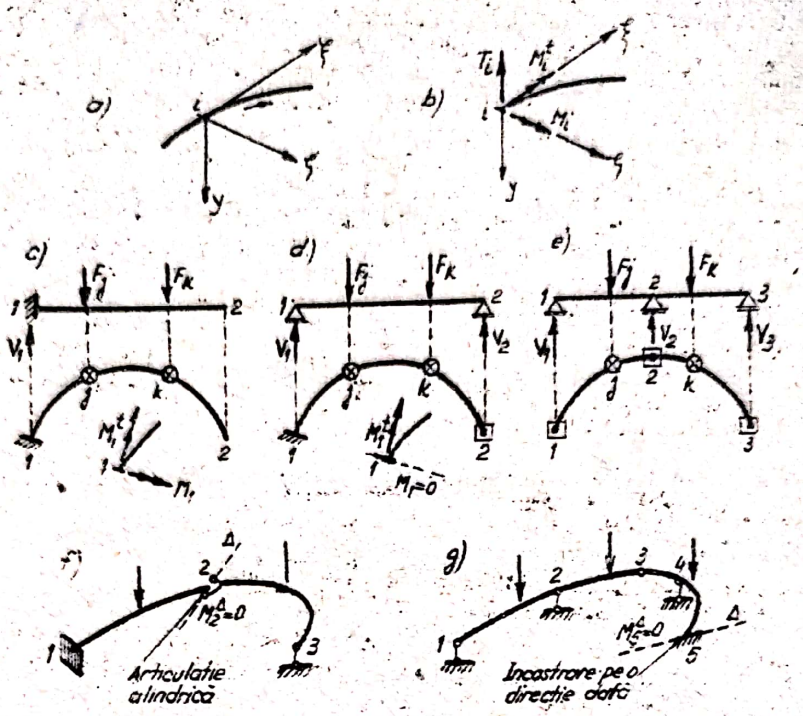


Fig. VII.11

mentului rezultant din secțiune;

- momentul de torsiune M_1^t, componenta după axa ξ a momentului rezultant din secțiune.

Rezultă deci că în acest caz particular al sarcinilor normale pe planul axei grinzii, apar numai aceste trei categorii de eforturi și prin urmare, din cele șase ecuații de echilibru static în spațiu, numai trei sînt utile în acest caz: ecuația de proiecție pe axa y și ecuațiile de momente în raport cu axele x și z.

Tipurile de rezemări ale grinzilor plane încărcate normal pe planul lor sînt următoarele:

a) <u>Reazemul simplu</u>, care împiedică numai deplasarea normală pe planul grinzii (1,2,3 în fig.VII.11.a) și introduce deci în calcule o singură necunoscută-reacțiunea după direcția axei y.

b) Încastrarea completă, care împiedică atît deplasarea normală pe planul grinzii, cît și rotirea în jurul oricărei axe din acest plan (secțiunea 1 din fig.VII.11.c); mărimile care trebuie determinate sînt reacțiunea după direcția axei y și momentele dirijate după două axe din plan care trec prin centrul încastrării (M_1 și M_1^t la exemplul considerat în fig. VII.11.c).

c) Încastrarea pe o direcție dată, care împiedică deplasarea normală pe planul grinzii, cît și rotirea în jurul unei anumite axe din plan care trece prin centrul încastrării, lăsînd liberă rotirea în jurul axei normale pe aceasta (secțiunea 1 a grinzii, din fig.VII.11.d). Mărimile care trebuie determinate sînt în acest caz reacțiunea după direcția axei y și momentul dirijat după direcția axei în jurul căreia este împiedicată rotirea (M_1^t în încastrarea de torsiune considerată în fig.VII.11.d).

Pentru fixarea unei grinzi plane încărcată normal pe planul ei sînt necesare cel puțin trei legături care să împiedice atît deplasarea normală la plan cît și rotirea în jurul oricărei axe din plan. Distribuirea judicioasă a legăturilor se controlează prin verificarea condiției de a nu exista nici o axă în planul grinzii, în raport cu care momentele tuturor forțelor de legătură să fie nule.

După modul de distribuire a legăturilor, pot exista următoarele tipuri de grinzi plane:

a) Grindă încastrată la un capăt și liberă la celălalt capăt (fig.VII.11.c);

b) Grindă cu un reazem simplu și o încastrare de direcție dată, dispusă în așa fel încît axa după care rotirea este liberă să nu treacă prin reazemul simplu (fig.VII.11.d);

c) Grindă așezată pe trei reazeme simple nesituate pe aceeași dreaptă (fig.VII.11.e).

Se pot de asemenea alcătui grinzi plane curbe sau poligonale compuse din mai multe porțiuni rigide, legate între ele fie cu articulații cilindrice - care permit rotirea relativă numai după o anumită axă din plan care trece prin articulație (fig.VII.11.f) - fie cu articulații sferice - care permit rotirea relativă în jurul oricărei axe din plan care trece prin articulație (fig.VII.11.g).

Introducerea unei articulații cilindrice este echivalentă cu suprimarea unei singure legături, pe cînd introducerea unei articulații sferice este echivalentă cu suprimarea a două legături; aceste legături suprimate trebuie să fie compensate de un număr corespunzător de legături exterioare, astfel încît pe ansamblul structurii să fie satisfăcută relația:

$$3c = \ell + r \qquad \text{(VII.9)}$$

unde:

c = numărul porțiunilor rigide care alcătuiesc structura;

ℓ = numărul legăturilor simple interioare;

r = numărul legăturilor simple exterioare.

In plus, este necesar ca legăturile să fie dispuse în așa fel încît să asigure fixarea fiecărei porțiuni și această observație se referă atît la numărul de legături simple de pe fiecare porțiune, cît și la poziția lor. Astfel, dacă la sistemul din fig.VII.11.g reazemul simplu 2 ar fi mutat pe porțiunea din dreapta articulației sferice 3, această porțiune ar avea un surplus de legături, în timp ce porțiunea din stînga articulației 3 s-ar putea roti în jurul axei 1-3. Pe de altă parte, dacă la sistemul din fig.VII.f axa articulației cilindrice 2 ar trece prin capătul 3, porțiunea din dreapta artieu-

laţiei cilindrice s-ar putea roti în jurul axei 2-3. La fel, dacă axa Δ de la sistemul din fig.VII.11.g ar trece prin reazemul simplu 4, s-ar produce rotirea porţiunii din dreapta în jurul acestei axe.

VII.2.3. Calculul grinzilor plane încărcate normal pe planul lor.

a. Determinarea reacţiunilor:

Pentru calculul reacţiunilor care apar în legăturile acestor sisteme, se folosesc cele trei ecuaţii de echilibru static: ecuaţia de proiecţie pe normala la plan şi două ecuaţii de momente în raport cu două axe diferite din plan.

b. Determinarea eforturilor.

Diagramele de eforturi (forţe tăietoare, momente încovoietoare şi momente de torsiune), se determină pe tronsoane, ţinînd cont de convenţiile de semne din fig.VII.11.b. În ceea ce priveşte momentul de torsiune, acesta se consideră pozitiv fiind este reprezentat printr-un vector care intră în secţiune, deci care roteşte în sens orar dacă este privit dinspre extremitatea axei ξ.

Mai trebuie precizat că la grinzi plane cotite, dacă se consideră două secţiuni 1 şi 2 vecine unui nod (fig.VII.12), între eforturile din cele două secţiuni se pot scrie următoarele relaţii de trecere de la o bară la alta:

$$M_2 = M_1 \cos\varphi - M_1^t \sin\varphi \qquad \text{(VII.10)}$$

$$M_2^t = M_1 \sin\varphi + M_1^t \cos\varphi \qquad \text{(VII.11)}$$

În cazul particular $\varphi = 90^0$, relaţiile devin:

$$M_2 = -M_1^t \qquad \text{(VII.12)}$$

$$M_2^t = M_1 \qquad \text{(VII.13)}$$

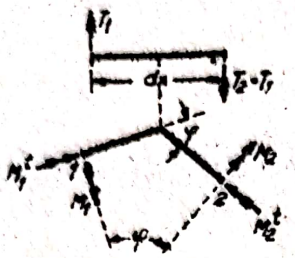


Fig. VII. 12

Ca exemplu este prezentată grinda plană cotită din fig.VII.13.a, care are un capăt complet încastrat și un capăt liber și este încărcată cu sarcina F normală pe planul grinzii și aplicată în capătul liber.

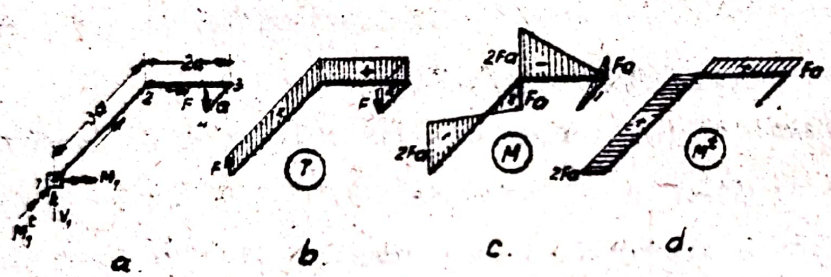


Fig. VII. 13

Din ecuațiile de echilibru ale grinzii se obțin următoarele reacțiuni:

$$V_1 = F; \quad M_1 = -2Fa; \quad M_1^t = 2Fa$$

Apoi se determină diagramele de eforturi:

a) Diagrama de forțe tăietoare (fig.VII.13.b) - este constantă pe toate cele trei bare și are valoarea F.

b) Diagrama de momente încovoietoare (fig.VII.13.c) - are variația liniară pe toate cele trei bare, momentele în secțiunile caracteristice având valorile:

- Bara 4-3: $M_4 = 0$; $M_3 = -Fa$

- Bara 3-2: $M_3 = 0$; $M_2 = -2Fa$

- Bara 2-1: $M_2 = F \cdot a$; $M_2 = -2Fa$

Diagramele de momente încovoietoare se reprezintă pe partea fibrei întinse, cu ordonatele normale pe planul grinzii.

c) Diagrama de momente de torsiune este nulă pe bara 4-3 și constantă pe barele 3-2 ($M^t_{3-2} = Fa$) și 2-1 ($M^t_{2-1} = 2Fa$).

Se constată ușor respectarea corelațiilor dintre diagrama de momente încovoietoare și cea de forțe tăietoare cunoscute de la grinzile drepte, ca și a relațiilor (VII.12) și (VII.13) în nodurile 2 și 3.

In fig.VII.14 este prezentată o grindă curbă legată de teren prin reazemele simple 1,2 și 3 și acționată de sarcini normale pe planul grinzii.

Reacțiunile se determină din ecuații de momente în raport cu axe care unesc cîte două reazeme. Astfel, pentru determinarea reacțiunii V_3 se scrie ecuația de momente în raport cu axa 1-2:

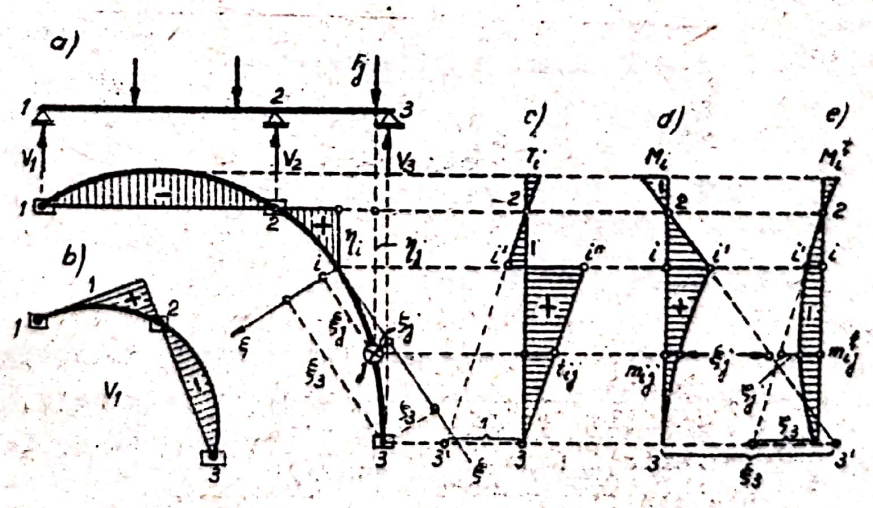


Fig. VII.14

$$V_3 \cdot \eta_3 = \sum_1^3 F_j \cdot \eta_j \qquad \text{(VII.14)}$$

segmentele η măsurîndu-se normal pe axa 1-2 și fiind considerate pozitive cînd sînt sub această axă.

Din relația (VII.14) rezultă:

$$V_3 = \frac{\sum_1^3 F_j \cdot \eta_j}{\eta_3} \qquad \text{(VII.15)}$$

Într-o secțiune i de pe porțiunea 2-3, expresiile eforturilor sînt:

$$T_i = - V_3 + \sum_i^3 F_j \qquad \text{(VII.16.a)}$$

$$M_i = V_3 \xi_3 - \sum_i^3 F_j \cdot \xi_j \qquad \text{(VII.16.b)}$$

$$M_i^t = - V_3 \varphi_3 + \sum_i^3 F_j \varphi_j \qquad \text{(VII.16.c)}$$

Aceste expresii permit determinarea liniilor de influență ale eforturilor T_i, M_i, M_i^t. Considerînd acțiunea unei sarcini $F = 1$ și ținînd cont de expresia (VII.15) a reacțiunii, se obține următoarele expresii pentru trasarea liniilor de influență:

$F = 1$ între 1 și secțiunea i;

$$T_i = - \eta / \eta_3 \quad ; \quad M_i = \eta \xi_3 / \eta_3 \quad ; \quad M_i^t = - \eta \varphi_3 / \eta_3 \qquad \text{(VII.17)}$$

$F = 1$ între secțiunea i și 3 :

$$T_i = - \eta / \eta_3 + 1 \quad ; \quad M_i = \eta \xi_3 / \eta_3 - \xi \quad ; \quad M_i^t = - \eta \varphi_3 / \eta_3 + \varphi \qquad \text{(VII.18)}$$

Se observă că în toate expresiile variabila este η și de aceea liniile de influență sînt reprezentate față de o linie de referință normală pe axa 1-2. Rezultă astfel liniile de influență din fig.VII.14.c,d,e. În fig.VII.14.b este trasată linia de influență pentru reacțiunea V_1.

CAPITOLUL VIII

APLICAREA CALCULULUI MATRICEAL LA REZOLVAREA STRUCTURILOR STATIC DETERMINATE.

VIII.1. Generalităţi.

Utilizarea calculului matriceal în rezolvarea unor probleme tehnice a căpătat o dezvoltare considerabilă, datorită avantajelor oferite de algebra matriceală, atît în ceea ce priveşte exprimarea sintetică şi elegantă a unor modele matematice care în forma obişnuită cuprind un volum mare de relaţii, cît şi prin aceea că permite o organizare a calculului care facilitează programarea în vederea rezolvării cu ajutorul calculatoarelor.

In capitolul de faţă se vor trata cîteva probleme legate de calculul sistemelor static determinate, care se pretează unor exprimări matriceale ce conduc la sistematizări şi generalizări importante.

VIII.2. Elemente de algebră matriceală.

Se prezintă numai cîteva noţiuni, de strictă necesitate pentru problemele dezvoltate în acest capitol, considerîndu-se că elementele generale privind calculul matriceal sînt cunoscute de la disciplina de Matematici.

1. Definirea matricelor.

O matrice este un ansamblu de mărimi aranjate într-o formă dreptunghiulară, după linii şi coloane. Pentru notarea

unei matrice se folosesc următoarele forme:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots a_{mn} \end{Vmatrix}$$

O matrice cu m linii şi n coloane are dimensiunile m x n. Indicii i şi j ai unui element oarecare a_{ij} indică linia şi respectiv coloana din care face parte elementul respectiv.

2. Matrice particulare.

a) Matrice coloană (vector coloană) - este o matrice alcătuită dintr-o singură coloană:

$$B = \begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{Bmatrix} \qquad \text{(VIII.2)}$$

b) Matrice linie (vector linie)-este o matrice alcătuită dintr-o singură linie:

$$C = \{ c_{11} \quad c_{12} \cdots\cdots c_{1n} \} \qquad \text{(VIII.3)}$$

c) Matrice pătrată este o matrice la care numărul de linii este egal cu numărul de coloane (m = n):

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \cdots f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \cdots f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} \cdots f_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{(VIII.4)}$$

d) Matrice diagonală este o matrice pătrată având numai elementele de pe diagonala principală diferite de zero:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & d_{12} & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & 0 & d_{23} \ldots\ldots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots d_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{(VIII.5)}$$

e) Matrice unitară este matricea diagonală care are elementele diagonalei principale egale cu unitatea. Se notează cu E sau I:

$$E = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots\ldots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(VIII.6)}$$

f) Matrice triunghiulară-este matricea pătrată care are toate elementele de sub diagonala principală sau toate elementele de deasupra diagonalei principale egale cu zero:

- matrice superior triunghiulară:

$$T_1 = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \ldots\ldots t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \ldots\ldots t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \ldots\ldots t_{3n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots t_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{(VIII.7.a)}$$

- matrice inferior triunghiulară:

$$T_2 = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & \dots & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{(VIII.7.b)}$$

g) Matrice simetrică-este matricea pătrată la care elementele simetrice față de diagonala principală sînt egale, adică $a_{ij} = a_{ji}$.

h) Matrice antisimetrică-este matricea pătrată la care elementele de pe diagonala principală sînt zero, iar elementele simetrice față de diagonala principală sînt egale și de sens contrar, adică $a_{ij} = - a_{ji}$.

i) Transpusa unei matrice-este matricea ale cărei linii sînt identice cu coloanele matricei inițiale. Astfel, transpusa matricei (VIII.1) este:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{m3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \text{(VIII.8)}$$

Cîteva teoreme legate de matricele transpuse (considerînd cunoscuta şi noţiunea de matrice inversă, care se notează cu A^{-1}):

- Transpusa unei matrice transpuse este egală cu matricea iniţială:

$$(A^T)^T = A \qquad \text{(VIII.9)}$$

- Transpusa sumei a două matrice este egală cu suma transpuselor matricelor respective:

$$(A + B)^T = A^T + B^T \qquad \text{(VIII.10)}$$

- Transpusa unui produs de matrice este egală cu produsul în ordine inversă al transpuselor matricelor respective:

$$(A_1, A_2 \cdots A_n)^T = A_n^T \cdot A_{n-1}^T \cdots A_2^T \cdot A_1^T \qquad \text{(VIII.11)}$$

- Transpusa inversei unei matrice este egală cu inversa transpusei matricei respective:

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \qquad \text{(VIII.12)}$$

- Produsul transpusei unei matrice cu transpusa inversei matricei respective este egal cu matricea unitară:

$$(A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = E^T = E \qquad \text{(VIII.13)}$$

3. Operaţiuni cu matrice.

a) Adunarea şi scăderea matricelor.

Pentru ca două matrice A şi B să poată fi adunate sau scăzute, este necesar ca atît numărul liniilor cît şi al coloanelor primei matrice să fie egal cu numărul liniilor şi respectiv al coloanelor celei de a doua matrice. In aceste condiţii, fiecare element al matricei rezultante este egal cu suma şi respectiv diferenţa elementelor corespunzătoare ale celor două

matrice, adică:

- dacă $C = A + B$ atunci $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (VIII.14.a)
- dacă $D = A - B$ atunci $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ (VIII.14.b)

Proprietăți referitoare la adunarea matricelor:

- Comutativitatea:

$$A + B = B + A \qquad \text{(VIII.15)}$$

- Asociativitatea:

$$A + (B + C) = (A + B) + C \qquad \text{(VIII.16)}$$

- Orice matrice pătrată C se poate descompune în două matrice, una simetrică A și una antisimetrică B.

$$C = A + B \qquad \text{(VIII.17)}$$

elementele matricelor A și B determinîndu-se astfel:

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji}) \qquad \text{(VIII.18.a)}$$

$$b_{ij} = \frac{1}{2}(c_{ij} - c_{ji}) \qquad \text{(VIII.18.b)}$$

b) **Inmulțirea matricelor.**

Pentru ca două matrice A și B să poată fi înmulțite, este necesar ca ele să fie conformabile, adică numărul de coloane al matricei A să fie egal cu numărul de linii al matricei B.

Dacă matricea A are dimensiunile m x p iar matricea B dimensiunile p x n, matricea produs C are dimensiunile m x n, iar elementele acesteia din urmă se determină pe baza relației:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj} \qquad \text{(VIII.19)}$$

Practic, pentru ușurina înmulțirii matricelor ele se așează ca în schema următoare:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots\cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots\cdots b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{p1} & b_{p2} \cdots\cdots b_{pn} \end{bmatrix} \qquad \text{(VIII.20)}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2p} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots a_{mp} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots\cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \cdots\cdots c_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{m1} & c_{m2} \cdots\cdots c_{mn} \end{bmatrix} = C = A\,B$$

elementele matricei C fiind deci egale cu:

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{21} + a_{13}\,b_{31} + \cdots + a_{1p}\,b_{p1} \\ c_{21} &= a_{21}\,b_{11} + a_{22}\,b_{21} + a_{23}\,b_{31} + \cdots + a_{2p}\,b_{p1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \text{(VIII.21)} \\ c_{m1} &= a_{m1}\,b_{11} + a_{m2}\,b_{21} + a_{m3}\,b_{31} + \cdots + a_{mp}\,b_{p1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{mn} &= a_{m1}\,b_{1n} + a_{m2}\,b_{2n} + a_{m3}\,b_{3n} + \cdots + a_{mp}\,b_{pn} \end{aligned}$$

<u>Proprietăţi referitoare la înmulţirea matricelor</u>:

- Inmulţirea matricelor nu este comutativă:

$$A\,B \neq B\,A \qquad \text{(VIII.22)}$$

- Inmulţirea matricelor este distributivă:

$$A(B + C) = AB + AC \qquad \text{(VIII.23)}$$

- Inmulţirea matricelor este asociativă:

$$A\,(BC) = (AB)\,C \qquad \text{(VIII.24)}$$

- Preînmulţirea unei matrice A cu o matrice diagonală D constă în înmulţirea fiecărei linii a matricei A cu elementul corespunzător din matricea D:

$$D_{(n\times n)}A_{(n\times p)} = \begin{bmatrix} d_{11}\ a_{11} & d_{11}\ a_{12} & d_{11}\ a_{13} \cdots d_{11}\ a_{1p} \\ d_{22}\ a_{21} & d_{22}\ a_{22} & d_{22}\ a_{23} \cdots d_{12}\ a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{nn}\ a_{n1} & d_{nn}\ a_{n2} & d_{nn}\ a_{n3} \cdots d_{nn}\ a_{np} \end{bmatrix} \quad \text{(VIII.25)}$$

- Postînmulţirea unei matrice B cu o matrice diagonală D constă în înmulţirea fiecărei coloane a matricei B cu elementul corespunzător din matricea D:

$$B_{(p\times n)}\ D_{(n\times n)} = \begin{bmatrix} d_{11}\ b_{11} & d_{22}\ b_{12} & d_{33}\ b_{13} \cdots & d_{nn}\ b_{1n} \\ d_{11}\ b_{21} & d_{22}\ b_{22} & d_{33}\ b_{23} \cdots & d_{nn}\ b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{11}\ b_{p1} & d_{22}\ b_{p2} & d_{33}\ b_{p3} \cdots & d_{nn}\ b_{pn} \end{bmatrix} \quad \text{(VIII.26)}$$

- Puterile matricelor se determină prin înmulţiri repetate:

$$A^2 = A \cdot A \quad \text{(VIII.27)}$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A \quad \text{şi aşa mai departe.}$$

c) <u>Inversarea matricelor</u>.

Sistemul de ecuaţii algebrice liniare:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad \text{(VIII.28.a)}$$

se poate scrie matriceal:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} \qquad \text{(VIII.28.b)}$$

sau:

$$A\,x = B \qquad \text{(VIII.28.c)}$$

Vectorul x al necunoscutelor se determină astfel:

$$x = A^{-1}\,B \qquad \text{(VIII.29)}$$

A^{-1} se numeşte <u>matrice inversă</u> a matricei A şi operaţiunea de înmulţire cu inversa corespunde cu împărţirea din operaţiile cu numere.

Pentru ca o matrice să poată fi inversată, este necesar ca:

- matricea să fie pătrată;
- matricea să fie nesingulară, adică determinatul matricei să fie diferit de zero.

<u>Proprietăţi legate de inversarea matricelor:</u>

- Inversa unei matrice este unică.
- Produsul dintre matricea inversă şi matricea iniţială este egal cu matricea unitară:

$$A^{-1}\,A = E \qquad \text{(VIII.30)}$$

- Inversa produsului a două matrice este egală cu produsul în ordine inversată al inverselor celor două matrice:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1} \qquad \text{(VIII.31)}$$

- Inversa unei matrice transpuse este egală cu transpusa inversei matricei respective:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \qquad \text{(VIII.32)}$$

- Inversa unei matrice triunghiulare este tot o matrice

triunghiulară.

- Inversa unei matrice simetrice este tot o matrice simetrică.

Determinarea inversei unei matrice.

Inversa unei matrice A se determină pe baza următoarei relații:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot M \qquad \text{(VIII.33)}$$

In relația (VIII.33):

$|A|$ = determinantul matricei de inversat;

M = transpusa matricei alcătuită din cofactorii elementelor a_{ij} ale matricei A; elementele A_{ij} reprezintă deci valorile complementilor algebrici ai elementelor a_{ij} :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \, |a_{ij}|. \qquad \text{(VIII.34)}$$

$|a_{ij}|$ reprezentînd minorul elementului a_{ij}

Dintre metodele practice de inversare a matricelor, cele mai utilizate sînt:

- Metoda Gauss-Jordan;
- Inversarea prin matrice triunghiulare;
- Inversarea prin partiționare.

VIII.3. Determinarea eforturilor secţionale şi a deplasărilor elastice prin metoda matricelor de transfer.

VIII.3.1. Consideraţii generale.

Aşa cum s-a precizat la începutul lucrării, calculul static al structurilor cuprinde, pe lîngă determinarea eforturilor secţionale, şi determinarea deplasărilor elastice (deplasări liniare şi unghiulare), necesare pentru verificarea condiţiilor de rigiditate.

Calculul deplasărilor elastice alcătuieşte un capitol important al Staticii construcţiilor şi nu va fi tratat aici în extenso. În subcapitolul de faţă se va prezenta numai o metodă de rezolvare a sistemelor liniare care permite stabilirea cu uşurinţă atît a eforturilor secţionale, cît şi a deplasărilor elastice, deci un calcul static complet în ceea ce priveşte aspectul de rezistenţă şi cel de rigiditate al structurilor de acest tip (bare drepte cu secţiune plină supuse la încovoiere).

Este vorba de metoda matricelor de transfer, denumită şi metoda reducerii, propusă iniţial de către S.Falk şi dezvoltată ulterior de o serie de alţi cercetători [13], [15] ete.

Înainte de expunerea principiului metodei şi a modului practic de utilizare a acesteia, se fac cîteva precizări în legătură cu o serie de noţiuni care vor fi utilizate în cele ce urmează.

Se consideră sistemul liniar din fig.VIII.1, reprezentînd o grindă continuă cu diverse tipuri de reazeme şi legături interioare şi acţionată de diferite încărcări exterioare.

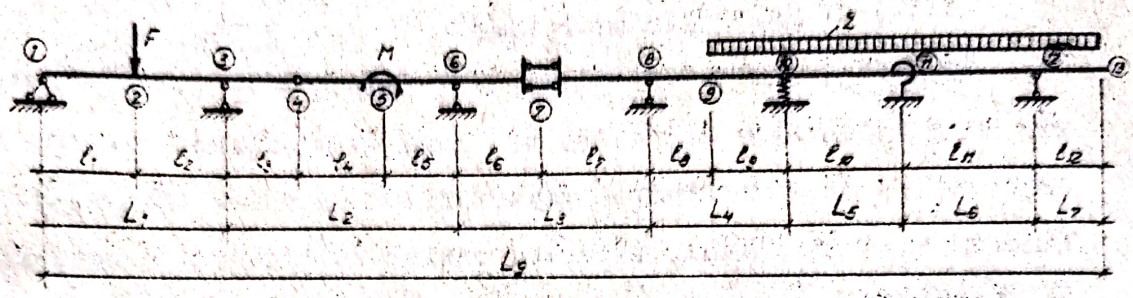


Fig VIII 1

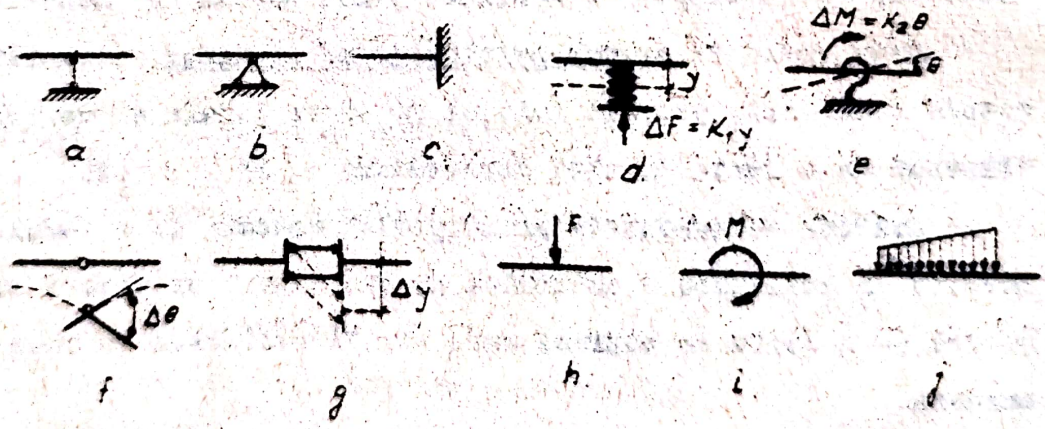


Fig VIII 2

Numerotînd cu 1,2...13 secţiunile caracteristice ale grinzii şi anume punctele în care există legături exterioare sau interioare precum şi punctele de aplicaţie a unor acţiuni (sarcini concentrate, momente concentrate) sau limitele unor încărcări distribuite, vom denumi aceste secţiuni frontiere. Aceste frontiere se caracterizează de fapt prin aceea că introduc în secţiunile respective fie discontinuităţi de încărcare, fie discontinuităţi în deformata grinzii (discontinuităţi de legături, de tipul celor din punctele 4 şi 7, care reprezintă nişte legături incomplete cunoscute din capitolele precedente).

Tipurile de frontiere care pot apare la o structură liniară sînt următoarele (fig.VIII.2):

a) reazem simplu rigid;

b) articulaţie rigidă;

c) încastrare perfectă;

d) reazem tasabil, caracterizat prin faptul că forţa de legătură care apare în acest reazem este proporţională cu deplasarea y care se produce, adică:

$$T = K_1 y \qquad \text{(VIII.35)}$$

e) încastrare elastică, caracterizată prin faptul că momentul care apare în această legătură este proporţional cu rotirea respectivă: $M = K_2 \theta$; (VIII.36)

f) articulaţie interioară, care permite o rotire relativă $\Delta\theta$ între secţiunile vecine;

g) legătura interioară glisantă care permite deplasări relative Δy între secţiunile vecine;

h) punct de aplicaţie al unei sarcini concentrate;

i) punct de aplicaţie al unui moment concentrat;

j) limite ale unor încărcări distribuite.

O a doua noţiune este cea legată de porţiunea dintre două frontiere consecutive, care poartă denumirea de tronson. Astfel, grinda considerată în fig.VIII.1 are un număr de 12 tronsoane, ale căror lungimi au fost notate cu l_i

Un tronson se caracterizează prin faptul că pe toată lungimea sa, atît funcţiile statice (eforturile secţionale) cît şi funcţiile elastice (deplasările elastice) ale încovoierii, au toate lege continuă de variaţie.

Si în sfîrşit, distanţa dintre două reazeme consecutive, pe care în mod obişnuit am denumit-o deschidere, o vom numi travee, pentru a păstra integral nomenclatura utilizată în cadrul acestei metode. Grinda din fig.VIII.1 are şapte travei, ale căror lungimi au fost notate cu L_i.

VIII.3.2. Expresiile generale ale funcţiilor încovoierii la bara dreaptă.

Aşa cum s-a precizat anterior, este vorba atît de funcţiile elastice cît şi de cele statice, care caracterizează starea de eforturi şi deformaţii ce apar într-o bară supusă la încovoiere. Se consideră cazul curent al sistemelor plane încărcate cu sarcini cuprinse în planul lor şi aplicate normal pe axa barei. Pentru o astfel de bară (fig.VIII.3), considerînd drept funcţii ale încovoierii deplasările elastice, eforturile secţionale şi încărcările, acestea se pot grupa astfel:

a) Funcţii elastice:

- Suprafaţa deplasărilor (aria cuprinsă între axa nedeformată şi poziţia axei de formate a barei), care se notează cu Y şi este egală cu:

$$Y = \int_0^{\ell} y \, dx \qquad \text{(VIII.37)}$$

- deplasarea liniară y normală pe axa barei (săgeata);
- deplasarea unghiulară θ a secțiunii (rotirea secțiunii);

b) Funcții statice:

- Momentul încovoietor din secțiune;
- Forța tăietoare din secțiune;
- Încărcările exterioare (momente concentrate, sarcini concentrate, sarcini distribuite uniform, liniar, parabolic etc.).

Intre aceste funcții elastice și statice se pot stabili anumite relații, dintre care unele sînt cunoscute de la cursul de Rezistența materialelor și anume:

- ecuația diferențială de ordinul II a fibrei medii deformate la încovoiere:

$$EI_{(x)} \, y''(x) = M_{(x)} \qquad \text{(VIII.38)}$$

utilizată în mod curent pentru determinarea deplasărilor elastice la barele încovoiate (procedeul integrării directe sau procedeul grinzii conjugate);

- ecuația diferențială de ordinul IV a fibrei medii deformate la încovoiere:

$$\left[EI_{(x)} \, y''(x) \right]'' = F_{(x)} \qquad \text{(VIII.39)}$$

utilizată de asemenea pentru calculul deplasărilor elastice ale barelor încovoiate, în forma cunoscută sub denumirea de metoda parametrilor inițiali sau metoda Krîlov.

In cele ce urmează se va prezenta o cale generală de stabilire a relațiilor dintre funcțiile elastice și statice ale încovoierii, cunoscută sub denumirea de metoda momentelor fac-

toriale, propusă de regretatul prof.A.Sesan [22].

Principiul metodei constă în utilizarea unui operator care transformă relaţiile diferenţiale cu coeficienţi constanţi dintre funcţiile încovoierii în relaţii algebrice şi permite astfel scrierea directă a oricărei funcţii a încovoierii, în raport cu alte funcţii elastice sau statice. Acest operator, numit moment factorial, are forma generală:

$$M^{(i)} = \frac{A \cdot d^n}{n!} \qquad \text{(VIII.40)}$$

unde:

A = acţiune generalizată (deplasare elastică, efort secţional, încărcare exterioară);

d = braţul (distanţa de la locul acţiunii pînă la secţiunea în care se scrie momentul factorial de un anumit ordin i)

n = exponent a cărui valoare se va preciza mai departe şi al cărui factorial apare totdeauna la numitorul expresiei operatorului.

Plecînd de la expresia momentului încovoietor care este dată de produsul dintre o sarcină concentrată (sau mai multe) şi o distanţă la puterea 1 şi care reprezintă momentul factorial de ordinul I, toate celelalte funcţii ale încovoierii (elastice şi statice) pot fi considerate momente factoriale (elastice sau statice) de ordin mai mare sau mai mic decît 1, aşa cum este indicat în tabelul VIII.1. In acest tabel, toate funcţiile încovoierii sînt prezentate ca funcţii elastice, transformarea celor statice efectuîndu-se prin intermediul rigidităţii la încovoiere EI.

Tot în tabelul VIII.1 au fost trecute şi diferenţialele deplasării liniare y care corespund diferitelor funcţii ale în-

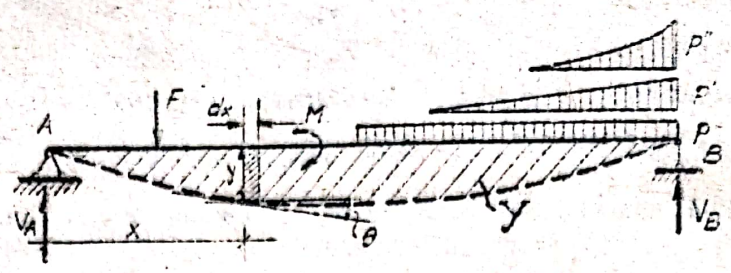


Fig. VIII.3

Tabel VIII.1

	Funcţii elastice			Funcţii statice (transformate)				
Funcţia	y	γ	θ	$\frac{M}{EI}$	$\frac{T(F)}{EI}$	$\frac{q}{EI}$	$\frac{q'}{EI}$	$\frac{q''}{EI}$
Diferenţiala	$\int y dx$	γ	γ'	γ''	γ'''	γ^{IV}	γ^{V}	γ^{VI}
Momentul factorial	M_ρ^{IV}	M_ρ^{III}	M_ρ^{II}	M_s^{I}	M_s^{0}	M_s^{-I}	M_s^{-II}	M_s^{-III}
	Momente factoriale elastice			Momente factoriale statice				

covoierii, pe baza relaţiilor diferenţiale ce se pot scrie între aceste elemente.

Pentru diferenţiere, momentele factoriale elastice se notează cu M_ρ^i, iar cele statice cu M_s^i.

Generalizînd modul de determinare a momentului încovoietor, orice moment factorial de un anumit ordin i într-o secţiune oarecare a barei se va calcula ca sumă algebrică a momentelor factoriale de ordinul respectiv ale acţiunilor generalizate din stînga sau din dreapta secţiunii, adică:

$$M_{(x)}^i = \sum_0^x \pm M^i = \sum_0^{x'} \left(\mp M^i\right) \qquad \text{(VIII.41)}$$

In aceste expresii, acţiunile generalizate care se iau în considerare sînt cele ale ordin mai mic sau cel mult egal cu ordinul momentului factorial care se calculează şi reprezintă:

- acţiuni generalizate (deplasări elastice şi eforturi secţionale sau acţiuni) din origine;
- acţiuni generalizate concentrate (sarcini concentrate, momente concentrate, reacţiuni din reazemele intermediare, precum şi discontinuităţi de deformaţii cum sînt cele care apar în legătură de tipul celor din fig.VIII.2.f, g);
- acţiuni distribuite (sarcini distribuite uniform, liniar, parabolic etc.).

Transformarea tuturor acestor acţiuni generalizate, care reprezintă momente factoriale de diferite ordine k în momente factoriale de ordinul i corespunzător funcţiei încovoierii pe care o calculăm, se face pe baza relaţiei generale:

$$M^i = \frac{M^k \, d^{(i-k)}}{|i-k| \; !} \qquad \text{(VIII.42)}$$

unde:

M^i = funcţia încovoierii care se calculează;

M^k = acţiunea generalizată considerată;

d = distanţa de la secţiunea în care se găseşte acţiunea generalizată la secţiunea în care se calculează funcţia încovoierii;

$|i-k|!$ - reprezentînd factorialul diferenţei dintre ordinul momentului factorial corespunzător funcţiei care se calculează şi ordinul momentului factorial corespunzător acţiunii generalizate, poate fi:

$(i-k)\,!$ cînd $i > k$;

$\frac{1}{(k-i)\,!}$ cînd $i < k$, deci cînd se face trecerea inversă (de la o funcţie de ordin mai mare la una de ordin mai mic).

Dacă transformarea se face între funcţii elastice şi statice, intervine, evident şi caracteristică elastică EI şi anume:

- cînd se face trecerea de la o funcţie statică la una elastică:

$$M_{\rho}^{i} = \frac{M_{s}^{k}\, d^{(i-k)}}{(i-k)\,!} \cdot \frac{1}{EI} \qquad \text{(VIII.43.a)}$$

- cînd se face trecerea de la o funcţie elastică la una statică (trecere inversă);

$$M_{s}^{i} = \frac{M_{\rho}^{k}\, d^{(i-k)}}{|i-k|\,!}\, EI = \frac{M_{\rho}^{k}\,(k-i)\,!}{d^{(k-i)}}\, EI \qquad \text{(VIII.43.b)}$$

Regula de semne pentru momentele factoriale elastice este următoarea:

- pentru toate acţiunile generalizate (încărcări, reacţiuni, deplasări liniare), momentele factoriale sînt pozitive atunci cînd aceste acţiuni produc săgeţi dirijate spre axa Oy pozitivă, adică în jos (fig.VIII.4.a);

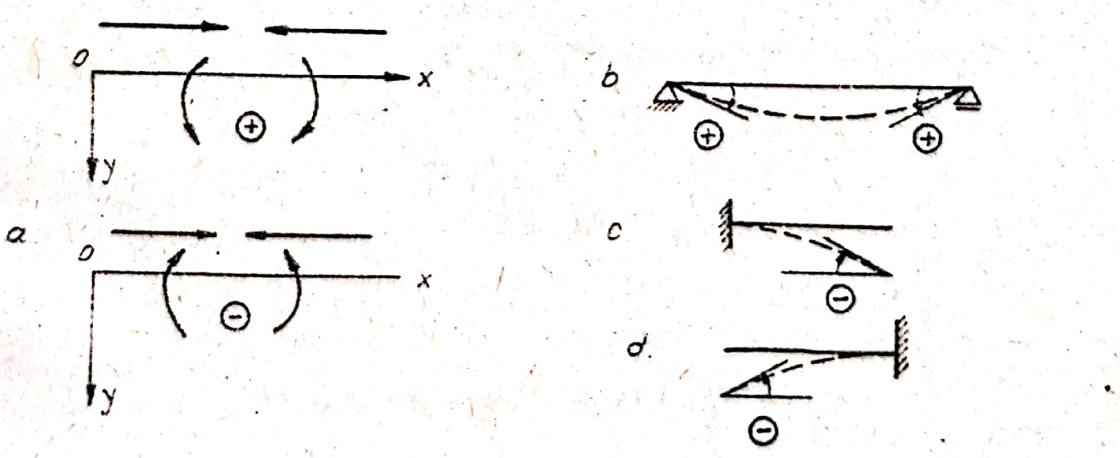


Fig. VIII.4

- pentru rotiri, semnele momentelor factoriale sînt pozitive cînd săgeţile corespunzătoare se măsoară în sensul axei Oy pozitive, adică în jos.

In fig.VIII.5 sînt indicate semnele momentelor factoriale elastice pentru diferite acţiuni generalizate la o bară simplu rezemată, atunci cînd se calculează anumite funcţii ale încovoierii într-o secţiune oarecare, făcînd suma momentelor factoriale din stînga sau din dreapta secţiunii.

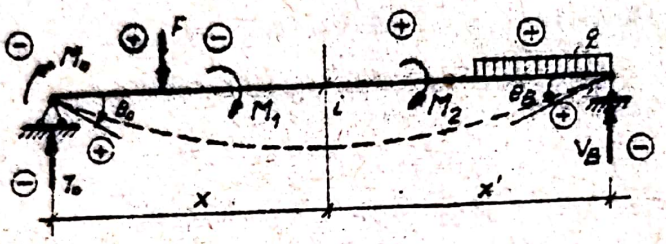


Fig. VIII.5.

Pentru momentele factoriale statice (momente încovoietoare, forţe tăietoare) regulele de semne sînt cele obişnuite.

Se consideră un tronson o-1 dintr-o bară dreaptă încovoiată (fig.VIII.6.), încărcat cu o sarcină oarecare q(x) de variaţie continuă. Deplasările elastice şi eforturile secţionale din secţiunea 1 se vor scrie în funcţii de acţiunile generalizate din stînga (deplasării elastice şi eforturi secţionale din O şi acţiunea de pe porţiunea o-1), folosind momentele factoriale, după cum urmează (se

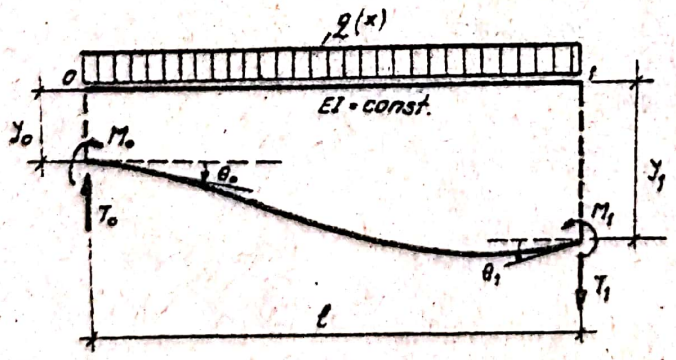


Fig. VIII.6

consideră cazul barei cu secţiunea constantă):

$$y_1 = M^{III}_{s(1)} = \sum_0^1 M^{III}_s = y_0 + \theta_0 \ell - \frac{M_0 \ell^2}{2!EI} - \frac{T_0 \ell^3}{3!EI} + \phi_1$$

$$\theta_1 = M^{II}_{s(1)} = \sum_0^1 M^{II}_s = \theta_0 - \frac{M_0 \ell}{1!EI} - \frac{T_0 \ell^2}{2!EI} + \phi_2$$

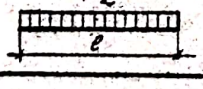
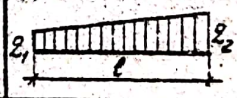
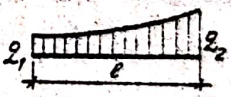
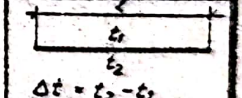
$$M_1 = M^{I}_{s(1)} = \sum_0^1 M^{I}_s = M_0 + T_0 \ell - \phi_3 \qquad \text{(VIII.44)}$$

$$T_1 = M^{0}_{s(1)} = \sum_0^1 M^{0}_s = T_0 - \phi_4$$

In relaţiile (VIII.44), termenii $\phi, \ldots \phi_4$ depind de tipul încărcării de pe tronsonul 0-1 şi valorile lor se determină ca momente factoriale de ordinul III...0 ale încărcărilor respective.

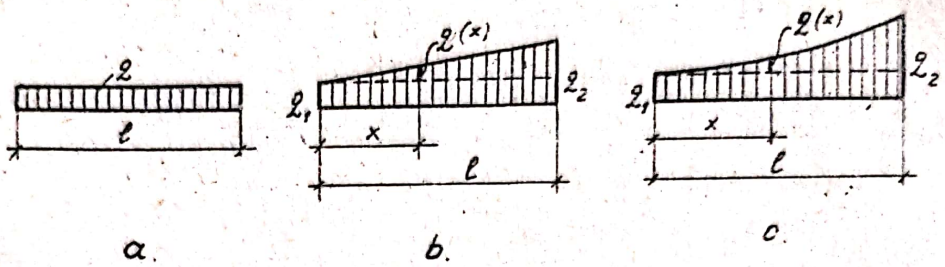
In tabelul VIII.2 sînt indicate valorile acestor termeni pentru cazurile curente de încărcări ce pot interveni în construcţii.

Tabel VIII.2

Acţiuni / Termeni ϕ_i	q 	q_1 q_2 	q_1 q_2 	t_1 t_2 $\Delta t = t_2 - t_1$ 
ϕ_1	$\frac{q\ell^4}{24EI}$	$\frac{(4q_1+q_2)\ell^4}{120EI}$	$\frac{(14q_1+q_2)\ell^4}{360EI}$	$\frac{\alpha_t \Delta t}{h} \cdot \frac{\ell^2}{2}$
ϕ_2	$\frac{q\ell^3}{6EI}$	$\frac{(3q_1+q_2)\ell^3}{24EI}$	$\frac{(9q_1+q_2)\ell^3}{60EI}$	$\frac{\alpha_t \Delta t}{h}\ell$
ϕ_3	$\frac{q\ell^2}{2}$	$\frac{(2q_1+q_2)\ell^2}{6}$	$\frac{(5q_1+q_2)\ell^2}{12}$	0
ϕ_4	$q\ell$	$\frac{(q_1+q_2)\ell}{2}$	$\frac{(2q_1+q_2)\ell}{3}$	0

Deducerea termenilor din tabelul VIII.2 este simplă dacă se utilizează metoda momentelor factoriale:

a) <u>Pentru sarcină distribuită uniform</u>: (fig.VIII.7.a):



a. b. c.

Fig. VIII.7.

$$\phi_1 = M^{III}_{s(1)} = \frac{q\ell^4}{4!EI} = \frac{q\ell^4}{24EI}$$

$$\phi_2 = M^{II}_{s(1)} = \frac{q\ell^3}{3!EI} = \frac{q\ell^3}{6EI}$$

$$\phi_3 = M^{I}_{s(1)} = \frac{q\ell^2}{2!} = \frac{q\ell^2}{2} \qquad \text{(VIII.45)}$$

$$\phi_4 = M^{0}_{s(1)} = \frac{q\ell^1}{1!} = q\ell$$

b) <u>Pentru sarcina distribuită liniar</u> (fig.VIII.7.b).

Descompunînd sarcina într-o încărcare uniform distribuită de intensitate q_1 și una triunghiulară, se vede că într-o secțiune oarecare x intensitatea încărcării triunghiulare are legea de variație:

$$q(x) = (q_2 - q_1)\frac{x}{\ell}$$

deci: $q'(x) = \frac{q_2 - q_1}{\ell}$ (funcția care corespunde încărcării distribuite liniar conform tabelului VIII.1).

Suprapunînd efectele, se obţine:

$$\varphi_1 = M^{III}_{\rho(1)} = \frac{q_1 \ell^4}{4!EI} + \frac{q'(x)\ell^5}{5!EI} = \frac{q_1 \ell^4}{24EI} + \frac{q_2 - q_1}{\ell} \cdot \frac{\ell^5}{120EI} =$$

$$= \frac{(4q_1 + q_2)\ell^4}{120EI}$$

$$\varphi_2 = M^{II}_{\rho(1)} = \frac{q_1 \ell^3}{3!EI} + \frac{q'(x)\ell^4}{4!EI} = \frac{q_1 \ell^3}{6EI} + \frac{q_2 - q_1}{\ell} \cdot \frac{\ell^4}{24EI} =$$

$$= \frac{(3q_1 + q_2)\ell^3}{24EI} \qquad \text{(VIII.46)}$$

$$\varphi_3 = M^{I}_{s(1)} = \frac{q_1 \ell^2}{2} + \frac{(q_2 - q_1)\cdot\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{3} = \frac{(2q_1 + q_2)\ell^2}{6}$$

$$\varphi_4 = M^{o}_{s(1)} = q_1 \ell + (q_2 - q_1)\frac{\ell}{2} = \frac{(q_1 + q_2)\ell}{2}$$

e) <u>Pentru sarcină distribuită parabolic</u> (fig.VIII.7.e).

Încărcarea se descompune în una uniform distribuită de intensitate q_1 şi una parabolică, a cărei lege de variaţii este o relaţie de gradul doi:

$$q(x) = A\,x^2 + B\,x + C$$

constantele A, B, C deducîndu-se astfel:

$$x = 0\ ,\ q(x) = 0 \quad \text{deci } C = 0$$

$$x = 0\ ,\ q'(x) = 2A\,x + B = 0 \quad \text{deci } B = 0$$

$$x = \ell\ ,\ q(\ell) = q_2 - q_1 = A\ell^2 \quad \text{deci } A = \frac{q_2 - q_1}{\ell}$$

Rezultă prin urmare:

$$q(x) = \frac{q_2 - q_1}{\ell}\,x^2$$

şi funcţia $q''(x)$ care corespunde încărcării parabolice (vezi tabelul VIII.1), are expresia:

$$q''(x) = \frac{2(q_2 - q_1)}{\ell^2}$$

Suprapunînd efectele, obţinem:

$$\phi_1 = M^{III}_{S(1)} = \frac{q_1 \ell^4}{4!EI} + \frac{q''(x)\ell^6}{6!EI} = \frac{q_1 \ell^4}{24EI} + \frac{2(q_2-q_1)}{\ell^2} \cdot \frac{\ell^6}{720EI} =$$

$$= \frac{(14q_1 + q_2)\ell^4}{360EI}$$

$$\phi_2 = M^{II}_{S(1)} = \frac{q_1 \ell^3}{3!EI} + \frac{q''(x)\ell^5}{5!EI} = \frac{q_1 \ell^3}{6EI} + \frac{2(q_2-q_1)}{\ell^2} \cdot \frac{\ell^5}{120EI} =$$

$$= \frac{(9q_1 + q_2)\ell^3}{60EI} \qquad \text{(VIII.47)}$$

$$\phi_3 = M^{I}_{S(1)} = \frac{q_1 \ell^2}{2} + \frac{(q_2-q_1)\ell}{3} \cdot \frac{\ell}{4} = \frac{(5q_1 + q_2)\ell^2}{12}$$

$$\phi_4 = M^{0}_{S(1)} = q_1 \ell + \frac{(q_2-q_1)\ell}{3} = \frac{(2q_1 + q_2)\ell}{3}$$

d) <u>Pentru cazul barei supuse unei variaţii neuniforme de temperatură, expresiile termenilor</u> ϕ_1 şi ϕ_2 reprezintă săgeata şi respectiv rotirea pentru o bară de lungime liberă în 1 şi încastrată în 0. In expresiile lui ϕ_1 şi ϕ_2:

$\Delta t = t_2 - t_1$ (diferenţa de temperatură);

α_t = coeficientul de dilatare termină liniară;

h = înălţimea secţiunii barei.

ϕ_3 şi ϕ_4 sînt nule în acest caz, întrucît reprezintă eforturi secţionale şi variaţiile de temperatură nu produc eforturi în sistemele static determinate.

VIII.3.3. Exprimarea matricească a stărilor de eforturi şi deformaţii la barele drepte.

1) Relaţii de calcul pentru un tronson.

Relaţiile (VIII.44) reprezintă expresiile eforturilor şi deplasărilor elastice din capătul din dreapta al tronsonului o-1, în funcţie de eforturile şi deplasările elastice din capătul din stînga al aceluiaşi tronson şi de încărcările distribuite de pe lungimea tronsonului.

Adăugînd la expresiile (VIII.44) relaţia banală $1 \equiv 1$, cele cinci ecuaţii se pot scrie matriceal astfel:

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ell & -\ell^2/2EI & -\ell^3/6EI & \phi_1 \\ 0 & 1 & -\ell/EI & -\ell^2/2EI & \phi_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ell & -\phi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\phi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_o \\ \theta_o \\ M_o \\ T_o \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \text{(VIII.48.a)}$$

sau:

$$S_1 = \overline{C}_o' \cdot S_o \qquad \text{(VIII.48.b)}$$

unde:

S_o şi S_1 reprezintă matrice coloană care cuprind mărimile funcţiilor încovoierii (eforturi şi deplasări elastice) din originea tronsonului şi respectiv capătul 1 (o secţiune oarecare a barei); întrucît aceste mărimi definesc deci stările de eforturi şi deformaţii din nişte secţiuni ale barei, S_o şi S_1 se numesc "vectori de stare" din origine şi respectiv dintr-o secţiune a barei.

$\overline{C}_o'$ este o matrice pătrată care face legătura dintre

vectorul de stare S_0 dintr-un capăt al tronsonului(originea) şi vectorul de stare S_1 din celălalt capăt al tronsonului; această matrice se numeşte "matrice de transfer de tronson" şi cei doi indici se referă la secţiunile între care se face trecerea prin intermediul matricei de transfer de acest tip.

2) Relaţia de trecere peste o frontieră.

In subcapitolul VIII.3.1. au fost analizate tipurile de frontiere care pot apare pe parcursul unei bare încovoiate şi caracteristicile acestor frontiere.

Se consideră două tronsone dintr-o bară, separate printr-o frontieră complexă (fig.VIII.8), în care ar fi concentrate tipurile principale de frontiere simple şi anume: o sarcină concentrată ΔF (care poate fi şi o reacţiune dintr-un reazem rigid) un moment concentrat ΔM (care poate fi şi un moment reactiv dintr-o încastrare perfectă), un reazem tasabil în care apare o reacţiune proporţională cu deplasarea $(K_1 y_1)$, o încastrare elastică în care apare un moment proporţional cu rotirea $(K_2 \theta_1)$, o articulaţie în care se produce o rotire relativă $\Delta\theta$ şi o legătură incompletă în care se produce o deplasare relativă Δy. In acest caz, între eforturile şi deplasările elastice din cele două secţiuni 1 şi 2 din stînga şi dreapta frontierei, se pot scrie următoarele relaţii evidente:

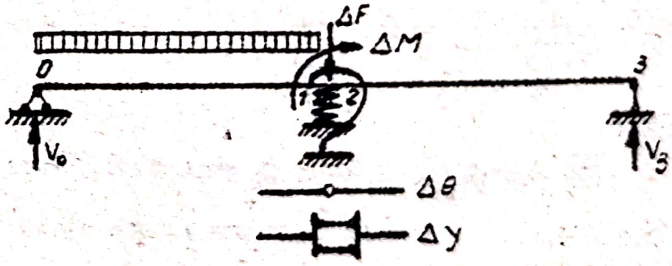


Fig. VIII.8

$$y_2 = y_1 + \Delta y$$
$$\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta \qquad \text{(VIII.49.a)}$$
$$M_2 = M_1 + K_2\theta_1 + \Delta M$$
$$T_2 = T_1 + K_1 y_1 + \Delta F$$

Adăugînd şi aici relaţia banală $1 \equiv 1$, expresiile (VIII.49.a) se pot scrie matriceal astfel:

$$\begin{Bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta\theta \\ 0 & K_2 & 1 & 0 & \Delta M \\ K_1 & 0 & 0 & 1 & \Delta F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \text{(VIII.47.b)}$$

sau:

$$S_2 = \dot{c}_i^{\,i} \cdot S_1 \qquad \text{(VIII.49.c)}$$

unde:

S_1 şi S_2 reprezintă vectorii de stare din secţiunile 1 şi 2 din stînga şi dreapta frontierei;

$\dot{c}_i^{\,i}$ este o matrice pătrată care permite trecerea de la starea de eforturi şi deformaţii din secţiunea 1 la starea de eforturi şi deformaţii din secţiunea 2 şi se numeşte "matrice de transfer de frontieră"; cei doi indici se referă la secţiunile vecine frontierei, între care se face trecerea prin intermediul matricei de transfer de acest tip.

Evident că în cazurile practice, apar frontiere simple şi în consecinţă în matricele de transfer de frontieră o parte din termenii ultimei coloane sînt nuli, rămînînd numai termenii care caracterizează frontiera respectivă. În cazul reazemelor rigide, vor dispare de asemenea termenii $K_1 y_1$ şi respectiv $K_2\theta_1$.

Pentru grinda din fig.VIII.8, care are două tronsoane 0-1 și 2-3 și frontiera analizată mai sus, se pot scrie deci următoarele relații matriceale de trecere (numite și relații de "reducere"), utilizînd matricele de transfer de tronson și de frontieră:

$$S_1 = \bar{\mathcal{C}}_0^1 \cdot S_0$$

$$S_2 = \dot{\mathcal{C}}_1^2 \cdot S_1$$

$$S_3 = \bar{\mathcal{C}}_2^3 \; S_2$$

Sau, plecînd de la ultima relație și făcînd înlocuirile corespunzătoare:

$$S_3 = \bar{\mathcal{C}}_2^3 \cdot S_2 = \bar{\mathcal{C}}_2^3 \cdot \dot{\mathcal{C}}_1^2 \cdot S_1 = \bar{\mathcal{C}}_2^3 \cdot \dot{\mathcal{C}}_1^2 \cdot \bar{\mathcal{C}}_0^1 \cdot S_0$$

Se obține astfel o relație directă între vectorul de stare din capătul din dreapta al barei și vectorul de stare din origine:

$$S_3 = \bar{\mathcal{C}}_2^3 \cdot \dot{\mathcal{C}}_2^1 \cdot \bar{\mathcal{C}}_0^1 \cdot S_0 = \mathcal{C}_0^3 \cdot S_0 \qquad \text{(VIII.50)}$$

Matricea $\mathcal{C}_0^3$ care permite trecerea de la vectorul de stare din origine la vectorul de stare din secțiunea 3 (care se poate considera capătul din dreapta al unei travei în cazul în care frontiera nu este de natura unui reazem care separă două travei), se numește "<u>matrice de transfer de travee</u>". Se vede că această matrice rezultă dintr-un produs de matrice de tronson și de frontieră:

$$\mathcal{C}_0^3 = \bar{\mathcal{C}}_2^3 \cdot \dot{\mathcal{C}}_1^2 \cdot \bar{\mathcal{C}}_0^1$$

sau, în general:

$$\mathcal{C}_0^n = \mathcal{C}_n^{n-1} \cdot \mathcal{C}_{n-1}^{n-2} \cdots \mathcal{C}_1^2 \cdot \mathcal{C}_0^1 \qquad \text{(VIII.51)}$$

Rezultă că se ppate scrie deci direct vectorul de stare (eforturi și deplasări elastice) din orice secțiune i a unei bare încovoiate, în funcție de vectorul de stare din origine, printr-o relație matriceală de forma:

$$S_i = \mathcal{Z}_o^i \cdot S_0 \qquad \text{(VIII.52)}$$

matricea de transfer $\mathcal{Z}_o^i$ determinîndu-se ca un produs de matrice de transfer de tronson și de frontieră, ceea ce va conduce la o matrice superior triunghiulară de dimensiuni 5 x 5, avînd forma generală:

$$\mathcal{Z}_o^i = \begin{bmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} \\ 0 & 1 & t_{23} & t_{24} & t_{25} \\ 0 & 0 & 1 & t_{34} & t_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(VIII.53)}$$

In felul acesta se pot calcula eforturile secționale (diagramele de eforturi), precum și deplasările elastice (săgeți și rotiri) în numărul dorit de secțiuni ale unei bare drepte încovoiate, efectuîndu-se astfel un calcul static complet:

Ceea ce trebuie cunoscut în prealabil, este vectorul de stare din origine S_0. Elementele acestuia se stabilesc din condițiile de rezemare ale barei. Astfel, dacă se scrie relația de trecere între vectorul de stare din origine și vectorul de stare corespunzător capătului din dreapta al barei prin intermediul matricei de transfer corespunzătoare, se obține în general:

$$\begin{Bmatrix} y_n \\ \theta_n \\ M_n \\ T_n \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} \\ 0 & 1 & t_{23} & t_{24} & t_{25} \\ 0 & 0 & 1 & t_{34} & t_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0 \\ \theta_0 \\ M_0 \\ T_0 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \text{(VIII.54)}$$

ceea ce conduce la următoarele ecuaţii:

$$\begin{aligned} y_n &= y_0 + t_{12}\,\theta_0 + t_{13}\,M_0 + t_{14}\,T_0 + t_{15} \\ \theta_n &= \theta_0 + t_{23}\,M_0 + t_{24}\,T_0 + t_{25} \\ M_n &= M_0 + t_{34}\,T_0 + t_{35} \\ T_n &= T_0 + t_{45} \end{aligned} \qquad \text{(VIII.55)}$$

relaţii în care se introduc condiţiile de rezemare ale capetelor barei şi din care rezultă elementele vectorului de stare din origine, aşa cum se va vedea la exemplul prezentat în continuare.

Exemplu de calcul.

Se vor determina stările de eforturi şi deformaţii pentru secţiunile 0, 1, 2, 3 şi 4 ale grinzii simplu rezemate din fig. VIII.9.

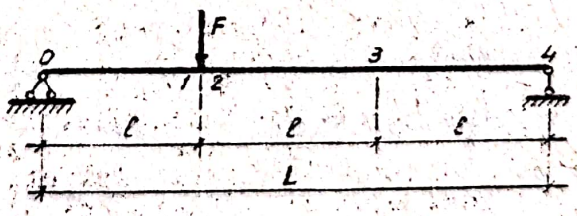


Fig VIII.9

Grinda are trei tronsoane de lungimi egale (ℓ) şi o frontieră în dreptul sarcinii concentrate F.

- Matricele de transfer de tronsoane.

Matricele de transfer ale celor trei tronsoane sînt identice şi au forma matricei generale din relaţia (VIII.48.a), pentru cazul particular cînd lipsesc încărcările de pe lungimea tronsonului ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$), adică:

$$\bar{\mathcal{C}}' = \bar{\mathcal{C}}_2^3 = \bar{\mathcal{C}}_3^4 = \begin{bmatrix} 1 & & -\ell^2/2EI & -\ell^3/6EI & 0 \\ 0 & 1 & -\ell/EI & -\ell^2/2EI & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matricea de transfer de frontieră rezultă ca un caz particular al matricei generale din relaţia (VIII.49.b), pentru cazul cînd singura discontinuitate este sarcina concentrată ($\Delta F = F$), adică:

$$\dot{\mathcal{C}}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matricea de transfer de travee se determină pe baza relaţiei (VIII.51):

$$\mathcal{C}_0^4 = \bar{\mathcal{C}}_3^4 \cdot \bar{\mathcal{C}}_2^3 \cdot \dot{\mathcal{C}}_1^2 \cdot \bar{\mathcal{C}}_0^1$$

şi făcînd produsul celor patru matrice rezultă:

$$\mathcal{T}_o^4 = \begin{bmatrix} 1 & 3\ell & -9\ell^2/2EI & -9\ell^3/2EI & 4F\ell^3/3EI \\ 0 & 1 & -3\ell/EI & -9\ell^2/2EI & 2F\ell^2/EI \\ 0 & 0 & 1 & 3\ell & -2F\ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(VIII.56)}$$

Folosind relaţia (VIII.52), putem scrie deoît relaţia dintre vectorul de stare din origine (capătul 0) şi vectorul de stare din capătul din dreapta al grinzii:

$$S_4 = \mathcal{T}_o^4 . S_o$$

sau, conform relaţiei (VIII.54):

$$\begin{Bmatrix} y_4 \\ \theta_4 \\ M_4 \\ T_4 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} \\ 0 & 1 & t_{23} & t_{24} & t_{25} \\ 0 & 0 & 1 & t_{34} & t_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_o \\ \theta_o \\ M_o \\ T_o \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{(VIII.57)}$$

- <u>Determinarea elementelor vectorului de stare din origine</u>:

- Din modul de rezemare a capătului 0, rezultă direct:

$$y_o = 0$$

$$M_o = 0$$

- Folosind şi condiţiile de rezemare a capătului 4:

$$y_4 = 0$$

$$M_4 = 0$$

Şi introducînd toate aceste patru condiţii în relaţia (VIII.57), rezultă prin rezolvarea relaţiei matriceale respective, patru ecuaţii din care utilizăm prima şi a treia:

$$0 = t_{12}\,\theta_0 + t_{14}\,T_0 + t_{15}$$

$$0 = t_{34}\,T_0 + t_{35}$$

Din aceste ecuaţii se obţine:

$$T_0 = -\frac{t_{35}}{t_{34}}$$

$$\theta_0 = -\frac{t_{15}}{t_{12}} + \frac{t_{35}\cdot t_{14}}{t_{34}\cdot t_{12}}$$

Înlocuind valorile termenilor t_{ij} corespunzători din matricea $\mathcal{C}_c^{\ell}$ - relaţia (VIII.56) - se obţine:

$$T_0 = \frac{2F\ell}{3\ell} = \frac{2}{3}F$$

$$\theta_0 = \frac{\frac{A}{3}\frac{F\ell^3}{EI}}{3\ell} + \frac{(-2F\ell)(-\frac{9\ell^3}{2EI})}{3\ell\cdot 3\ell} = \frac{5F\ell^2}{9EI}$$

Deci, vectorul de stare din organic are următoarea alcătuire:

$$S_0 = \begin{Bmatrix} y_0 \\ \theta_0 \\ M_0 \\ T_0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 5F\ell^2/9EI \\ 0 \\ 2F/3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Acum se pot scrie din aproape în aproape vectorii de stare din toate secţiunile propuse:

a) $S_1 = \overline{\overline{C}}_0 \cdot S_0$

sau:

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ell & -\ell^2/2EI & -\ell^3/6EI & 0 \\ 0 & 1 & -\ell/EI & -\ell^2/2EI & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 5F\ell^2/9EI \\ 0 \\ 2F/3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

din care rezultă:

$$y_1 = \frac{5F\ell^3}{9EI} - \frac{2F\ell^3}{18EI} = \frac{4F\ell^3}{9EI}$$

$$\theta_1 = \frac{5F\ell^2}{9EI} - \frac{2F\ell^2}{6EI} = \frac{2F\ell^2}{9EI}$$

$$M_1 = \frac{2F\ell}{3}$$

$$T_1 = \frac{2F}{3}$$

b) $S_2 = \overline{C}_1^{\ell} \cdot S_1$

sau:

$$\begin{Bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4F\ell^3/9EI \\ 2F\ell^2/9EI \\ 2F\ell/3 \\ 2F/3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

din care rezultă:

$$y_2 = \frac{4F\ell^3}{9EI}$$

$$\theta_2 = \frac{2F\ell^2}{9EI}$$

$$M_2 = \frac{2}{3}F\ell$$

$$T_2 = \frac{2}{3}F - F = -\frac{F}{3}$$

c) $S_3 = \mathcal{T}_2^3 \cdot S_2$

sau:

$$\begin{Bmatrix} y_3 \\ \theta_3 \\ M_3 \\ T_3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ell & -\ell^2/2EI & -\ell^3/6EI & 0 \\ 0 & 1 & -\ell/EI & -\ell^2/2EI & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4F\ell^3/9EI \\ 2F\ell^2/9EI \\ 2F\ell/3 \\ -F/3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

din care rezultă:

$$y_3 = \frac{7F\ell^3}{18EI}$$

$$\theta_3 = -\frac{5F\ell^2}{18EI}$$

$$M_3 = \frac{F\ell}{3}$$

$$T_3 = -\frac{F}{3}$$

d) $S_4 = \mathcal{T}_3^4 \cdot S_4$

Făcînd înlocuirile și calculele necesare, se obține:

$$y_4 = 0$$

$$\theta_4 = -\frac{4F\ell^2}{9EI}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$M_4 = 0$$

$$T_4 = -\frac{F}{3}$$

Se determină astfel stările de eforturi şi deformaţiile din toate secţiunile caracteristice propuse.

VIII.4. Folosirea matricelor de influenţă.

VIII.4.1. Consideraţii generale.

Aşa cum s-a arătat în capitolele precedente, orice reacţiune sau efort dintr-o secţiune i a unei structuri acţionată de un grup de sarcini $F_1, F_2, \ldots, F_n$, se poate scrie prin suprapunerea de efecte:

$$S_i = s_{i1}F_1 + s_{i2}F_2 + \ldots + s_{in}F_n = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}F_k \qquad \text{(VIII.104)}$$

În relaţia (II.104) s_{ik} reprezintă coeficienţii de influenţă, având semnificaţie de eforturi (reacţiuni) dintr-o anumită secţiune i a structurii, produse de o sarcină unitară care acţionează în diferite puncte k ale aceleiaşi structuri.

Totalitatea relaţiilor de tipul (VIII.104) necesare pentru determinarea eforturilor (reacţiunilor) dintr-un număr de n secţiuni ale unei structuri produse de un grup de sarcini care acţionează structura în acelaşi număr n de secţiuni, se pot scrie matriceal:

$$S = s\,F \qquad \text{(VIII.58)}$$

unde:

S = vectorul unui anumit efort din cele n secţiuni ale structurii:

$$S = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_i \\ \vdots \\ S_n \end{Bmatrix} \qquad \text{(VIII.59)}$$

δ = matricea coeficienţilor de influenţă, numită şi matricea de influenţă:

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1i} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2i} & \cdots & \delta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{i1} & \delta_{i2} & \cdots & \delta_{ii} & \cdots & \delta_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{ni} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{(VIII.60)}$$

F = vectorul sarcinilor care acţionează asupra structurii:

$$F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \qquad \text{(VIII.61)}$$

Avînd determinate matricele de influenţă, se pot determina eforturile în secţiunile prestabilite ale structurii pentru diferite ipoteze de încărcare (diferiţi vectori F).

Mai mult decît atît, se pot trasa <u>liniile de influenţă</u> ale eforturilor, după următorul principiu: se consideră succesiv cîte o forţă unitară în diferite secţiuni ale structurii, şi se determină - rezolvînd relaţiile de tipul (VIII.58) - valorile eforturilor $S_1, S_2, \ldots, S_n$ corespunzătoare; aceasta revinela a considera pe rînd:

a) $F_1 = 1$ şi $F_2 = F_3 = \ldots = F_n = 0$, cînd se obţin valorile $\delta_{11}, \delta_{21}, \ldots, \delta_{n1}$ care reprezintă ordonatele din dreptul secţiunii 1 ale tuturor liniilor de influenţă ale eforturilor $S_1, S_2 \ldots S_n$ [prima coloană a matricei (VIII.60)].

b) $F_2 = 1$ şi $F_1 = F_3 = \ldots = F_n = C$, cînd se obţin valorile $s_{12}, s_{22}, \ldots, s_{n2}$ care reprezintă ordonatele din dreptul secţiunii 2 ale tuturor liniilor de influenţă ale eforturilor S_1, S_2 $\ldots S_n$, [coloana a doua a matricei (VIII.60)] ş.a.m.d.

Astfel, linia de influenţă a efortului S_1 se va trasa cu ordonatele $s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1n}$, linia de influenţă a efortului S_2 se va trasa cu ordonatele $s_{21}, s_{22}, \ldots, s_{2n}$ şi aşa mai departe, obţinîndu-se deci liniile de influenţă ale efortului S din toate secţiunile 1,2... n ale structurii.

In cele ce urmează se prezintă formele generale ale matricelor de influenţă pentru momentele încovoietoare şi forţele tăietoare la grinzile drepte simple.

VIII.4.2. Matricele de influenţă ale eforturilor la grinzile drepte simple

a. Grinda simplu rezemată.

Dacă se consideră grinda simplu rezemată din fig.VIII.10 divizată într-un număr de n tronsoane de lungime d [(n+1) secţiuni caracteristice], matricele de influenţă se determină astfel:

a.1. Matricea de influenţă a momentelor încovoietoare.

Elementele matricei de influenţă, care sînt valori ale ordonatelor din liniile de influenţă de tipul celei din fig. VIII.10.b se determină astfel (deducerea se face prin relaţii de asemănare):

- pentru $i \leq k$: $m_{ik} = i \frac{d}{n} (n - k)$ (VIII.62.a)
- pentru $i > k$: $m_{ik} = k \frac{d}{n} (n - i)$ (VIII.62.b)

Rezultă astfel următoarea matrice de influenţă

Pentru momentele încovoietoare:

$$m=\frac{d}{n}\begin{bmatrix} n-1 & n-2 & n-3\ldots n-k\ldots\ldots 3 & 2 & 1 \\ n-2 & 2(n-2) & 2(n-3)\ldots 2(n-k)\ldots 2x3 & 2x2 & 2x1 \\ n-3 & 2(n-3) & 3(n-3)\ldots 3(n-k)\ldots 3x3 & 3x2 & 3x1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n-i) & 2(n-i) & 3(n-i)\ldots i(n-k)\ldots 3i & 2i & i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2x2 & 3x2\ldots 2(n-k)\ldots 2(n-3) & 2(n-2) & n-2 \\ 1 & 2 & 3\ldots(n-k)\ldots n-3 & n-2 & n-1 \end{bmatrix} \quad \text{(VIII.62)}$$

care se mai poate scrie:

$$m = \frac{d}{n}\, m_M \qquad \text{(VIII.63.b)}$$

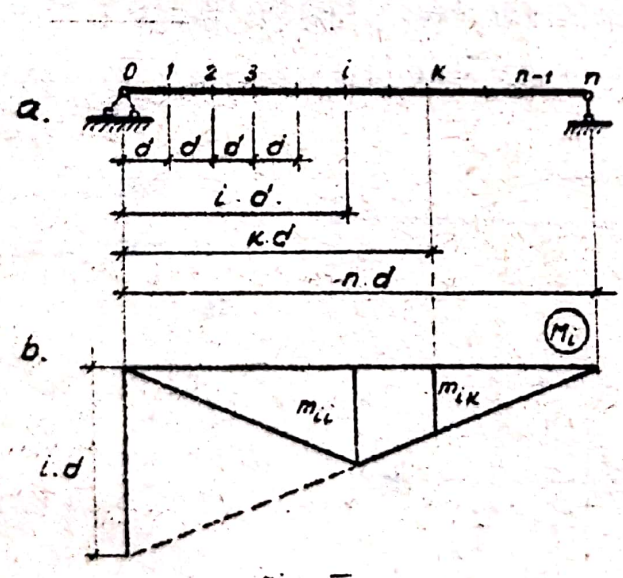


Fig. VIII.10

Cu ajutorul acestei matrice de influență se pot determina momentele încovoietoare în toate secțiunile prestabilite ale grinzii, (vectorul M) pe baza relației:

$$M = m\,P \qquad \text{(VIII.64)}$$

P fiind vectorul sarcinilor exterioare, corespunzător ipotezelor

de încărcare alese.

a.2. Matricea de influenţă a forţelor tăietoare.

Relaţia de determinare a forţelor tăietoare într-un număr prestabilit de secţiuni ale unei structuri(sau a liniilor de influenţă ale forţelor tăietoare) este:

$$T = t \cdot F \qquad \text{(VIII.65)}$$

unde:

T = vectorul forţelor tăietoare;

F = vectorul sarcinilor exterioare;

t = matricea de influenţă a forţelor tăietoare, ale cărei elemente t_{ik} se determină astfel:

- pentru $i \leq k$: $t_{ik} = \frac{1}{n}(n-k)$ (VIII.66.a)

- pentru $i > k$: $t_{ik} = -\frac{1}{n}k$ (VIII.66.b)

rezultate din relaţii de asemănare scrise în linia de influenţă a forţei tăietoare (fig.VIII.11)

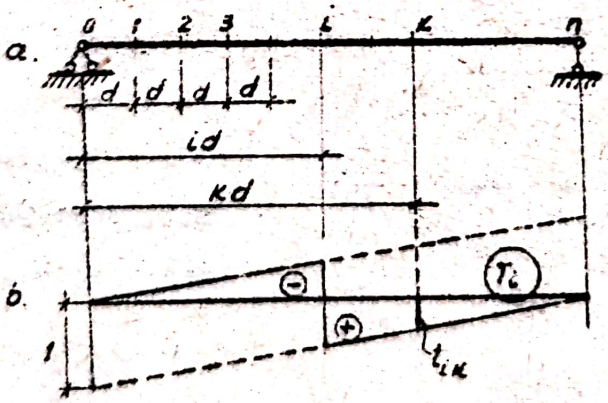


Fig. VIII. 11

Rezultă astfel următoarea matrice de influenţă pentru forţele tăietoare la grinda simplu rezemată:

$$t = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} n-1 & n-2 & n-3 & \dots n-k & \dots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & n-2 & n-3 & \dots n-k & \dots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & n-3 & \dots n-k & \dots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \dots n-k & \dots & 3 & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots n-k & \dots & 3 & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots -k & \dots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \dots -k & \dots & -(n-3) & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \dots -k & \dots & -(n-3) & -(n-2) & -(n-1) \end{bmatrix} \qquad \text{(VIII.67.a)}$$

care se mai poate scrie:

$$t = \frac{1}{n} m_T \qquad \text{(VIII.67.b)}$$

Cunoscînd matricea t se pot determina diagramele de forţe tăietoare pentru diferite ipoteze de încărcare (diferiţi vectori F) sau liniile de influenţă aşa cum s-a precizat anterior.

b) <u>Grinda în consolă</u>

Pe baza liniilor de influenţă din fig.VIII.12, rezultă:

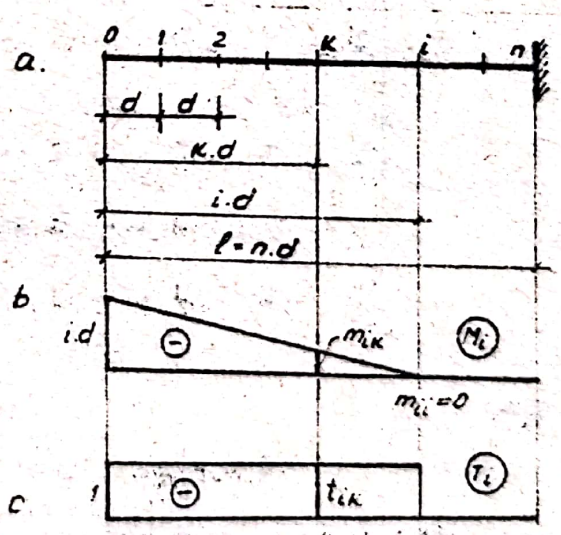


Fig. VIII 12

b.1. <u>Matricea de influenţă a momentelor încovoietoare:</u>

$$m = -d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i & (i-1) & (i-2) & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1) & (n-2) & (n-3) & \dots & (n-k) & \dots & 1 & 0 & 0 \\ n & (n-1) & (n-2) & \dots & (n-k-1) & \dots & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(VIII.68.a)}$$

care se mai poate scrie:

$$m = -d\, m_q \qquad \text{(VIII.68.b)}$$

b.2. Matricea de influență a forțelor tăietoare.

$$t = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(VIII.69.a)}$$

sau:

$$t = -m_p \qquad \text{(VIII.69.b)}$$

Observație: dacă grinda are încastrarea în stînga, atunci:

$$m = -d\, m_q \qquad \text{(VIII.68.b)}$$
$$t = m_p \qquad \text{(VIII.69.c)}$$

Aplicatie

Pentru o grindă simplu rezemată cu deschiderea de 12 m (fig.13.a) se vor determina:

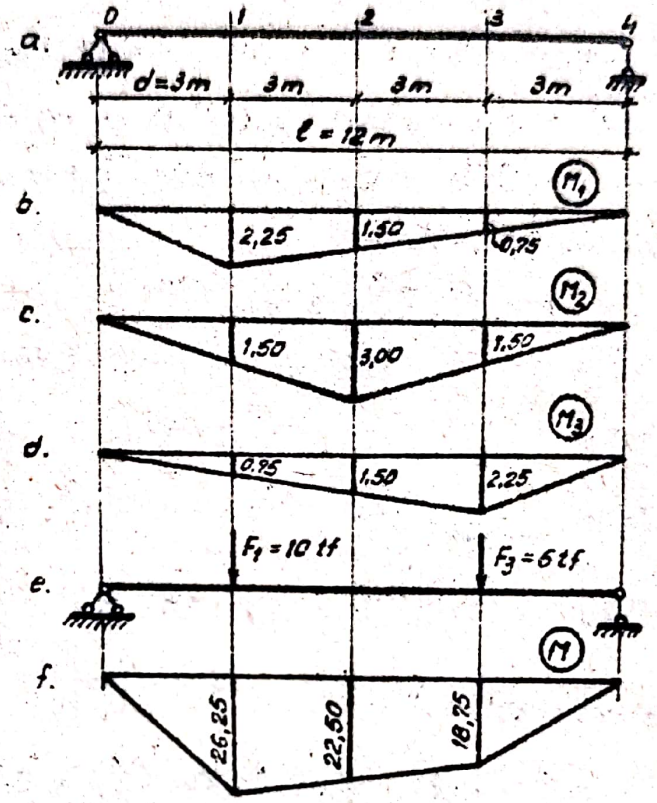


Fig. VIII 13

a) matricea de influenţă a momentelor încovoietoare;

b) liniile de influenţă ale momentelor din trei secţiuni ale grinzii;

c) diagrama de momente pentru încărcarea cu sarcinile din fig.VIII.13.e.

a) Matricea de influenţă a momentelor încovoietoare.

Folosind forma generală (VIII.63.a) a matricei de influenţă, pentru datele n = 4 şi d = 3,0 m, se obţine:

$$m = \frac{3}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Pentru determinarea ordonatelor liniilor de influenţă ale momentelor din secţiunile 1,2 şi 3, se consideră succesiv acţiunea unei forţe unitare în aceste puncte şi folosind relaţia (VIII.64) şi obţine:

P = 1 în secţiunea 1:

$$\begin{Bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{Bmatrix} = \frac{3}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

din care rezultă:

$$m_{11} = 2,25;\quad m_{21} = 1,50;\quad m_{31} = 0,75$$

P = 1 în secţiunea 2:

$$\begin{Bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{Bmatrix} = \frac{3}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

din care rezultă:

$$m_{12} = 1,50;\quad m_{22} = 3;\quad m_{32} = 1,50$$

P = 1 în secţiunea 3:

$$\begin{Bmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{Bmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

din care rezultă:

$$m_{13} = 0,75; \quad m_{23} = 1,50; \quad m_{33} = 2,25$$

Liniile de influenţă se trasează astfel:

- linia de influenţă a momentului M_1 - cu ordonatele m_{11}, m_{12}, m_{13} (fig.VIII.13.b);

- linia de influenţă a momentului M_2 - cu ordonatele m_{21}, m_{22}, m_{23} - fig.VIII.13.c;

- linia de influenţă a momentului M_3 - cu ordonatele m_{31}, m_{32}, m_{33} - fig.VIII.13.d.

c) Valorile momentelor din secţiunile 1, 2, 3 produse de încărcările din fig.VIII.13.c se determină din relaţia matricească:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

din care rezultă:

$M_1 = 26,25$ tfm; $M_2 = 22,50$ tfm; $M_3 = 18,75$ tfm

cu care se trasează diagrama de momente din fig.VIII.13.f.

Avantajele acestui mod de lucru sînt ,desigur, evidente în cazul structurilor mai complicate şi calculate în mai multe ipoteze de încărcare, cu atît mai mult cu cît calculul poate fi automatizat.

..oo0oo..

Scanned with OKEN Scanner

B I B L I O G R A F I E

1. BALAN ST., - Lecţie complementare de Mecanică teoretică, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1969.
2. BELLUZZI O., - Scienza delle costruzioni, N.Zanichelli, Bologna, 1955.
3. CARACOSTEA A.D., - Manual pentru calculul construcţiilor, Secţiunea VIII, Editura tehnică, Bucureşti, 1959.
4. O'CONNOR C., - Design of Bridge Superstructures, Willey Interscience, New York, 1971.
5. DARKOV A.V., KUZNETOV V.I., - Statica soorujenii, Transjeldorizdat, Moskva, 1951.
6. FILIPESCU Gh. E., - Statica şi rezistenţa, Imprimeria naţională, Bucureşti, 1940.
7. GHEORGHIU A., - Statica construcţiilor, vol.I. Editura tehnică, Bucureşti, 1960.
8. GHEORGHIU A., - Statica construcţiilor, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1968.
9. KISELEV V.A., - Stroitelnaia mehanika, Moskva, 1967.
10. MATEESCU D., - Construcţii metalice speciale, Editura tehnică, Bucureşti, 1956.
11. MAZILU P., - Statica construcţiilor, vol.I, Editura de stat pentru arhitectură şi construcţii, Bucureşti, 1955.

Scanned with OKEN Scanner

12. MÜLLER-BRESLAU H., - Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Krüner, Leipzig, 1927.

13. PESTEL E.E., LECKIE F.A., - Matrix Method in Elastomechanics, Mc.Graw-Hill Book Company, Inc. New York, 1963.

14. PING CHUN WANG, - Metode numerice şi matriceale în Mecanica construcţiilor (trad.din limba engleză), Editura tehnică, Bucureşti, 1970.

15. PONOMAREV K.K., - Rasoet elementov construcţii s primeneniem electronnîh ţifrovîh vicislitelnîh maşin, Maşinostroenie, Moskva, 1972.

16. POPESCU V., - Construcţii metalice, Editura tehnică, Bucureşti, 1963.

17. POPESCU V., - Construcţii metalice industriale, Editura tehnică, Bucureşti, 1967.

18. PROCOFIEV J.P., - Statica construcţiilor (trad.din limba rusă), CPED-CFR, Bucureşti, 1951.

19. RABINOVICI I.M., - Kurs stroitelnoi mehaniki sterjnevîh sistem, Stroiizdat, Moskva, 1950.

20. RAUTU S., BANUT V., - Statica construcţiilor, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti,1972.

21. RAUTU S., BANUT V., - Statica construcţiilor, Culegere de probleme, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1969.

22. SESAN A., - Unele generalizări ale metodei Krîlov referitoare la deformaţia grinzilor drepte, Bul.Inst.Polit.Iaşi, V(IX), 3-4, 1959.

23. SOBOTA J., - Maticová analyza prútovych konstrukcii za pohyblivého zotazenia, Bratislava,1971.

24. STRELETKI N.S., - Metalliceskie konstruktii, Gosstroiizdat, Moskva, 1961.

25. STÜSSI F., - Statique appliqué et résistance des matériaux, Dunod, Paris, 1957.

26. TIMOSHENKO S., - Theory of Structures, Mc.Graw.Hill Book Company, New York, 1953.

27. VILCOVICI V., BALAN ST., VOINEA R., - Mecanica teoretică, Editura tehnică, București, 1963.

C U P R I N S

Pagina

INTRODUCERE 1

Cap.I. GENERALITATI. 10

I.1. Obiectul Staticii construcţiilor 10

I.2. Ipoteze de bază în calculul static al structurilor în domeniul elastic 12

I.3. Reazeme şi reacţiuni. 14

I.4. Schematizarea construcţiilor (elemente şi structuri). 20

I.5. Acţiuni în construcţii. 29

I.6. Condiţii de echilibru, eforturi în secţiuni . . 33

I.6.1. Condiţii de echilibru static. Determinarea reacţiunilor. 33

I.6.2. Eforturi în secţiuni. 36

I.7. Relaţii diferenţiale între eforturi şi încărcări la bara dreaptă. 41

I.8. Diagrame de eforturi şi caracteristicile lor. . 42

Cap.II. GRINZI SI SISTEME STATIC DETERMINATE ALCATUITE DIN BARE DREPTE. 49

II.1. Calculul la sarcini fixe 49

II.1.1. Grinda simplu rezemată 49

II.1.1.1. Rezolvarea pe cale analitică. 49

II.1.1.2. Rezolvarea pe cale grafică. 65

II.1.2. Grinda încastrată. 71

II.1.2.1. Rezolvarea pe cale analitică. 71

II.1.2.2. Rezolvare pe cale grafică 72

Scanned with OKEN Scanner

II.1.3. Grinda cu console. 74
II.1.3.1. Rezolvarea pe cale analitică 74
II.1.3.2. Rezolvarea pe cale grafică. 76
II.1.4. Grinzi cu console și articulații(grinzi Gerber). 78
II.1.4.1. Considerații generale. 78
II.1.4.2. Rezolvarea pe cale analitică 81
II.1.4.3. Rezolvarea pe cale grafică. 84
II.1.4.4. Influența poziției articulațiilor asupra distribuțiilor de eforturi. . . . 87
II.1.5. Bare cotite, cadre static determinate. 89
II.1.5.1. Considerații generale. 89
II.1.5.2. Calculul barelor cotite. 90
II.1.5.3. Calculul cadrelor static determinate . . 96
II.1.6. Cazul sarcinilor transmise indirect. 101
II.1.6.1. Rezolvarea pe cale analitică. 101
II.1.6.2. Rezolvarea pe cale grafică. 106

II.2. Utilizarea principiului deplasărilor virtuale. . . 107
II.2.1. Considerații generale. 107
II.2.2. Determinarea reacțiunilor și a eforturilor folosind principiul deplasărilor virtuale. 111
II.2.3. Analiza cinematică a sistemelor plane alcătuite din bare. 117
II.2.3.1. Centre instantanee. Teorema coliniarității centrelor instantanee. 117
II.2.3.2. Diagrame și epure de deplasări. Pîrghia Jukovski. 121

II.3. Calculul la sarcini mobile. 132
II.3.1. Considerații generale. 132

II.3.2. Linii de influenţă. 132
II.3.1.1. Definirea liniei de influenţă. .. 132
II.3.2.2. Căile de determinare a liniilor de influenţă. 136
II.3.3. Determinarea liniilor de influenţă pe cale analitică. 140
II.3.3.1. Grinda simplu rezemată. 140
II.3.3.2. Grinda încastrată. 144
II.3.3.3. Grinda cu console. 146
II.3.3.4. Cazul sarcinilor transmise indirect. 151
II.3.4. Determinarea liniilor de influenţă pe cale cinematică. 154
II.3.4.1. Grinda simplu rezemată. 154
II.3.4.2. Grinda încastrată. 157
II.3.4.3. Grinda cu console. 159
II.3.4.4. Grinzi cu console şi articulaţii. 161
II.3.4.5. Bare cotite,cadre static determinate. 164
II.3.4.6. Cazul sarcinilor transmise indirect. 167
II.3.5. Derivatele parţiale ale funcţiilor de influenţă 171
II.3.6. Determinarea eforturilor maxime. 176
II.3.6.1. Generalităţi. 176
II.3.6.2. Criteriul general pentru determinarea eforturilor maxime folosind liniile de influenţă. 179
II.3.6.3. Determinarea forţei tăietoare maxime la grinda simplu rezemată. 185

Scanned with OKEN Scanner

a. Soluţia analitică. 185
a.1. Sarcini transmise direct 185
a.2. Sarcini transmise indirect. 189
b. Soluţia grafică. 192
b.1. Sarcini transmise direct 192
b.2. Sarcini transmise indirect. 197

II.3.6.4. Determinarea momentului încovoietor maxim la grinda simplu rezemată. . . 198
a. Soluţia analitică. 198
b. Soluţia grafică. 202
c. Cazul sarcinilor transmise indirect. 204

II.3.6.5. Determinarea momentului încovoietor maximum maximorum la grinda simplu rezemată. 204
II.3.6.6. Utilizarea sarcinilor echivalente pentru determinarea eforturilor maxime. 208
Aplicaţii. 211

Cap.III. ARCE STATIC DETERMINATE. 223
III.1. Consideraţii generale 223
III.1.1. Caracteristicile arcelor 223
III.1.2. Relaţii diferenţiale între eforturi şi încărcări la bara cu axă curbă. 227
III.2. Arcul cu trei articulaţii 229
III.2.1. Calculul la sarcini fixe 229
III.2.1.1.Rezolvare pe cale analitică.229
III.2.1.2. Rezolvare pe cale grafică 238

Scanned with OKEN Scanner

III.2.2. Calculul la sarcini mobile. . . . 246
III.2.2.1. Determinarea liniilor de influenţă pe cale analitică. 246
III.2.2.2. Determinarea liniilor de influenţă pe cale cinematică. 253
III.2.2.3. Linii de influenţă ale momentelor la limitele sîmburelui central. . . 265
III.3. Arcul cu o articulaţie şi un reazem simplu. 268
III.3.1. Calculul la sarcini fixe.. 268
III.3.1.1. Rezolvarea pe cale analitică. 268
III.3.1.2. Rezolvarea pe cale grafică. . 271
III.3.2. Calculul la sarcini mobile. 272
III.3.2.1. Determinarea liniilor de influenţă pe cale analitică. 273
III.3.2.2. Determina liniilor de influenţă pe cale cinematică 277
III.4. Arce cu tirant. 281
III.4.1. Calculul la sarcini fixe . . . 281
III.4.2. Calculul la sarcini mobile.... 284
III.5. Arce cu console şi articulaţii. 284

III.5.1. Calculul la sarcini fixe. 284
III.5.2. Calculul la sarcini mobile. 286
Aplicaţii. 286

Cap.IV. STRUCTURI STATIC DETERMINATE PLANE ALCATUITE DIN BARE ARTICULATE IN NODURI(SISTEME PLANE CU ZABRELE) 296
IV.1. Consideraţii generale. 296
IV.1.1. Alcătuire, terminologie. 296
IV.1.2. Ipoteze de calcul. 298
IV.1.3. Condiţii de nedeformabilitate geometrică şi determinare statică. . . . 301
IV.1.4. Sisteme plane cu zăbrele utilizate în construcţii. 305
IV.2. Metode de determinare a eforturilor în barele sistemelor de bare articulate. . . . 306
IV.2.1. Metoda secţiunilor. 307
IV.2.1.1. Procedeul analitic(Metoda Ritter). 308
IV.2.1.2. Procedeul grafic(Metoda Culmann). 310
IV.2.2. Metoda izolării nodurilor. 311
IV.2.2.1. Procedeul analitic 312
IV.2.2.2. Procedeul grafic (Epura Cremona). 316
IV.2.3. Utilizarea principiului deplasărilor virtuale. 320
IV.3. Grinzi cu zăbrele 326
IV.3.1. Generalităţi. 326
IV.3.2. Grinzi cu zăbrele simple 331
IV.3.2.1. Calculul la sarcini fixe.. 331

a. Grinzi cu tălpi paralele. 331
b. Grinzi cu tălpi poligonale. . . . 334
c. Grinzi cu diagonale în K. 336
IV.3.2.2. Calculul la sarcini mobile. . . . 341
IV.3.2.2.1. Determinarea liniilor de influenţă pe cale analitică. 342
a. Grinzi cu tălpi paralele. 342
b. Grinzi cu tălpi poligonale. 345
c. Grinzi cu diagonale în K. 351
IV.3.2.2.2. Determinarea liniilor de influenţă pe cale cinematică. 353
a. Grinzi cu tălpi paralele. 355
b. Grinzi cu tălpi poligonale. 358
c. Grinzi cu diagonale în K. 361
IV.3.2.3. Influenţa formei tălpilor asupra eforturilor din bare. 364
IV.3.3. Grinzi cu zăbrele compuse. 373
IV.3.3.1. Calculul de sarcini fixe.. 373
IV.3.3.2. Calculul la sarcini mobile. 378
IV.3.4. Grinzi cu zăbrele complexe. 381
IV.3.4.1. Calculul la sarcini fixe.. 381
a. Utilizarea metodei

a. Utilizarea metodei înlocuirii barelor (Henneberg). 382
b. Utilizarea principiului deplasărilor virtuale (Pirghia Jukovski). 386
IV.3.4.2. Calculul la sarcini mobile. . .389
IV.4. Grinzi cu zăbrele cu osnacle şi articulaţii..391
IV.4.1. Generalităţi. 391
IV.4.2. Calculul la sarcini fixe. 394
IV.4.3. Calculul la sarcini mobile 394
IV.5. Arce cu zăbrele 399
IV.5.1. Generalităţi. 399
IV.5.2. Calculul la sarcini fixe. 401
IV.5.3. Calculul la sarcini mobile 404
IV.6. Determinarea eforturilor maxime în barele sistemelor cu zăbrele acţionate de sarcini mobile. 406
IV.7. Calculul sistemelor de bare articulate în cazul aplicării sarcinilor între noduri. . . 409

Cap.V. SISTEME MIXTE STATIC DETERMINATE. 412
V.1. Generalităţi. 412
V.2. Structuri mixte cu grinda de rigidizare la partea inferioară. 417
V.1.1. Grinda de rigidizare cu secţiune plină. 417
V.2.1.1. Calculul la sarcini fixe. .. 417
V.2.1.2. Calculul la sarcini mobile.. 422
V.2.2. Grinda de rigidizare cu zăbrele. . .. 424

V.2.2.1. Calculul la sarcini fixe. . . . 424
V.2.2.2. Calculul la sarcini mobile. . . 426
V.3. Structuri mixte cu grinda de rigidizare la partea superioară. 427
V.3.1. Grinda de rigidizare cu secțiune plină. 427
V.3.1.1. Calculul la sarcini fixe. 427
V.3.1.2. Calculul la sarcini mobile. 432
V.3.2. Grinda de rigidizare cu zăbrele.. 433
V.3.2.1. Calculul la sarcini fixe. 433
V.3.2.2. Calculul la sarcini mobile. 435

Cap.VI. SISTEME SUSPENDATE STATIC DETERMINATE. 436
VI.1. Generalități. 436
VI.2. Sisteme suspendate, cu grindă de rigidizare... 438
VI.2.1. Grinda de rigidizare cu secțiune plină. 438
VI.2.1.1. Calculul la sarcini fixe. 439
VI.2.1.2. Calculul la sarcini mobile. 440
VI.2.2. Grinda de rigidizare cu zăbrele. . . 441
VI.2.2.1. Calculul la sarcini fixe.. 441
VI.2.2.2. Calculul la sarcini mobile. 442
VI.3. Sisteme suspendate, fără grindă de rigidizare. 445
VI.3.1. Considerații generale. 445
VI.3.2. Sisteme suspendate alcătuite din triunghiuri suspendate unul de altul. 447
VI.3.2.1. Calculul la sarcini fixe. 447
VI.3.2.2. Calculul la sarcini mobile. 448

VI.3.3. Sisteme suspendate,cu mai multe tălpi. 452
VI.3.3.1. Alcătuire,condiţii de nedeformabilitate geometrică.453
VI.3.3.2. Calculul sistemelor cu mai multe tălpi. 455

Cap.VII. STRUCTURI SPAŢIALE STATIC DETERMINATE. 458
VII.1. Structuri spaţiale alcătuite din bare articulate în noduri. 458
VII.1.1. Alcă tuire,ipoteze de calcul. . . 458
VII.1.2. Condiţii de nedeformabilitate geometrică şi determinare statică. Clasificarea structurilor spaţiale articulate. 461
VII.1.3. Calculul structurilor spaţiale articulate în noduri. 466
VII.1.3.1. Metoda izolării nodurilor. 467
VII.1.3.2. Metoda secţiunilor. .. 471
VII.1.3.3. Descompunerea în sisteme plane. . . . 473
VII.2. Grinzi plane încărcate normal pe planul lor.475
VII.2.1. Alcătuire, caracteristici.. . . . 475
VII.2.3. Calculul grinzilor plane încărcate normal pe planul lor. 479

Cap.VIII. APLICAREA CALCULULUI MATRICEAL LA REZOLVAREA STRUCTURILOR STATIC DETERMINATE. 483
VIII.1. Generalităţi. 483
VIII.2. Elemente de algebră matriceală. 483

VIII.3. Determinarea eforturilor secţionale şi a deplasărilor elastice prin metoda matricelor de transfer. 493
VIII.3.1. Consideraţii generale 493
VIII.3.2. Expresiile generale ale funcţiilor încovoierii la bara dreaptă. 496
VIII.3.3. Exprimarea matricească a stărilor de eforturi şi deformaţii la barele drepte. 507
Exemplu de calcul. 512
VIII.4. Folosirea matricelor de influenţă. 518
VIII.4.1. Consideraţii generale. 518
VIII.4.2. Matricele de influenţă ale eforturilor la grinzile drepte simple. 520
a. Grinda simplu rezemată. . . . 520
b. Grinda în consolă. 523
Aplicaţie. 525

BIBLIOGRAFIE. 529